Atividade 3 – O espaço ℓ_2

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números complexos.

$a_n = \operatorname{Re} a_n + i \operatorname{Im} a_n$. Dizemos que (a_n) converge se $\operatorname{Re} a_n$ e $\operatorname{Im} a_n$ (parte real e imaginária) de a_n convergem. Nesse caso

$$\lim a_n = \lim \operatorname{Re} a_n + i \lim \operatorname{Im} a_n .$$

Considere as somas parciais $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Se (s_n) é convergente, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge e seu limite é definido como soma da série.

Se (s_n) não converge, dizemos que a série $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ diverge.

Recordamos que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge para $s \in \mathbb{K}$ se só se dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| s - \sum_{i=1}^{n} a_i \right| < \varepsilon \quad \forall \; n \geq N.$$

Em particular, $\left| \sum_{i=N}^{+\infty} a_n \right| < \varepsilon$.

Dizemos que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge absolutamente se a soma $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ é finita.

Finalmente definimos:

$$\ell_2 = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 < +\infty \right\}.$$

Veja que $x_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ pertence a ℓ_2.

Exercício 1: Verifique que as seguintes operações estão bem definidas em ℓ_2.

(a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$

para (a_n) e $(b_n) \in \ell_2$.

(b) $\lambda (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para $\lambda \in \mathbb{K}$

e $(a_n) \in \ell_2$.

Exercício 2: Verifique que ℓ_2 é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ com as operações definidas no exercício anterior.

Exercício 3: Dados $(a_n), (b_n) \in \ell_2$ defina

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \overline{b_n}.$$

Prove que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido acima é um produto interno em ℓ_2.

Exercício 4: Seja $W \subset \ell_2$ o conjunto formado pelas sequências (a_n) tais que $a_n \neq 0$ apenas para um nº finito de índices n. Mostre que W é subespaço de ℓ_2.