Oficinas de Demonstração - Resoluções

13/09/2023

Introdução

Olá! Este documento tem o objetivo de mostrar uma maneira de escrever as demonstrações dos exercícios propostos no projeto Oficinas de Demonstração, realizado em 2023 pelo CAEM, em parceria com a professora Daniela Mariz Silva Vieira, na disciplina MAT1514 - A Matemática na Educação Básica.

Não queremos que este documento seja entendido como *gabarito* dos exercícios, mas sim como **uma** das formas de construir as demonstrações, entre outras possíveis.

1 Demonstrações sobre paridade

Para as demonstrações desta seção foram adotadas as seguintes definições:

Definição: Um número inteiro n é dito **par** se existe algum inteiro k tal que $n = 2k$.
Definição: Um número inteiro n é dito **ímpar** se existe algum inteiro k tal que $n = 2k + 1$.

Exercício P1: Dado n inteiro, mostre que se n é par, então n^2 é par.
Se n é par, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$.
Assim, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$.
Como $k \in \mathbb{Z}$, então também $2k^2 \in \mathbb{Z}$. Portanto, n^2 é par.

Outra demonstração:
Alternativamente, poderíamos ter adotado a seguinte definição de número par, que utiliza o conceito de fração:

Definição: Um número inteiro n é **par** se $\frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$.

Se n é par, então $\frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$.
Sabemos que o quadrado de qualquer número inteiro é um número inteiro, e também que o dobro de um número inteiro é um número inteiro. Segue que

$$\frac{n^2}{4} \in \mathbb{Z}, \text{ e então } \frac{n^2}{2} \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, n^2 é par.

Exercício P2: Dado n inteiro, mostre que se n é ímpar, então n^2 é ímpar.
Se n é ímpar, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$.
Assim, $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.
Como $k \in \mathbb{Z}$, então também $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$. Portanto, n^2 é ímpar.

Exercício P3: Dado n inteiro, mostre que se n^2 é ímpar, então n é ímpar.
Aqui usaremos o fato de que nenhum número pode ser simultaneamente par **e** ímpar.
Suponha, por absurdo, que n seja par.
Nesse caso, conforme provado em P1, temos que n^2 é par, contradizendo a hipótese de que n^2 é ímpar.
Portanto, n não pode ser par. Concluímos que n é ímpar.

2 Investigação com números inteiros

Indagação: O que se pode afirmar sobre o quadrado de um número inteiro positivo terminado em 5?
Proposta: Formule propriedades que respondam à indagação apresentada e ordene-as, se possível, da "mais fraca"para a "mais forte".

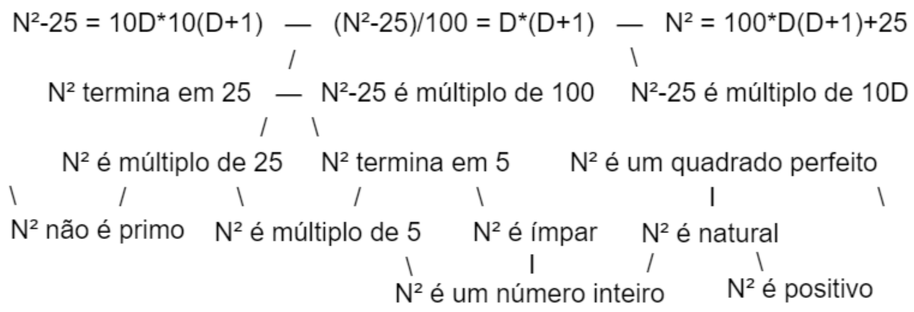
Este é um exercício muito aberto e subjetivo, e por isso admite diferentes respostas. A própria interpretação da "relação *mais fraca-mais forte*"entre as afirmações é um dos desafios dessa atividade. A seguir apresentamos a resposta mais completa que conseguimos produzir.

Chamemos de N o número terminado em 5 dado.
Chamemos de D a "dezena"de N, no sentido de que D é o quociente da divisão de N por 10, isto é, se $N = 4715$, então $D = 471$.
Como N termina em 5, temos que $D = \frac{N-5}{10}$ e $D + 1 = \frac{N+5}{10}$.

Veja que $N = 10D + 5$, e então

$$N^2 = (10D + 5)^2 = 100D^2 + 100D + 25 = 100D(D + 1) + 25.$$

A "cadeia"a seguir apresenta diversas propriedades sobre N^2. Nessa configuração, se uma afirmação A estiver abaixo da afirmação B, e se elas estiverem conectadas na cadeia, então A é "mais fraca"que B. Em outras palavras, A é necessária para B; B é suficiente para A; e B implica A. Se duas afirmações na mesma linha estiverem conectadas por um traço horizontal, então elas são equivalentes.



Note que as propriedades N^2 *é um quadrado perfeito* e N^2 *não é primo* estão conectadas.