P3, Cálculo II (2023), **EAN**
Prof. Juan López Linares

1 Aula 23: Comprimento de Arco e Curvatura

Exercício 1. *Encontrar o vetor tangente unitário $\vec{T}$ da curva*

$$\overrightarrow{r(t)} = \langle \arctan(2t), \operatorname{senh}(2t), \cosh(2t) \rangle$$

no ponto em que $t = 0$.

1.1 Resolução do Exercício 1

Lembra-se que:

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$
$$\operatorname{senh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$
$$\frac{d}{dt}\left[\cosh(t)\right] = \operatorname{senh}(t),$$
$$\frac{d}{dt}\left[\operatorname{senh}(t)\right] = \cosh(t),$$
$$\frac{d}{dt}\left[\arctan(t)\right] = \frac{1}{1+t^2}.$$

Calcula-se a derivada do vetor $\overrightarrow{r(t)}$:

$$\overrightarrow{r(t)} = \langle \arctan(2t), \operatorname{senh}(2t), \cosh(2t) \rangle,$$
$$\overrightarrow{r'(t)} = \left\langle \frac{2}{1+4t^2}, 2\cosh(2t), 2\operatorname{senh}(2t) \right\rangle.$$

Avaliando em $t = 0$ segue:

$$\overrightarrow{r'(0)} = \langle 2, 2, 0 \rangle = 2\langle 1, 1, 0 \rangle.$$

A norma ou módulo do vetor $\overrightarrow{r'(0)}$ calcula-se:

$$\left\| \overrightarrow{r'(0)} \right\| = 2\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}.$$

Como

$$\overrightarrow{T(0)} = \frac{1}{\left\| \overrightarrow{r'(0)} \right\|} \cdot \overrightarrow{r'(0)},$$

é concluído que:

$$\overrightarrow{T(0)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2\langle 1, 1, 0 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\langle 1, 1, 0 \rangle.$$

A definição dos vetores $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$ está disponível aqui. Um exercício análogo aqui.

2 Aula 26: Limite e Continuidade

Exercício 2. *Determinar o maior conjunto de pontos em que a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+xy+y^2} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua.

2.1 Resolução do Exercício 2

Analisa-se primeiro o ponto $(0,0)$. Será provado que o limite a seguir não existe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{xy}{x^2+xy+y^2}\right].$$

Seja $m \in \mathbb{R}$. Nota-se que as retas com equações $y = mx$ passam todas pelo ponto $(0,0)$. Será calculado o limite anterior seguindo esse tipo de caminho. Isto é, utiliza-se a transformação:

$$(x,y) \to (0,0) \Rightarrow (x, y = mx) \to (0,0) \Rightarrow x \to 0.$$

O limite escreve-se como:

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{xmx}{x^2+xmx+(mx)^2}\right] = \lim_{x\to 0} \left[\frac{mx^2}{x^2(1+m+m^2)}\right] = \frac{m}{1+m+m^2}.$$

O fato do resultado anterior depender do valor de m significa que o limite não existe. Com isto, a função dada não é contínua no ponto $(0,0)$. Para qualquer outro ponto de $\mathbb{R}^2$ a função é contínua pois é definida partindo da composição de funções contínuas. Ou seja, o maior conjunto de pontos em que a função dada é contínua escreve-se:

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (0,0)\right\}.$$

A discussão da continuidade em função de várias variáveis está disponível aqui.