P3, Cálculo II (2023), **EAD**
Prof. Juan López Linares

1 Aula 21: Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

Exercício 1. *Calcular* $\lim_{t\to 0}[\vec{r}(t)]$ *se:*

$$\vec{r}(t) = \cosh(t)\vec{i} + \operatorname{senh}(t)\vec{j} + \arctan(t)\vec{k}.$$

1.1 Resolução do Exercício 1

Calcula-se o limite de uma função vetorial por componentes. Sendo

$$\lim_{t\to t_0}[x(t)] = a,$$

$$\lim_{t\to t_0}[y(t)] = b,$$

$$\lim_{t\to t_0}[z(t)] = c,$$

vale que:

$$\lim_{t\to t_0}[\vec{r}(t)] = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

As três funções componentes do vetor posição deste exercício são contínuas em $t = 0$. Isto permite calcular o limite substituindo diretamente o valor. Como

$$\lim_{t\to 0}[\cosh(t)] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right] = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1,$$

$$\lim_{t\to 0}[\operatorname{senh}(t)] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right] = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0,$$

$$\lim_{t\to 0}[\arctan(t)] = 0,\ (\tan(0) = 0),$$

então:

$$\lim_{t\to 0}\left[\cosh(t)\vec{i} + \operatorname{senh}(t)\vec{j} + \arctan(t)\vec{k}\right] = \vec{i}.$$

A definição de limite de uma função vetorial e exercícios resolvidos análogos está disponível aqui.

2 Aula 28: Planos Tangentes e Aproximações Lineares

Exercício 2. *Determinar uma equação do plano tangente à superfície*

$$z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

no ponto do domínio $(8, 6)$.

2.1 Resolução do Exercício 2

A função

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

é bem definida, contínua e diferenciável no ponto $(8, 6)$.

Avaliando f no ponto $(8, 6)$ tem-se:

$$z_0 = f(8, 6) = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{(2 \cdot 4)^2 + (2 \cdot 3)^2} = 2\sqrt{4^2 + 3^2} = 2\sqrt{16 + 9} = 2\sqrt{25} = 10.$$

A derivada parcial de f relativo a x é:

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Avaliando no ponto $(8, 6)$ encontra-se:

$$f_x(8, 6) = \frac{8}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

A derivada parcial de f relativo a y é:

$$f_y(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Avaliando no ponto $(8, 6)$ tem-se:

$$f_x(8, 6) = \frac{6}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

A equação do plano tangente a superfície no ponto (x_0, y_0, z_0) é:

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Ou seja, para o ponto $(8, 6, 10)$ e a superfície dada a equação do plano tangente é:

$$z = 10 + \frac{4}{5}(x - 8) + \frac{3}{5}(y - 6).$$

Uma exercício análogo encontra-se aqui.