P3, Cálculo II (2023), **Biossistemas**
Prof. Juan López Linares

1 Aula 22: Derivadas e Integrais de Funções Vetoriais

Exercício 1. *Determinar o vetor tangente unitário* $\overrightarrow{T(t)}$ *da curva*

$$\overrightarrow{r(t)} = \langle \cosh(t), \, \mathrm{senh}(t), \arctan(t) \rangle \, ,$$

no ponto em que $t = 0$.

1.1 Resolução do Exercício 1

Primeiro calcula-se a derivada do vetor $\overrightarrow{r(t)}$:

$$\overrightarrow{r(t)} = \langle \cosh(t), \, \mathrm{senh}(t), \arctan(t) \rangle \, ,$$

$$\overrightarrow{r'(t)} = \left\langle \mathrm{senh}(t), \cosh(t), \frac{1}{1+t^2} \right\rangle .$$

Como

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

$$\mathrm{senh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

avaliando em $t = 0$ segue:

$$\overrightarrow{r'(0)} = \langle 0, 1, 1 \rangle \, .$$

A norma ou módulo do vetor $\overrightarrow{r'(0)}$ calcula-se como:

$$\left\| \overrightarrow{r'\,(0)} \right\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Como

$$\overrightarrow{T\,(0)} = \frac{1}{\left\| \overrightarrow{r'\,(0)} \right\|} \overrightarrow{r'\,(0)},$$

é concluído que:

$$\overrightarrow{T\,(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0, 1, 1 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \langle 0, 1, 1 \rangle \, .$$

A definição do vetor $\overrightarrow{T(t)}$ e exercícios resolvidos análogos está disponível aqui.

2 Aula 25: Funções de Várias Variáveis

Exercício 2. *Se*

$$g(x, y, z) = \arctan(x) \operatorname{senh}(y) \cos(z),$$

encontrar $g(-t, -2t, -3t)$ *e* $g(x - y, x + y, x)$.

2.1 Resolução do Exercício 2

Tem-se:

$$g(x, y, z) = \arctan(x) \operatorname{senh}(y) \cos(z).$$

Para encontrar $g(-t, -2t, -3t)$ basta trocar x, y, z por $-t, -2t, -3t$, respectivamente. Ou seja,

$$g(-t, -2t, -3t) = \arctan(-t) \operatorname{senh}(-2t) \cos(-3t).$$

Considerando-se a paridade das funções utilizadas segue:

$$\arctan(-t) = -\arctan(t),$$

$$\operatorname{senh}(-2t) = -\operatorname{senh}(2t),$$
$$\cos(-3t) = \cos(3t),$$
$$g(-t, -2t, -3t) = \arctan(t) \operatorname{senh}(2t) \cos(3t).$$

Para encontrar $g(x - y, x + y, x)$ basta trocar x, y, z por $x - y, x + y, x$, respectivamente. Isto é,

$$g(x - y, x + y, x) = \arctan(x - y) \operatorname{senh}(x + y) \cos(x).$$

Devido a função $\arctan(x - y)$ ser ímpar o resultado anterior também pode ser escrito:

$$g(x - y, x + y, x) = -\arctan(y - x) \operatorname{senh}(x + y) \cos(x).$$

Um problema análogo está disponível aqui.