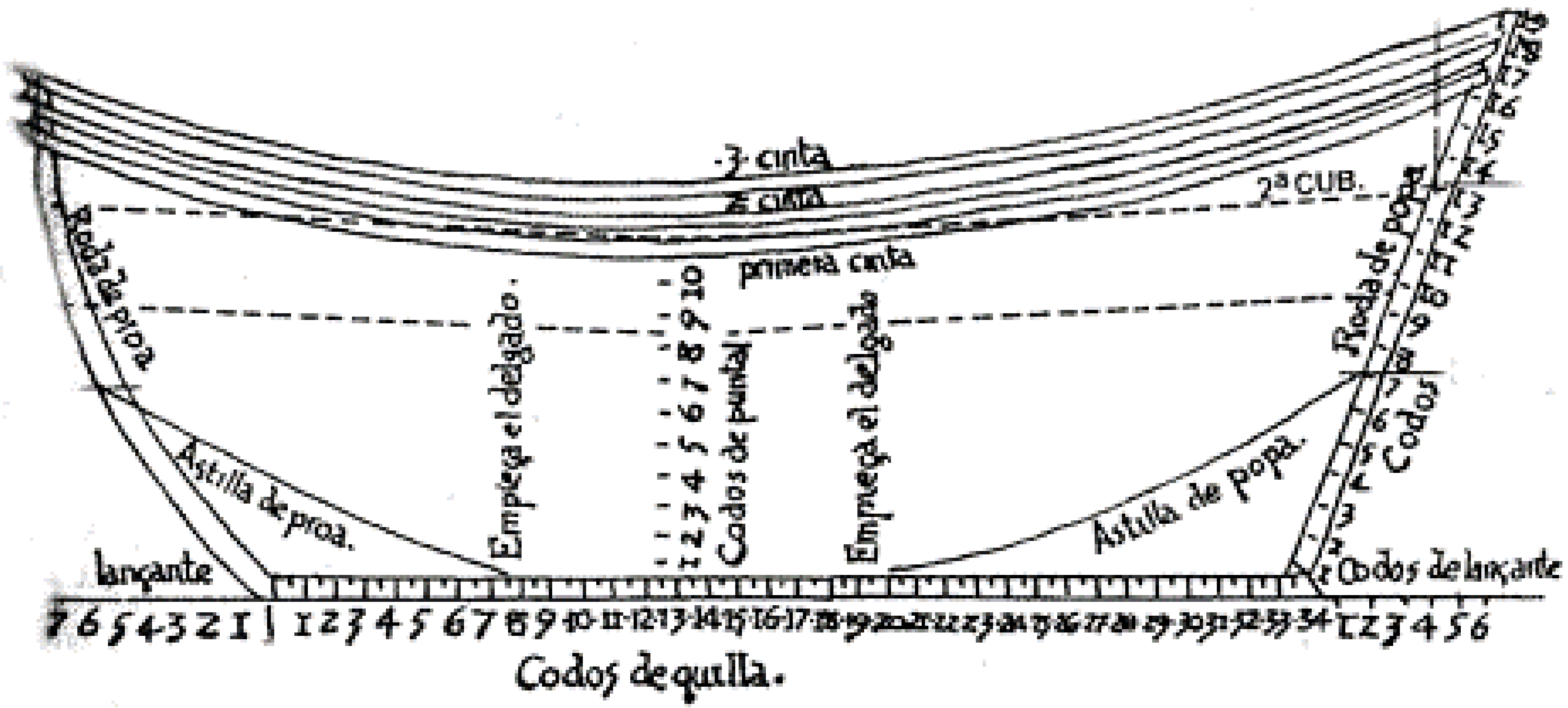
0313320 - MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS À ENGENHARIA CIVIL

SPLINES

Artur Mesquita Costa - 10791725
Beatriz Cortez Rodriguez dos Santos - 12555210
Gabriel Serafim Vieira- 11916583

INTRODUÇÃO - COMO SURGIU?

- A primeira menção ao termo splines se deu na construção naval;
- O termo "spline" tem origem no inglês. Inicialmente, se referia a uma tira fina e flexível de madeira usada pelos construtores de navios para desenhar curvas suaves nos projetos das embarcações;
- Portanto, envolvia encontrar uma função que se ajustasse entre dois pontos.

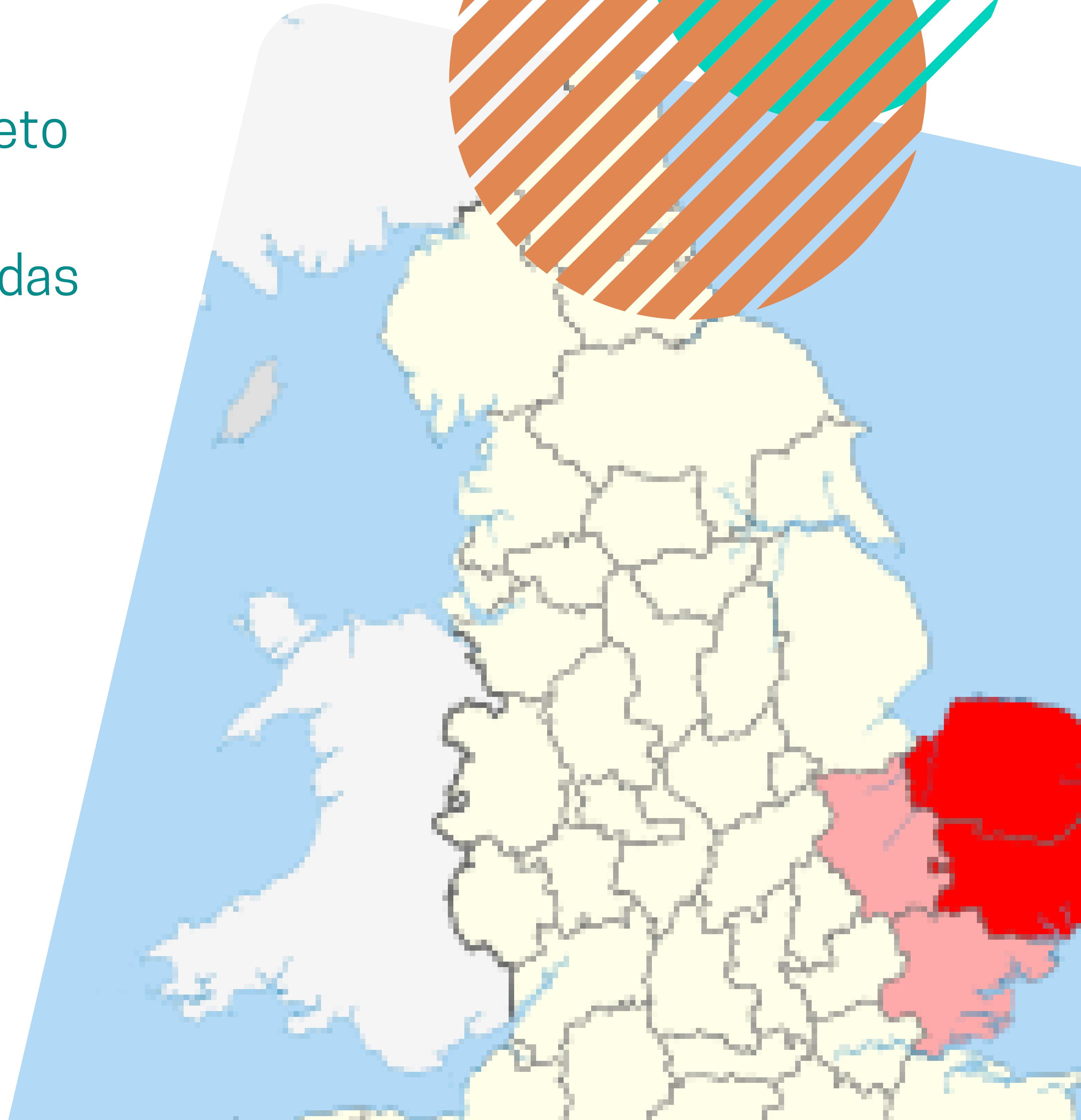


PRIMEIRO PAPER - SPLINES NA ACADEMIA

- A primeira menção acadêmica ao termo é atribuída ao matemático romeno Isaac Jacob Schoenberg;
- Começou o desenvolvimento da teoria durante seu período servindo com “matemático de guerra” a favor dos aliados durante a segunda guerra mundial;
- O Artigo em si foi publicado em 1946.

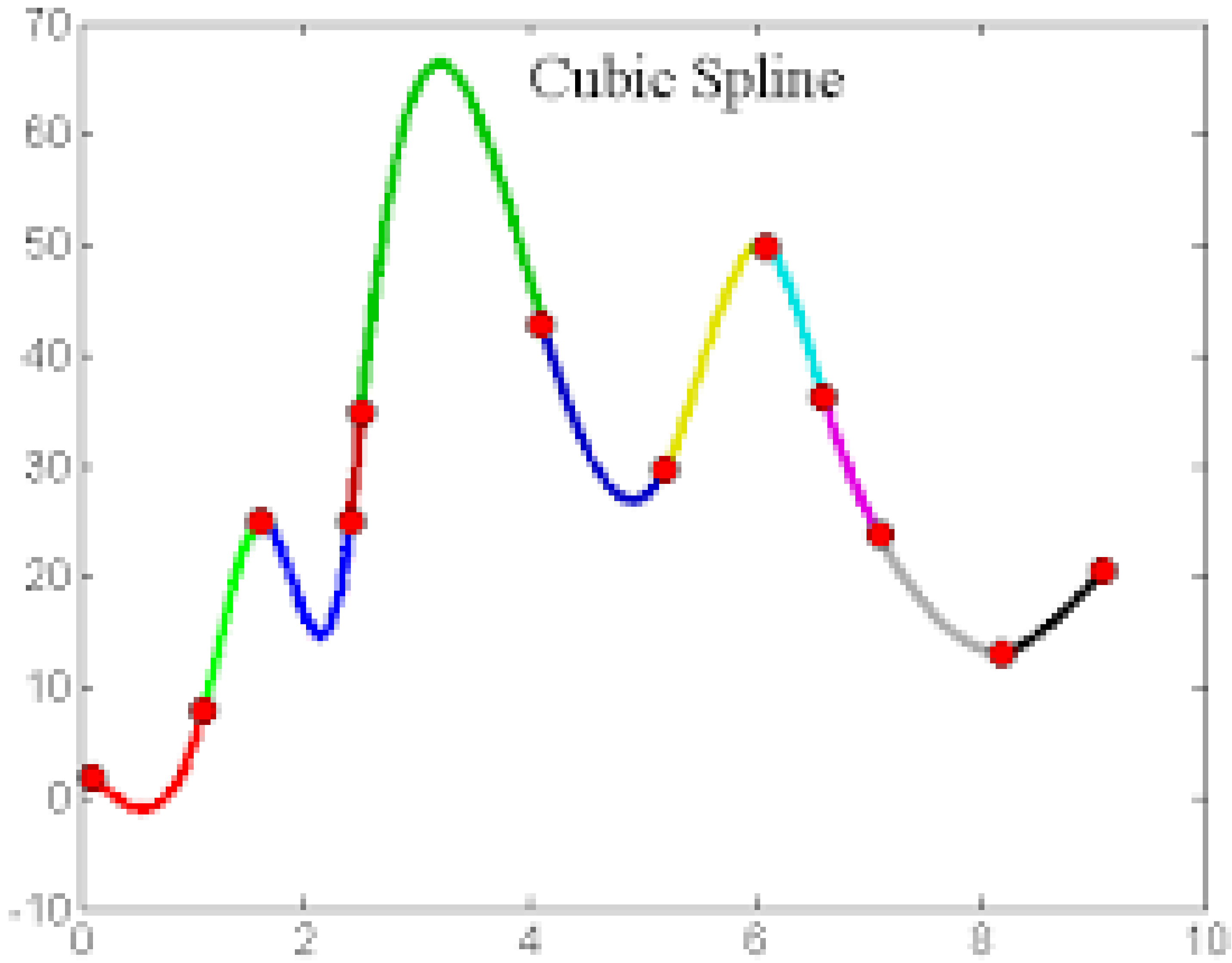
A ORIGEM DO TERMO - UMA CURIOSIDADE

- Mais especificamente a palavre Spline surgiu de um dialeto do leste da Inglaterra oriundo do século XX;
- O dialeto se chamava East Anglian e é considerado uma das bases do inglês moderno;
- A tradução do termo do dialeto original para o português seria “Uma curva de superfície”.



INTRODUÇÃO - SPLINES

- Atualmente, uma spline é uma função matemática que é usada para interpolar ou suavizar um conjunto de pontos de controle em um gráfico ou superfície;
- Essa função é composta por várias partes de curvas suaves que se juntam de forma contínua;
- Assim, mantém sua associação com a ideia de suavidade e flexibilidade, mas agora se refere a um conceito matemático fundamental em modelagem e interpolação de dados.

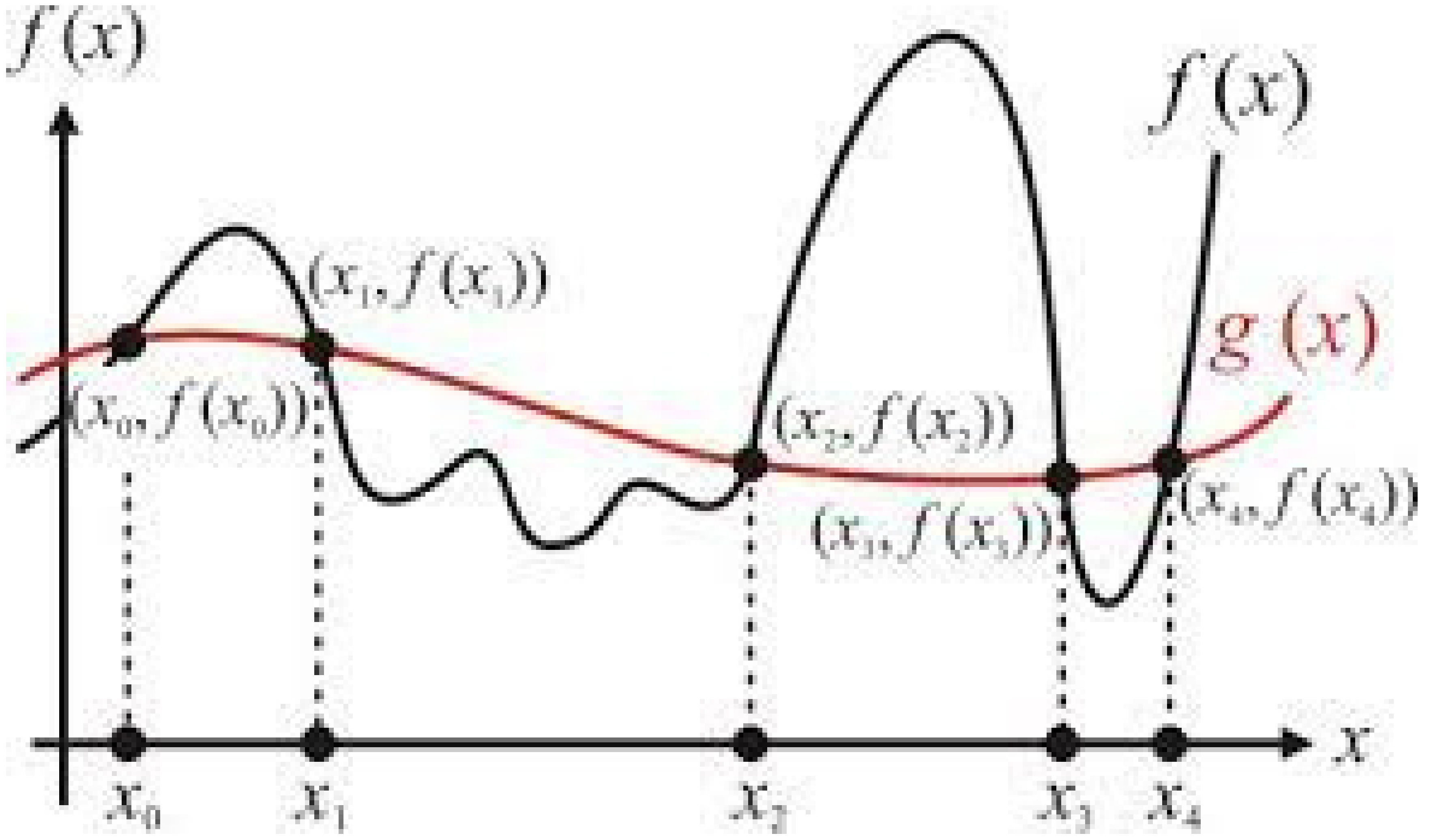


SPLINES

- **Interpolação** - se você tem um conjunto de pontos em um gráfico, ela permite calcular o valor de uma função nesses pontos específicos, mesmo que os valores não estejam diretamente fornecidos. Portanto, é uma aproximação de função.

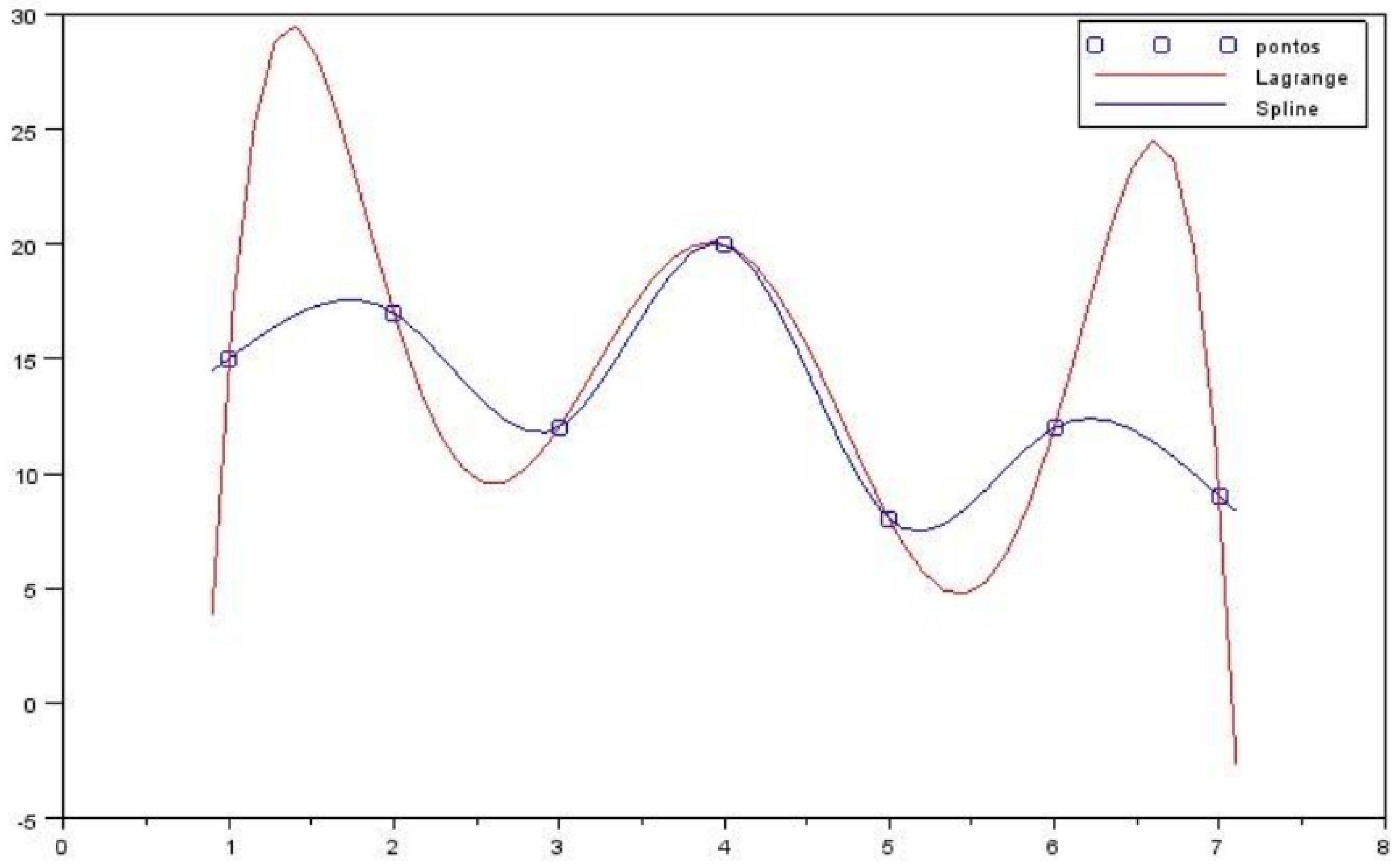
Técnicas de Interpolação Polinomial:

- Lagrange;
- Newton;
- Splines.



LAGRANGE X SPLINES

- **Overshoot** - é um fenômeno em sistemas dinâmicos que ocorre quando a saída do sistema ultrapassa momentaneamente o valor final desejado (ou o ponto de equilíbrio) antes de convergir para esse valor;
- O método de Lagrange oferece risco de oscilação quanto mais alto for o grau do polinômio;
- Splines são preferíveis em muitos casos porque produzem uma curva suave que mantém a continuidade de derivadas até uma determinada ordem.



SPLINE LINEAR

- No caso das splines lineares, cada segmento de curva é uma linha reta que conecta dois pontos consecutivos dos dados fornecidos.

$$f(x) = f(x_0) + m_0(x - x_0) \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_1$$

$$f(x) = f(x_1) + m_1(x - x_1) \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2$$

$$f(x) = f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}) \qquad x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n$$

$$m = \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

SPLINE LINEAR

- Ajuste os seguintes dados numa spline de primeira ordem. Avaliar a função x = 5:

$$m = \frac{2,5 - 1}{7 - 4,5} = 0,6$$

$$f(x) = f(4,5) + 0,6\,(x - 4,5),$$
$$4,5 \leqslant x \leqslant 7,0$$

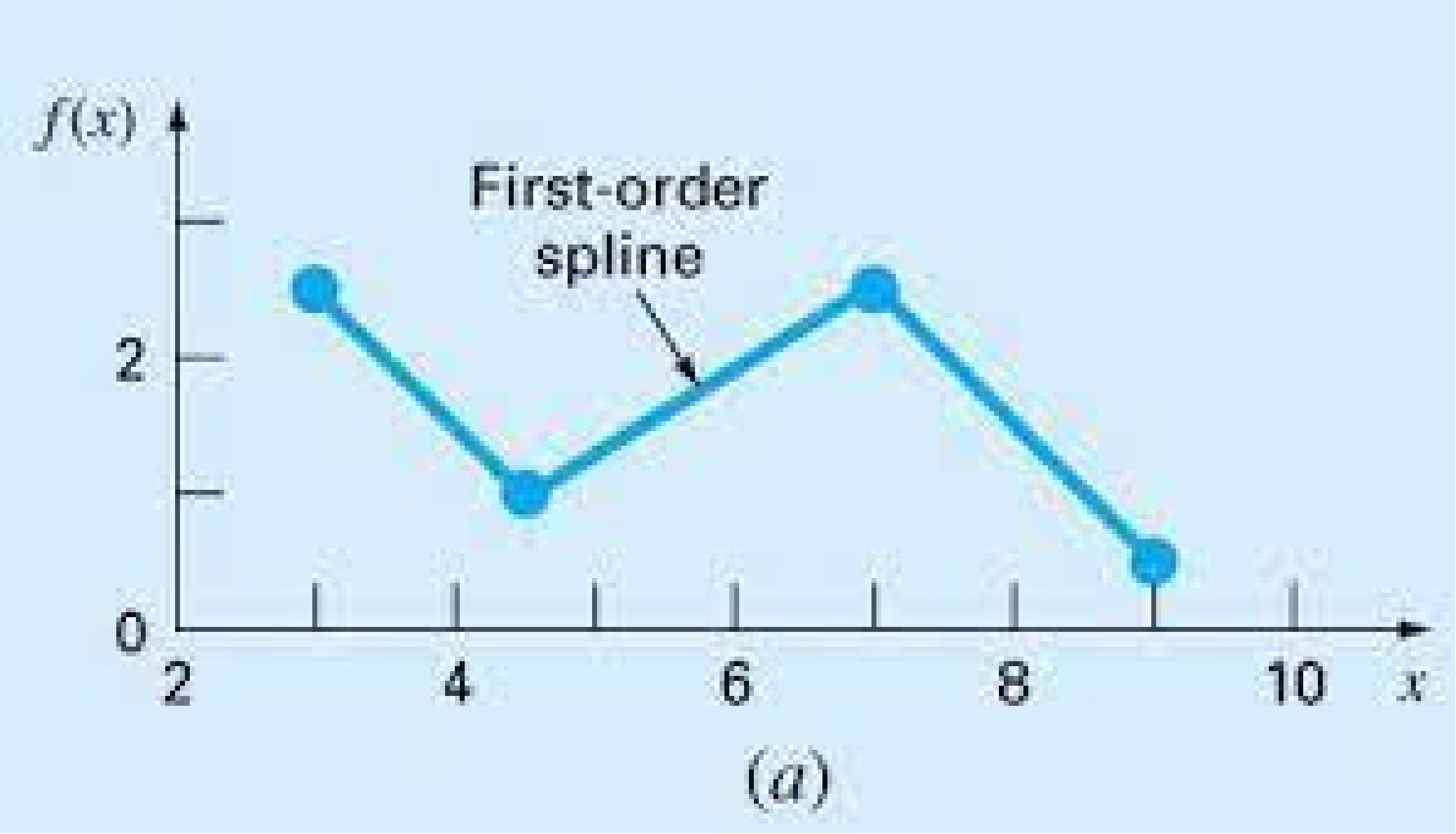
$$f(5) = f(4,5) + m\,(5 - 4,5) = 1,0 + (0,6 \times 0,5) = 1,3$$

X	f(x)
3,0	2,5
4,5	1,0
7,0	2,5
9,0	0,5

SPLINE LINEAR

“Desvantagens”:

- A principal é que no encontro de duas splines, chamado de nó, ocorre variações abruptas;
- Tem menos “flexibilidade” e podem não capturar adequadamente variações sutis nos dados;
- Não fornece uma estimativa precisa da derivada da função em cada ponto de interpolação. Isso pode ser crítico em aplicações onde a taxa de variação é importante.

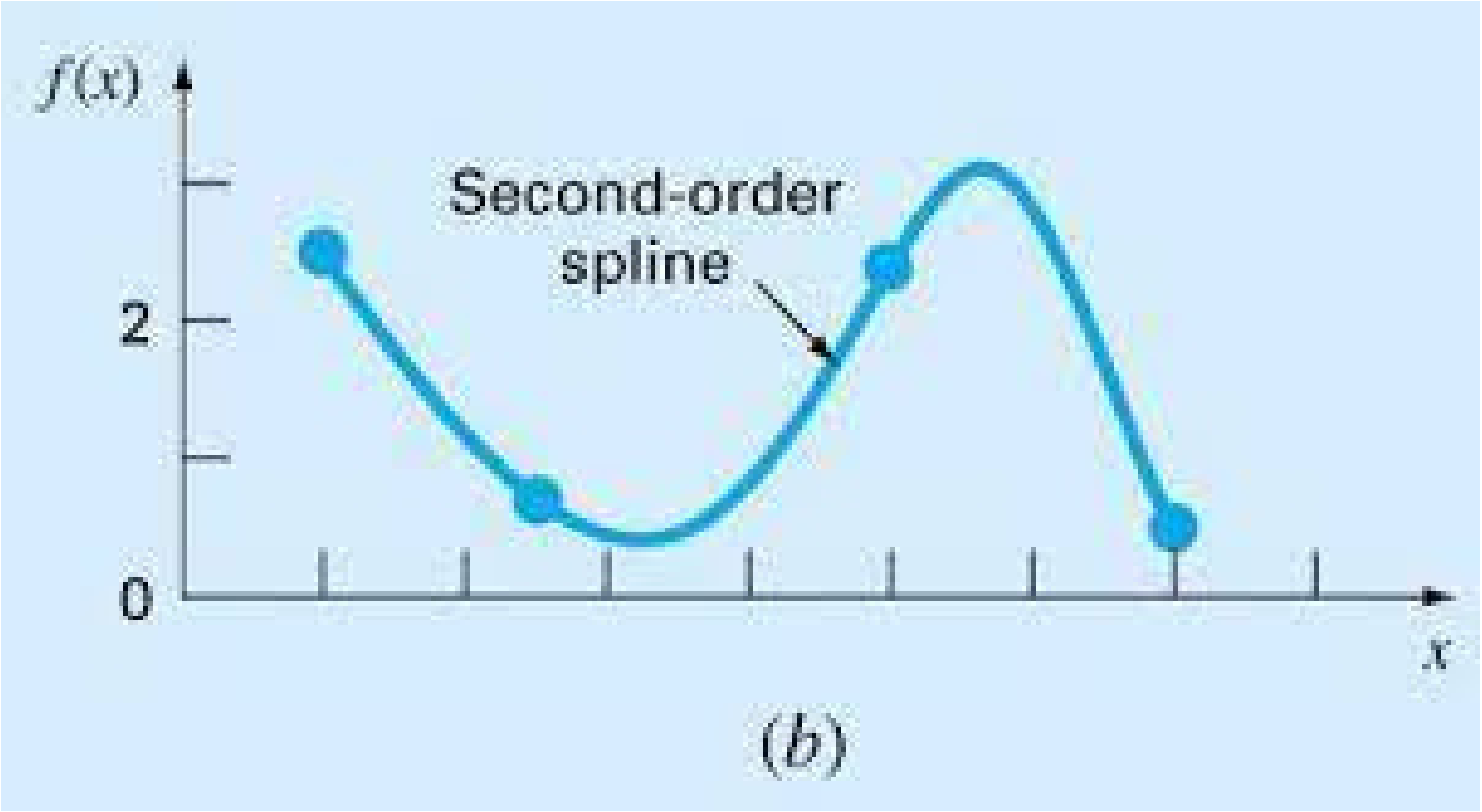


SPLINE QUADRÁTICA

- A ideia básica por trás das splines quadráticas é dividir o conjunto de dados em segmentos menores e, em cada segmento, ajustar uma função quadrática que passa pelos pontos extremos do segmento e também atende a certas condições de suavidade e continuidade.

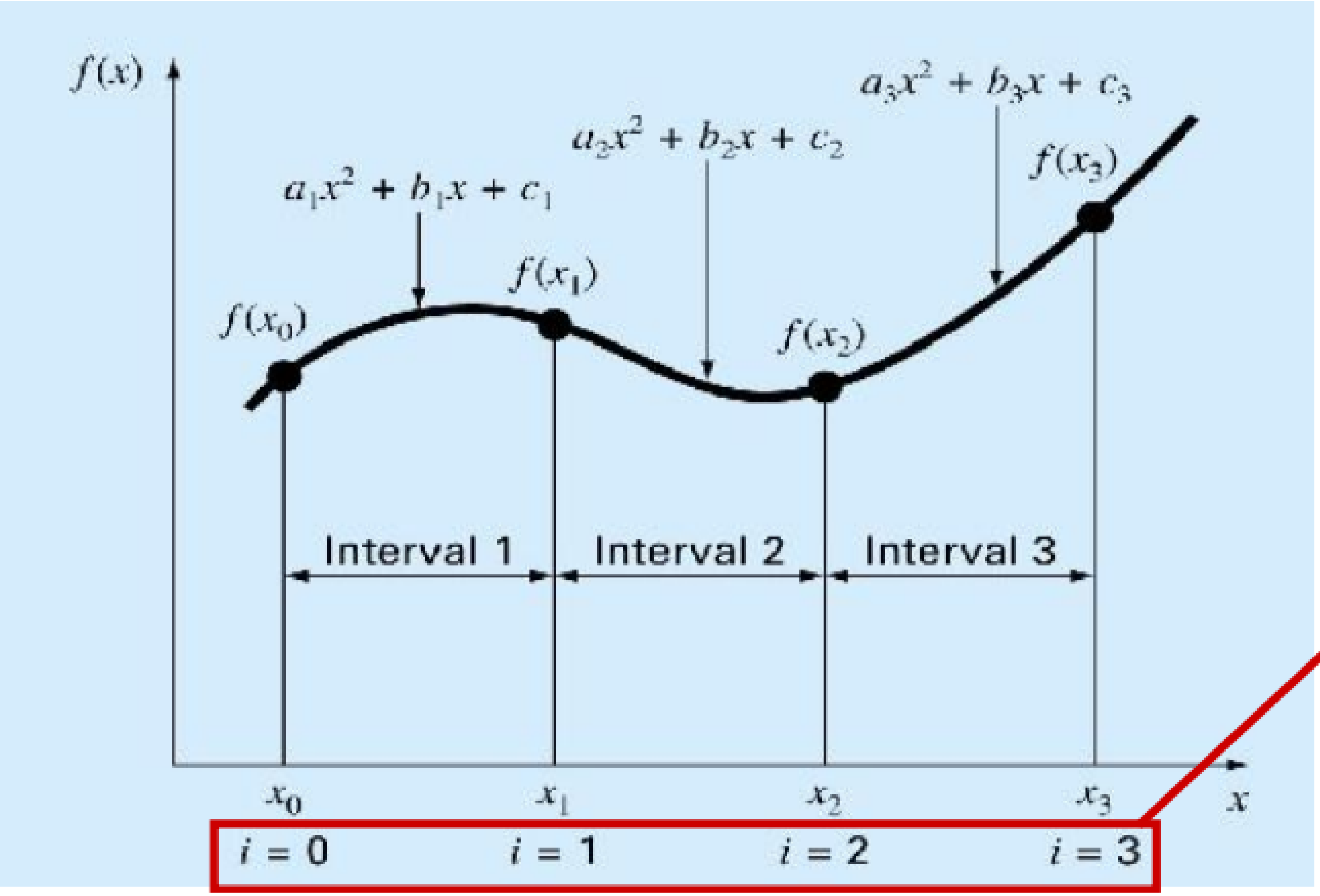
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Onde, a, b e c são coeficientes.



SPLINE QUADRÁTICA

- Nós interiores;
- Pontos finais/extremidades.



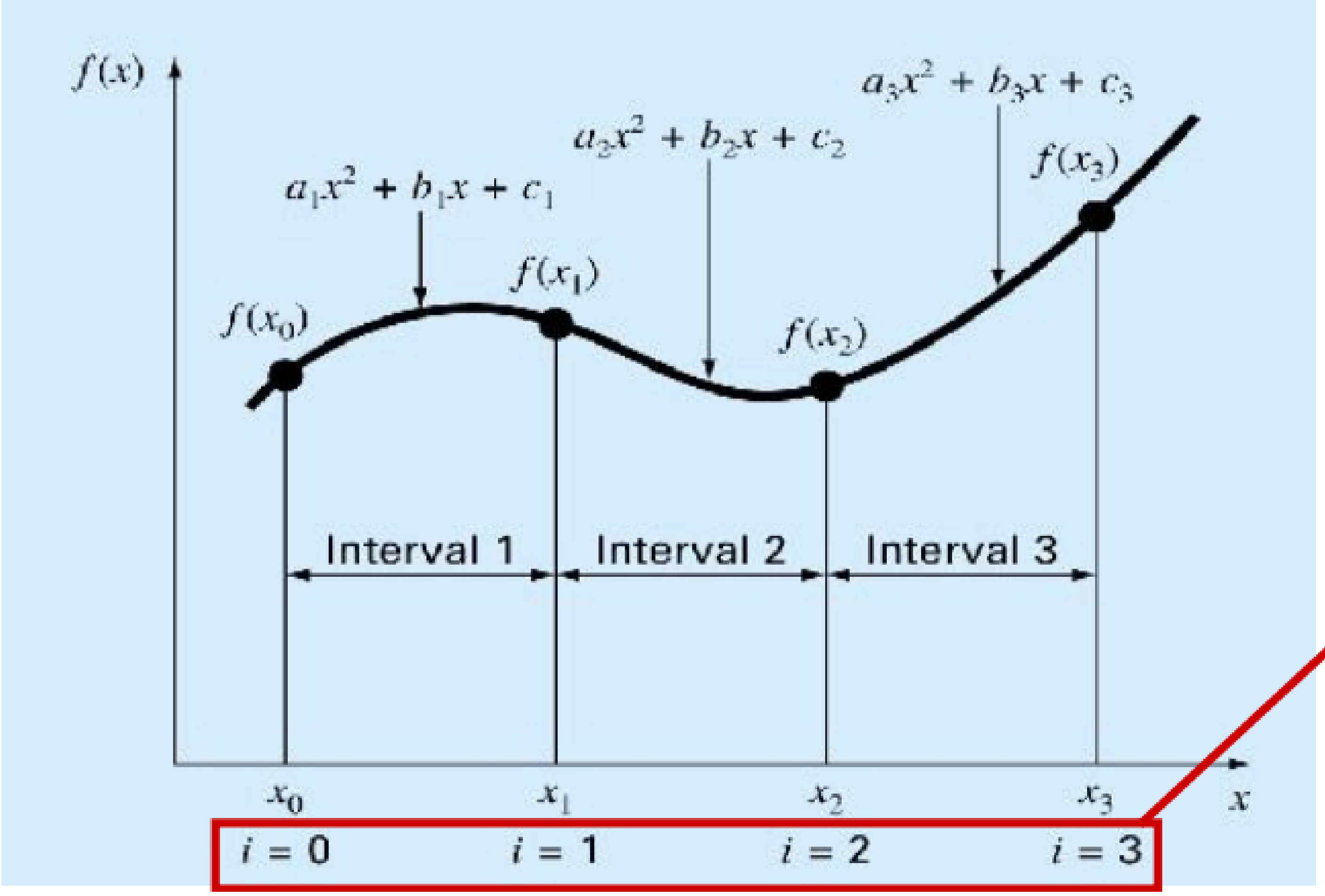
Para n+1 pontos dados:

- i $\in$ { 0, 1, 2, ...n},
- **n** intervalos,
- **3n** constantes desconhecidas (a's, b's, c's)

SPLINE QUADRÁTICA

Portanto, as condições necessárias para calcular as incógnitas. São elas:

- Os valores da função e dos polinômios adjacentes devem ser iguais nos nós interiores;
- As primeira e ultima funções devem passar pelos pontos extremos;
- As primeiras derivadas nos nós interiores devem ser iguais.



Para n+1 pontos dados:

- $i \in \{0, 1, 2, \ldots n\}$,
- **n** intervalos,
- **3n** constantes desconhecidas (a's, b's, c's)

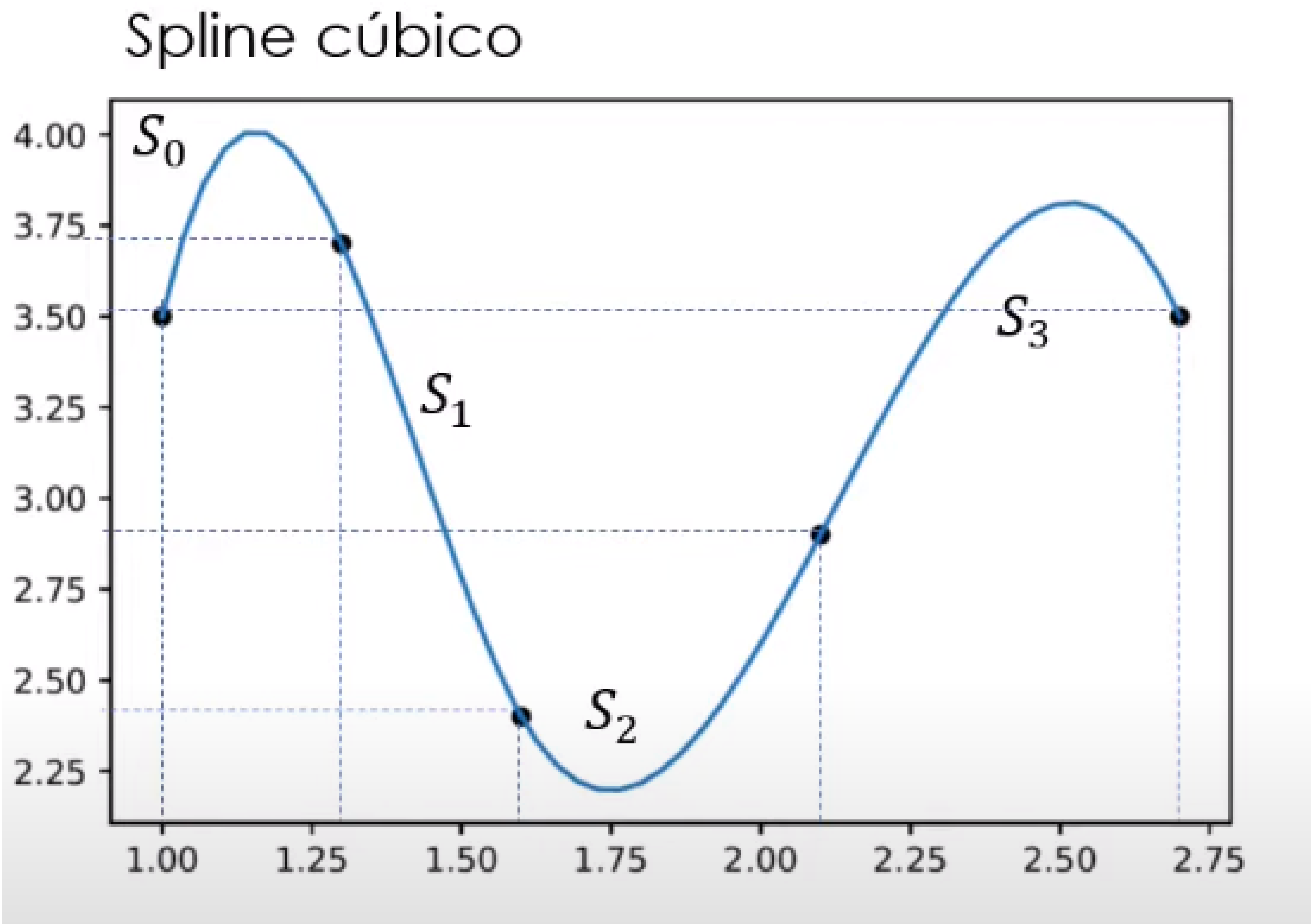
SPLINE CÚBICO

É um método no qual consiste a utilização de aproximações por polinômios seccionados de grau 3, na qual atende as condições de suavidade e continuidade.

Logo, tendo um P(x) de grau 3 determina-se 4 constantes.

$$S_j\,(x) = a_j + b_j x + c_j x^2 + d_j x^3$$

Onde a, b, c ,d são coeficientes.



CONCEITO

Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função e é dado um conjunto de nós, $a = x0 < x1 < \ldots < xn = b$, então a spline cúbica é uma função $S : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, no qual deve satisfazer:

1. $S(x)$ é polinômio cubico, indicado por $Sj\,(x)$ no intervalo de $[xj, xj+1]$, para cada $0 \leqslant j \leqslant n-1$;
2. $S(xj) = f(xj)$, para cada $0 \leqslant j \leqslant n$; sendo função interpoladora
3. $Sj+1\,(xj+1) = Sj\,(xj+1)$, para cada $0 \leqslant j \leqslant n-2$;
4. $S'j+1(xj+1) = S'j(xj+1)$, para cada $0 \leqslant j \leqslant n-2$;
5. $S''j+1(xj+1) = S''j(xj+1)$, para cada $0 \leqslant j \leqslant n-2$.

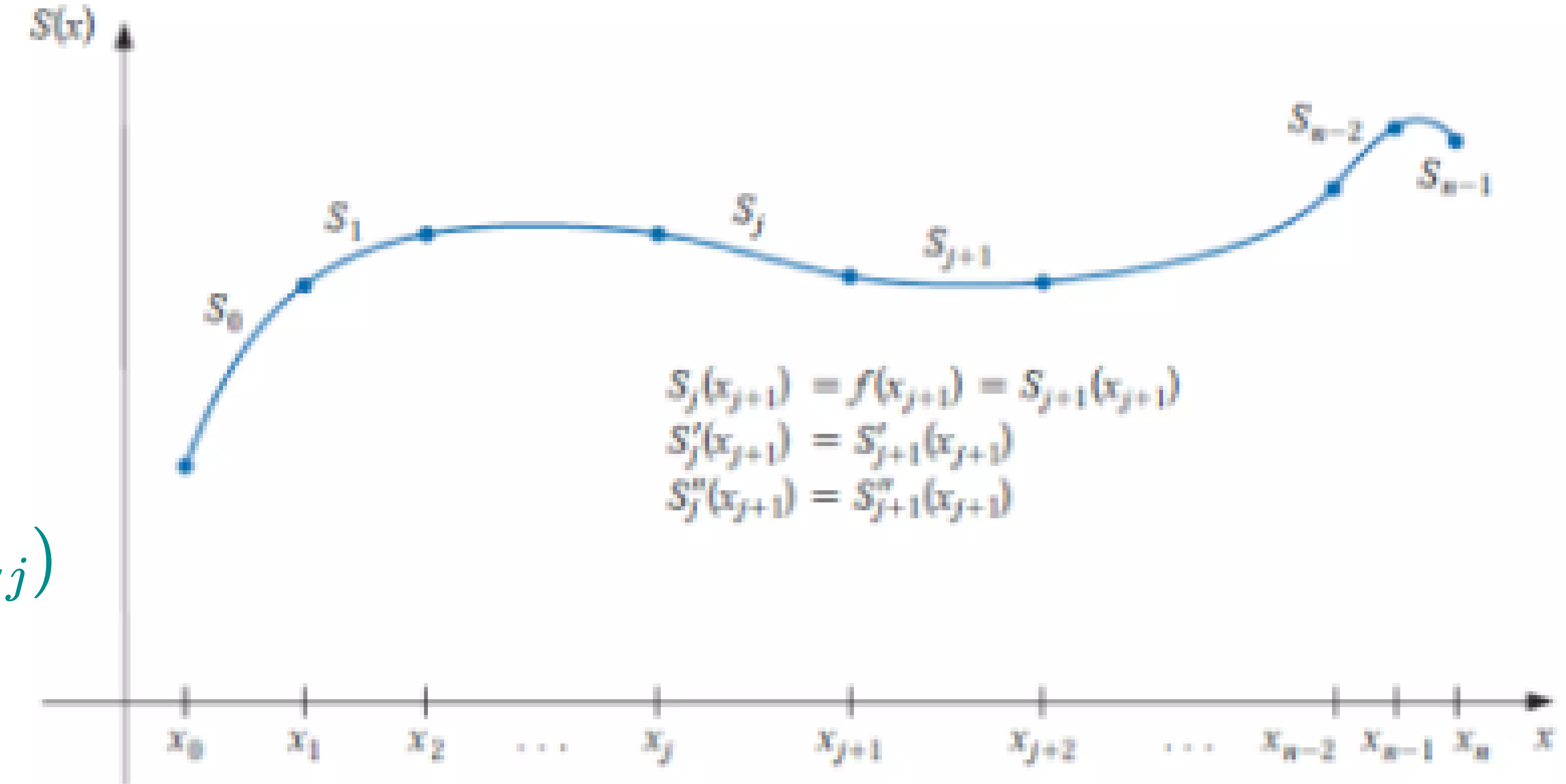
- Então, dado uma lista com n+1 pontos

$$[(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)]$$

- Pode-se construir polinômio s(x) formados por vários pedaços de polinômios de grau 3, possui o seguinte formato:

$$S_j\,(x) = a_j + b_j\,(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

- Com isso tem-se que 4n constantes desconhecidas (a_j, b_j, c_j, d_j)



- Tem-se também a definição do espaçamentos dos intervalor (h_j)

$$h_j = x_{j+1} - x_j$$

Para definir os coeficientes, sabendo que S(x) pode ser escrito como:

$$S_j\,(x) = a_j + b_j\,(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

Neste caso, para fazer $S_j\,(x_j) = y_j$,basta fazer $a_j = y_j$

$$S_j\,(x_j) = a_j + b_j\,(x_j - x_j) + c_j(x_j - x_j)^2 + d_j(x_j - x_j)^3$$

Assim tem-se:

$$S_j\,(x_j) = a_j$$

Então para que o gráfico do polinômio S(x) passe pelo ponto (x_j, y_j), tem-se que $a_j = y_j$

Com isso, encontra-se n incógnitas, faltando determinar 3n, correspondentes b, c, d.

Das propriedades tem-se que : $S_j\left(x_{j+1}\right) = S_{j+1}\left(x_{j+1}\right)$

$$s_j\left(x_{j+1}\right) = a_j + b_j\left(x_{j+1} - x_j\right) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3$$

$$s_{j+1}\left(x_{j+1}\right) = a_{j+1} + b_{j+1}\left(x_{j+1} - x_{j+1}\right) + c_{j+1}(x_{j+1} - x_{j+1})^2 + d_{j+1}(x_{j+1} - x_{j+1})^3$$

$$s_{j+1}\left(x_{j+1}\right) = a_{j+1}$$

Então:

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \,(1)$$

Fazendo com que: $S'_j\left(x_{j+1}\right)=S'_{j+1}\left(x_{j+1}\right)$

Derivando e calculando no ponto x_{j+1} :

$$s'_j\left(x_{j+1}\right)=b_j+2c_jh_j+3d_jh_j^2$$

$$s'_{j+1}\left(x_{j+1}\right)=b_{j+1}+2c_{j+1}(x_{j+1}-x_{j+1})+3d_{j+1}(x_{j+1}-x_{j+1})^2$$

$$s'_{j+1}\left(x_{j+1}\right)=b_{j+1}$$

Então:

$$b_{j+1}=b_j+2c_jh_j+3d_jh_j^2\ (2)$$

Fazendo com que: $S_j''(x_{j+1}) = S_{j+1}''(x_{j+1})$

Derivando e calculando no ponto x_{j+1} :

$$s_j''(x_{j+1}) = 2c_j + 6d_jh_j$$

$$s_{j+1}''(x_{j+1}) = 2c_{j+1} + 6d_{j+1}(x_{j+1} - x_{j+1})$$

$$s_{j+1}''(x_{j+1}) = 2c_{j+1}$$

Então:

$$2c_{j+1} = 2c_jh_j + 6d_jh_j$$

$$d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} (3)$$

Substituindo a equação (3) na equação (2), obtemos:

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3$$

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + (\frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j}) h_j^3$$

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + (\frac{c_{j+1} - c_j}{3}) h_j^2$$

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + h_j^2 (\frac{3c_{j+} c_{j+1} - c_j}{3}) = a_j + b_j h_j + h_j^2 (\frac{2c_j + c_{j+1}}{3})$$

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h^2{}_j}{3} (2c_j + c_{j+1})$$

Isolando b_j obtemos:

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) \; (4)$$

Substituindo a equação (3) na equação (1), obtemos:

$$b_{j+1} = b_j + 2c_jh_j + 3d_jh_j^2$$

$$b_{j+1} = b_j + 2c_jh_j + 3(\frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j})h^2{}_j$$

$$b_{j+1} = b_j + 2c_jh_j + h_j(c_{j+1} - c_j)$$

$$b_{j+1} = b_j + h_j(c_{j+1} + c_j)\ (5)$$

As equações que estão sendo descritas são validas para j=1,2,...,n-2, pois quando substitui j=n-2, obtemos:

$$b_{(n-2)+1} = b_{n-1}$$

Sendo o coeficiente b_{n-1} correspondente ao ultimo polinômio S_{n-1}

Trocando j por j-1 então:

j= 1, 2, 3,..., n-1

Com isso, substituindo nas equações (4) e (5) obtemos:

$$b_j = b_{j-1} + h_{j-1}(c_j + c_{j-1}) \ (6)$$

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j) \ (7)$$

Substituindo as equações (4) e (7) na equação (6), obtemos:

$$\frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j) + h_{j-1}(c_j + c_{j-1})$$

Que é o mesmo que

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2c_j\,(h_{j-1} - h_j) + h_jc_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1})$$

Da equação anterior, apenas não se conhece os coeficientes c'

Logo, possuimos:

- n+1 incógnitas
- n-1 equações (j = 1, 2, 3, ..., n-1)

Com isso é preciso definir mais 2 equações para que seja possível montar um sistema linear, sendo essas duas condições adicionais, o spline é chamado de spline cúbico naturais.

SPLINE CÚBICA NATURAL

- Consiste em duas condições para que se possa determinar as variáveis faltantes. Para que seja possível montar o sistema linear.

Sendo elas:

$$s''_0\left(x_0\right) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$$
$$s''_{n-1}\left(x_n\right) = 0 \Rightarrow c_n := 0$$

OBS: pode-se utilizar condições diferentes, com isso deixa de ser uma spline cúbica natural.

Com isso sendo, $c_0 = 0, c_n = 0$ podemos escrever os sistema em forma matricial:

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2-a_1)-\frac{3}{h_0}(a_1-a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n-a_{n-1})-\frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1}-a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

PASSO A PASSO

1. os a's são dados por:

$$a_j = y_j, j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

2. os h's são dados por:

$$h_j = x_{j+1} - x_j, j = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

3. os c's são encontrados ao resolver o sistema anterior;

4. os b's são dados por :

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1})$$

5. os d's são dados por :

$$d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j}$$

EXEMPLO

1. Encontre o spline cúbico da seguinte lista

x	1	2	4	5
$f(x)$	1	4	2	3

Resolução:

$$j = 4 - 1 = 3$$

- Com, isso tem-se que haverá 3 intervalos, com seus respectivas funções de spline cúbicas:

$$S_0(x), S_1(x) e S_2(x)$$

- Logo, como cada S(x) possui 4 incógnitas, tem-se que haverá um total de 12 incógnitas, o que resultaria em um sistema 12x12, porém segundo apresentado esse sistema pode ser reduzido a um sistema 4x4, no qual será determinado os valores das incognitas c's.

lembrando que os polinômios da spline serão do tipo:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

sendo j = 0, 1, 2.

- Portanto, pode-se determinar os a's já que os mesmos serão iguais a y(x):

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 4$$
$$a_2 = 2$$
$$a_3 = 3$$

- Lembrando que o a_3 não corresponde a nenhum coeficiente de nenhum polinômio que compõe o spline, usado apenas para calcular c's.

- Determinando os valores das distâncias (h's):

$$h_0 = x_1 - x_0 = 2 - 1 = 1$$

$$h_1 = x_2 - x_1 = 4 - 2 = 2$$
$$h_2 = x_3 - x_2 = 5 - 4 = 1$$

- Montando o sistema para encontrar os c's:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2\left(h_0 + h_1\right) & h_1 & 0 \\ 0 & h_1 & 2\left(h_1 + h_2\right) & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}\left(a_2 - a_1\right) - \frac{3}{h_0}\left(a_1 - a_0\right) \\ \frac{3}{h_2}\left(a_3 - a_2\right) - \frac{3}{h_1}\left(a_2 - a_1\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da matriz tem-se que:

$$c_0 = 0, c_3 = 0$$

Com isso pode-se determinar os demais coeficientes:

$$\begin{aligned} 6c_1 + 2c_2 &= -12 \\ 2c_1 + 6c_2 &= 6 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 6c_1 + 2c_2 &= -12 \\ -6c_1 - 18c_2 &= -18 \end{aligned} \Rightarrow -16c_2 = -30 \Rightarrow c_2 = \frac{-30}{-16} = \frac{15}{8}$$

Substituindo o valor de $c_2 = \frac{15}{8}$ em qualquer uma das equações obtemos

$$6c_1 + 2\frac{15}{8} = -12 \Rightarrow 6c_1 = -12 - \frac{30}{8} = \frac{-126}{8} \Rightarrow c_1 = \frac{-126}{8 \times 6} = \frac{-126}{48} = \frac{-21}{8}$$

- Sabendo os valores de a's, h's e c's, podemos determinar b's:

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1})$$

$$b_0 = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1) = \frac{1}{1}(4-1) - \frac{1}{3}\left(2 \times 0 + \frac{-21}{8}\right) = 3,875$$

Analogamente para os demais

$$b_1 = 1,25$$
$$b_2 = -0,25$$

- Agora podemos determinar os valores d's:

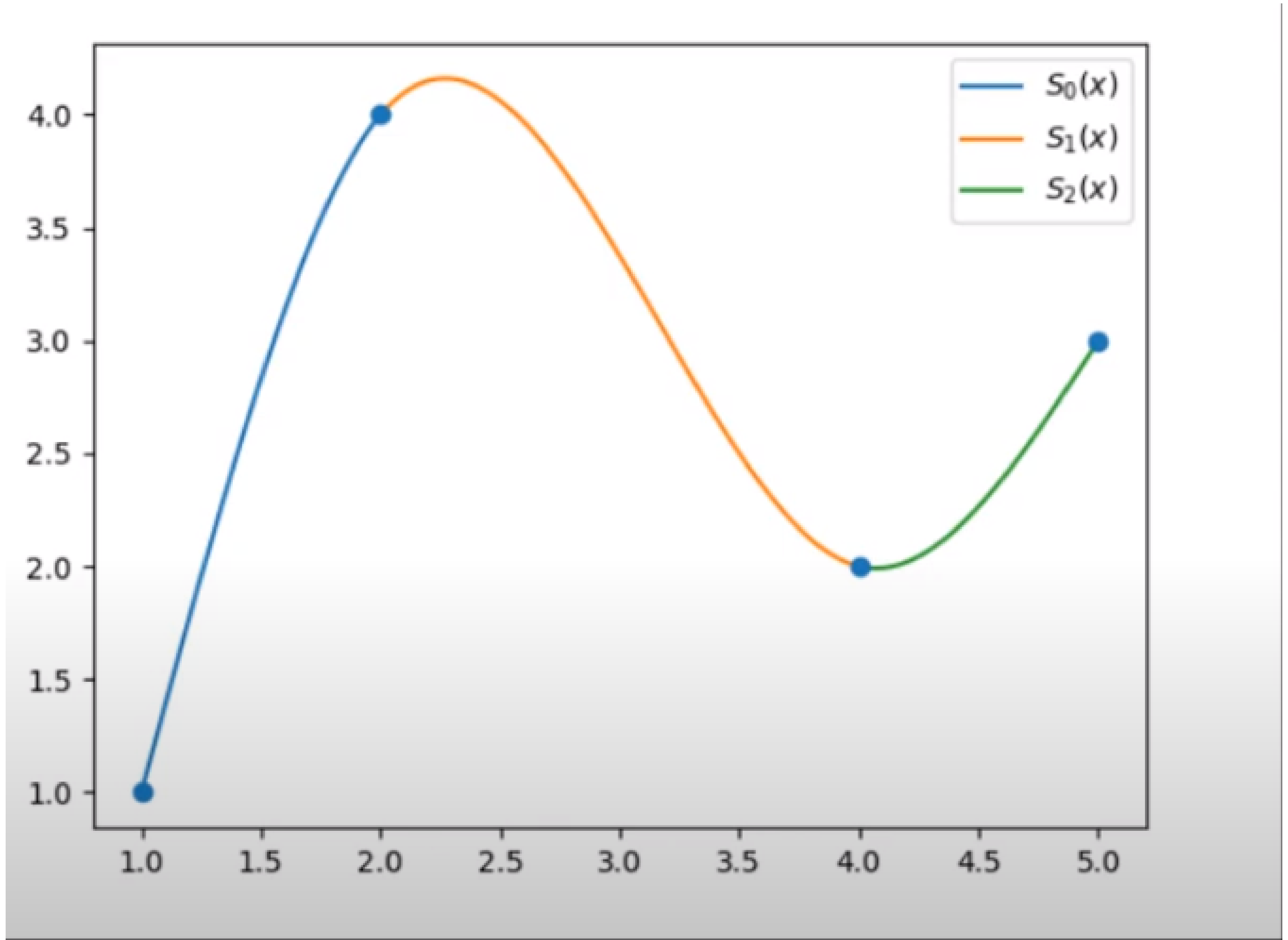
$$d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3h_0} = \frac{\frac{-21}{8}}{3} = \frac{-21}{24} = -0,875$$

Analogamente para os demais

$$d_1 = 0,75$$
$$d_2 = -0,625$$

- Por fim, pode-se determinar as funções para cada intervalo

$$S(x)\begin{cases} S_0(x) = 1 + 3,875\,(x-1) + 0(x-1)^2 - 0,875(x-1)^3 \\ S_1(x) = 4 + 1,25\,(x-2) - 2,625(x-2)^2 + 0,75(x-2)^3 \\ S_2(x) = 2 - 0,25\,(x-4) + 1,875(4)^2 - 0,625(x-4)^3 \end{cases}$$



UTILIZAÇÕES PRÁTICAS NA ENGENHARIA

Engenharia Ambiental

Verificar a eficiência de uma espécie específica de baratas na decomposição de resíduos orgânicos.

Engenharia Civil

Análise dinâmica de estruturas de barra.

Engenharia da Computação

Modelagem de sólidos tridimensionais

UTILIZAÇÕES PRÁTICAS NA ENGENHARIA

Engenharia de Materiais

Modelo para verificar o melhor funcionamento de rotores de usinas termoelétricas, visando o desgaste dos materiais.

Engenharia Mecânica

Estudo da cinemática de componentes de motores automotivos e máquinas modernas.

Engenharia da Mecatrônica

Planejamento da trejtória de rôbos.

UTILIZAÇÕES PRÁTICAS NA ENGENHARIA

Engenharia Naval

Otimização de formas de casco de deslocamento em relação a sua resistência ao avanço.

Engenharia Nuclear

Desenvolvimento de Sistema de aquisição e Análise de dados para aplicações de traçadores radioativos em unidades industriais.

Engenharia de Petróleo

Estudo de perfilagem de Poços Petrolíferos.

UTILIZAÇÕES PRÁTICAS NA ENGENHARIA

Engenharia Produção

Gerenciamento de produção de frangos de corte

Engenharia Química

Determinação da tensão de cisalhamento entre diferentes pontos do sangue humano.

Engenharia Aeroespacial

Análise do fluxo de massa e energia dentro da pós-câmera de combustão em um foguete de motor híbrido.

UTILIZAÇÕES PRÁTICAS NA ENGENHARIA

Engenharia Elétrica - Energia

Comparação de modelos de curva de magnetização.

Engenharia Elétrica - Eletrônica

Sistema de rastreamento visual por sequência de imagens

Engenharia Elétrica - Telecomunicações

Comunicação submarina.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Utilizando os dados abaixo, ajuste um spline quadrático e use os resultados para fazer uma estimativa do valor em x = 5

X	3	4,5	7	9
F(X)	2,5	1	2,5	0,5

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1 - Como podemos observar na tabela temos 3 intervalos (n), logo 3 * 3 = 9 é o número de incógnitas que devemos encontrar.

2 - Como nos foi apresentado na sessão de splines quadráticas da apresentação: Os valores da função e dos polinômios adjacentes devem ser iguais nos nós inferiores, resultando em 2n-2 = 4 condições (sendo n o número de intervalos, como esclarecido acima). Como os valores devem ser iguais temos 2 condições para i = 2 e 2 condições para i = 3.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

3 - Assim obtemos as seguintes equações:

$$a_1{x_1}^2 + b_1x_1 + c_1 = f\left(x_1\right)$$

$$a_2{x_2}^2 + b_2x_2 + c_2 = f\left(x_2\right)$$

$$a_2{x_1}^2 + b_2x_1 + c_2 = f\left(x_1\right)$$

$$a_3{x_2}^2 + b_3x_2 + c_3 = f\left(x_2\right)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

4 - Como a primeira e a última função passam pelo resultado inicial e final, temos mais duas condições:

$$a_1 {x_0}^2 + b_1 x_0 + c_1 = f\left(x_0\right)$$

$$a_3 {x_3}^2 + b_3 x_3 + c_3 = f\left(x_3\right)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

5 - A continuidade das derivadas cria mais n-1 equações. Estas equações são dadas pela abaixo.

$$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_i x_{i-1} + b_i$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

6 - Considerando que o i referenciado na equação do slide anterior é igual a 2 e 3, temos:

$$2a_1x_1 + b_1 = 2a_2x_1 + b_2$$

$$2a_2x_2 + b_2 = 2a_3x_2 + b_3$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

7 - Assim para completarmos nosso sistema ficamos em falta somente do A1 que pode ser fornecido pela equação abaixo. (obs: o f’ simboliza a equação de segunda ordem.

$$(x_i - x_{i-1})\, f^{'}\,(x_{i-1}) + 2\,(x_{i+1} - x_{i-1}) f'\,(x_i) + (x_{i+1} - x_i) f'\,(x_{i+1})$$

$$=$$

$$\frac{6}{x_{i+1} - x_i}[f\,(x_{i+1}) - f\,(x_i)] + \frac{6}{x_i - x_{i-1}}[f\,(x_{i-1}) - f\,(x_i)]$$

8 - A equação do slide anterior retorna que a1 = 0. Assim, temos nosso sistema de equações, substituindo os valores:

$$4,5b_{1+}c_1 = 1$$
$$20,25a_2 + 4,5b_2 + c_2 = 1$$
$$49a_2 + 7b_2 + c_2 = 2,5$$
$$49a_3 + 7b_3 + c_3 = 2,5$$
$$3b_1 + c_1 = 2,5$$
$$81a_3 + 9b_3 + c_3 = 0,5$$
$$b_1 - 9a_2 - b_2 = 0$$
$$14a_2 + b_2 - 14a_3 - b_3 = 0$$

9 - O sistema do slide anterior em forma de matriz

EXERCÍCIO RESOLVIDO

$$
\begin{bmatrix}
0 & 4,5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 20,25 & 4,5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 49 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 7 & 1 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 9 & 1 \\
1 & 0 & -9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 14 & 1 & 0 & -14 & -1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2,5 \\ 2,5 \\ 2,5 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

10 - A matriz pode ser resolvida pelo método de Gauss, mas por ser muito extensa foi utilizado o aplicativo VCN. Chegando ao seguinte resultado.

$$a_1 = 0 \qquad b_1 = -1 \qquad c_1 = 5,5$$

$$a_2 = 0,64 \qquad b_2 = -6,76 \qquad c_2 = 18,46$$

$$a_3 = -1,6 \qquad b_3 = 24,6 \qquad c_3 = -91,3$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

11 - Substituindo este valores na equação abaixo com i variando de 1 a 3, chegaremos no Spline Quadrado de fato.

$$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_1$$

$$x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

12 - Assim chegamos que o Spline Quadrático é de fato:

$$f_1(x) = -x + 5,5 \qquad 3 \leqslant x \leqslant 4,5$$

$$f_2(x) = 0,64x^2 - 6,76x + 18,46 \qquad 4,5 \leqslant x \leqslant 7,0$$

$$f_3(x) = -1,6x^2 + 24,6x - 91,3 \qquad 7,0 \leqslant x \leqslant 9,0$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

13 - Por fim, como 5 está entre 4,5 e 7,0. Utilizaremos f2 para descobrir f(5)

$$f(5) = f_2(5) = 0,64 \times 5^2 - 6,76 \times 5 + 18,46 = 0,66$$

EXERCÍCIO PARA CASA

Encontre **uma** aproximação para f(0,75) por **Spline Cúbica** natural da tabela abaixo:

X	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	3,4422	2,2302	-0,8228	-4,6133	-9,0841

PAPERS DE ENGENHARIA

- Artigos de cada engenharia
    - Ambiental: file:///C:/Users/Artur/Downloads/admin,+art.+213.+BJD.pdf
    - Civil: https://riut.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/14435/2/PB_DACOC_2013_1_05.pdf
    - Computação: https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/45330
    - Materiais: https://pantheon.ufrj.br/handle/11422/7286
    - Mecânica: https://www.prp.unicamp.br/pibic/congressos/xxicongresso/resumos/092465.pdf
    - Mecatrônica: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/242894?show=full
    - Naval: https://teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3135/tde-31032008-171045/pt-br.php
    - Nuclear: https://www.ipen.br/biblioteca/cd/inac/1997/ENAN/E06_106.PDF
    - Petróleo: https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/29609/29609.PDF
    - Produção: https://www.scielo.br/j/rbeaa/a/pcKw8LC7wySFRpt75hjBbBr/abstract/?lang=pt
    - Química: https://www.even3.com.br/anais/wendeq/487684-utilizacao-dos-metodos-de-langrange-e-splines-cubicos-na-determinacao-da-tensao-de-cisalhamento-em-pontos-de-tran/
    - Aeroespacial: https://fga.unb.br/articles/0001/4502/TCC_Paulo_Gabriel.pdf
    - Energia: https://www.researchgate.net/profile/Bruno-Rodrigues-Filho/publication/286456952_Influence_of_Magnetization_Curve_Modeling_in_the_Non-Linear_Magnetostatic_Finite_Element_Analysis_in_2D/links/566e9f0808ae62b05f0b57ca/Influence-of-Magnetization-Curve-Modeling-in-the-Non-Linear-Magnetostatic-Finite-Element-Analysis-in-2D.pd
    - Telecomunicações: https://www.researchgate.net/profile/Jefferson-Osowsky/publication/315725739_Primeira_Versao_de_um_Modem_Acustico_Submarino_Definido_por_Software_da_Marinha_do_Brasil/links/5f26ee85a6fdcccc43a6038b/Primeira-Versao-de-um-Modem-Acustico-Submarino-Definido-por-Software-da-Marinha-do-Brasil.pdf
    - Eletrônica: http://editora.universidadedevassouras.edu.br/index.php/TECCEN/article/view/231

REFERÊNCIAS

- Schemmer, R., 2013. **Métodos de Interpolação Polinomial**. Monografia de Especialização, UTFPR;
- http://www2.ic.uff.br/~aconci/splineatual.html#:~:text=Splines%2C%20usadas%20em%20desenhos%20de,a%20formula%C3%A7%C3%A3o%20matem%C3%A1tica%20deste%20problema;
- https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/2015/MS211/Aula22.pdf;
- https://www.ime.usp.br/mat/2458/textos/splines.pdf
- https://www.cin.ufpe.br/~jacn/Cubic%20Spline%20Interpolation.pdf