L02 Física Matemática 02

Q1 Considere um espaço vetorial normado $(W, || \ \ ||)$. Podemos construir um novo espaço vetorial V a partir de W, cujo elementos são matrizes coluna

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

onde $v_1, v_2 \in W$. A estrutura linear é definida por

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{bmatrix}.$$

Verifique que

$$||v||_V = (||v_1||^2 + ||v_2||^2)^{\frac{1}{2}}$$

é uma norma em V e, portanto, $(V, || \ \ ||_V)$ é um espaço vetorial normado.

Q2 Considere o espaço vetorial V do exercício Q1. Mostre que se W é um espaço de Banach, então V também é um espaço de Banach.

Q3 Ainda sobre a construção do exercício Q1, vamos tomar $W = L^2([0, 2\pi], dx)$, o espaço de Hilbert das funções $h : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ com produto interno

$$< h, s >= \int_0^{2\pi} \overline{s(x)} h(x) dx.$$

Mostre que a norma de V provem do produto interno

$$< f, g >= \int_0^{2\pi} g(x)^\dagger f(x) dx,$$

onde $g(x)^\dagger$ denota a matriz hermitiana de $g(x)$. Portanto, V é um espaço de Hilbert, o qual denotaremos por $\mathcal{H}$.

Q4 Podemos definir um operador $\hat{p} : D \to \mathcal{H}$ em um domínio $D \subset \mathcal{H}$ por

$$\hat{p}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\frac{df_1}{dx} \\ \\ -i\frac{df_2}{dx} \end{bmatrix}.$$

Considere o subespaço D constituído de vetores

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

com f_1, f_2 diferenciáveis e satisfazendo a condição de contorno

$$f(2\pi) = Mf(0),$$

onde M é uma matriz 2×2 com entradas em $\mathbb{C}$.

(a) Verifique que D é um subespaço vetorial.

(b) Determine a condição sobre M para que $\hat{p}$ seja um operador (formalmente) auto-adjunto, ou seja,

$$< \hat{p}f, g >=< f, \hat{p}g > .$$

(c) Para o caso especial

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

determine o espectro de $\hat{p}$.

(d) Para o caso especial

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

determine o espectro de $\hat{p}$. Sugestão: Seja

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$$

uma autofunção. Pode ser útil verificar que as C.C. implicam que $|f_1(x)| = |f_2(x)|$.

Q5. Considere o espaço vetorial V das funções $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciáveis e que satisfazem as seguintes condições de contorno:

$$\alpha_1 f(a) + \alpha_2 f'(a) = 0,$$

$$\beta_1 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0,$$

onde $f'(x)$ denota a derivada $\frac{df(x)}{dx}$ e $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ são constantes reais. Desta forma o espaço vetorial V depende destas constantes e poderia ser denotado por $V(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$. Vamos assumir que no mínimo um dos α e um dos β é não nulo.

Podemos definir em $V(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ o produto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)x.$$

Considere o operador linear

$$L = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)$$

atuando em V como

$$(Lf)(x) = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{df(x)}{dx}\right) + q(x)f(x).$$

Assumiremos que $p(x) > 0$ e diferenciável no intervalo $[a,b]$.

(a) Verifique que $V = V(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ é de fato um espaço vetorial.

(b) Mostre que o operador L é formalmente auto-adjunto, ou seja,

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle .$$

Q6 No contexto da questão anterior, considere a equação

$$(Lf)(x) = \lambda \rho(x) f(x) \tag{1}$$

onde $\rho(x) > 0$ no intervalo $[a, b]$, $f \in V(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

(a) E equação (1) reproduz muitas equações que são importantes na física. Escolha as funções $p(x)$, $q(x)$ e $\rho(x)$ de forma a reproduzir as equações de Helmholtz, Legendre e Bessel.

(b) A equação (1) define o chamado problema de Sturm-Liouville. Dados os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ e as funções $p(x)$, $q(x)$ e $\rho(x)$, o problema de Sturm-Liouville consiste em determinar pares $(\lambda, f_\lambda(x))$ que satisfazem (1). Note que (1) é análogo a um problema de autovalores. As funções $f_\lambda(x)$ são chamadas de autofunções e os correspondentes λ são chamados de autovalores.

Vamos definir o seguinte produto escalar em V

$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_a^b f(x) g(x) \rho(x) dx.$$

Mostre que duas autofunções f_{λ_1} e f_{λ_2} satisfazem

$$\langle f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2} \rangle_\rho = 0$$

se $\lambda_1 \neq \lambda_2$.