

MAT-315 - Introdução à Análise (Real) - 2023

5ª Lista de exercícios

Funções Contínuas

1. Mostre pela definição que as funções $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = \frac{x}{2} + 1$ são contínuas em seus respectivos domínios.

2. Mostre pela definição que a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x \leq 0 \\ x + 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

é contínua em $a = 0$.

3. Mostre pela definição que a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x \leq 0 \\ x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

não é contínua em $a = 0$.

4. Mostre que não existe $c \in \mathbb{R}$ que torne função

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ c, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

contínua. Use *seqüências convenientes*

5. Mostre que a função *característica dos racionais* definida por

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é descontínua em todos os pontos da reta. Use que todo intervalo (não-degenerado) contém números racionais e irracionais

6. Dê exemplo de uma função f que seja descontínua em todos os pontos da reta mas que a função $|f|$ seja contínua em todos os pontos da reta.

7. Mostre que a função $x \in \mathbb{R} \mapsto x \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ é contínua apenas em $x = 0$.

8. Prove que se uma função contínua se anula em \mathbb{Q} então se anula na reta real inteira.

9. Mostre que a equação $x^5 + x + 1 = 0$ admite uma raiz negativa. Localize tal raiz em um intervalo de comprimento 0,25. Aproxime-a com erro inferior a 0,125

10. Prove que a equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ admite três raízes reais distintas. Localize cada uma delas em intervalos de comprimento 1.