Observações

Notação para triângulos congruentes

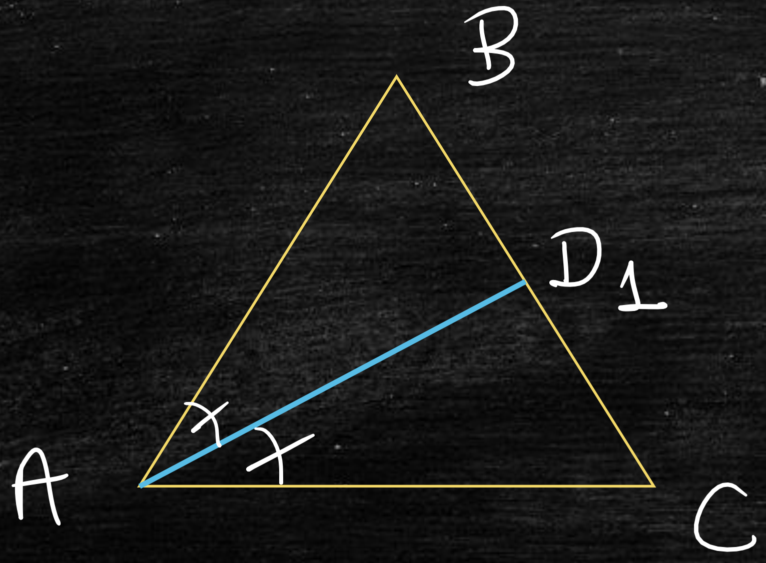
$$ABC \equiv A'B'C'$$

A **mediatriz** de um segmento é a reta que passa pelo ponto médio deste segmento e é perpendicular a ele.

Cevianas de um Triângulo

Bissetriz

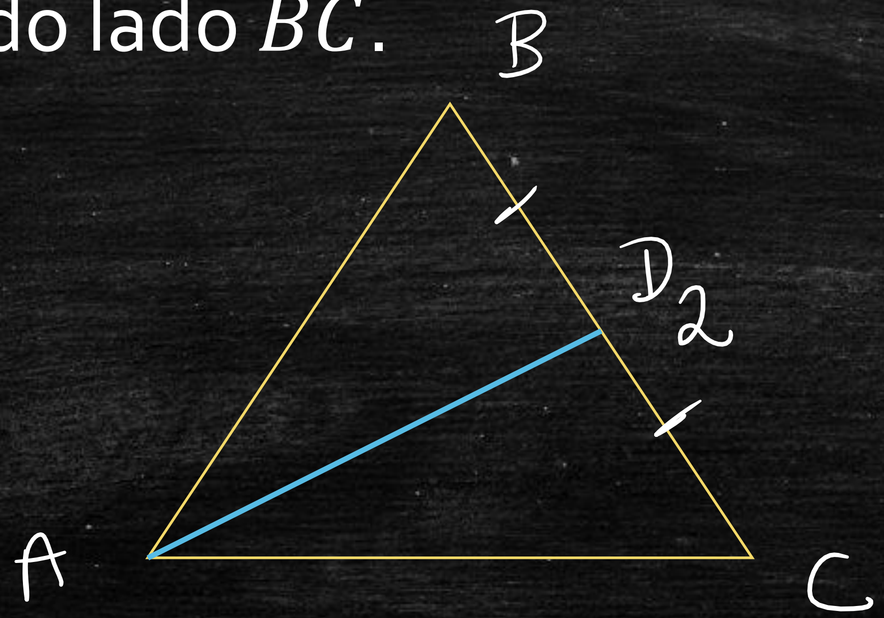
Em um triângulo ABC, a bissetriz interna relativa a BC (ou ao vértice A) é o segmento AD_1, com $\mathrm{D}_1 \in BC$, de tal forma que $m(B\hat{A}D_1) = m(D_1\hat{A}C)$.



Cevianas de um Triângulo

Mediana

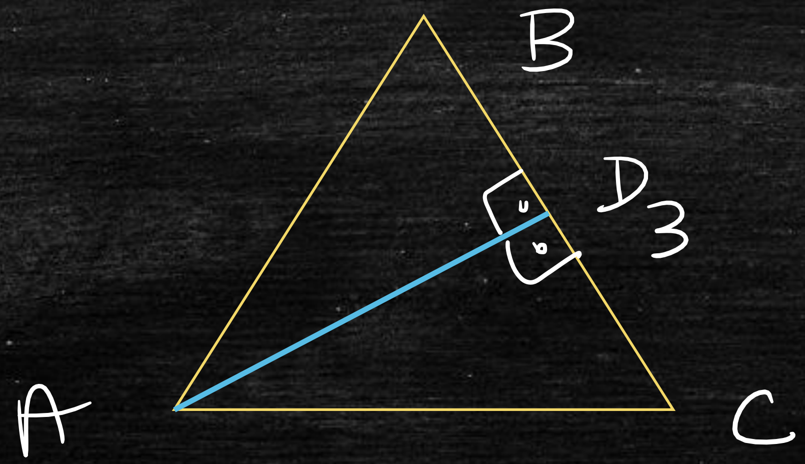
Em um triângulo ABC, a mediana relativa ao lado BC (ou ao vértice A) é o segmento que une o vértice A ao ponto médio do lado BC.



Cevianas de um Triângulo

Altura

Em um triângulo ABC, a altura relativa ao lado BC (ou ao vértice A) é o segmento que une o vértice A ao ponto $D_3 \in BC$ de tal forma que AD_3 e BC sejam perpendiculares, ou ainda, $m(A\widehat{D_1}C) = m(A\widehat{D_1}B)(= 90^0)$.



Aplicações de Congruência

Em um triângulo ABC, as seguintes condições são equivalentes:

(a) $\overline{AB} = \overline{BC}$

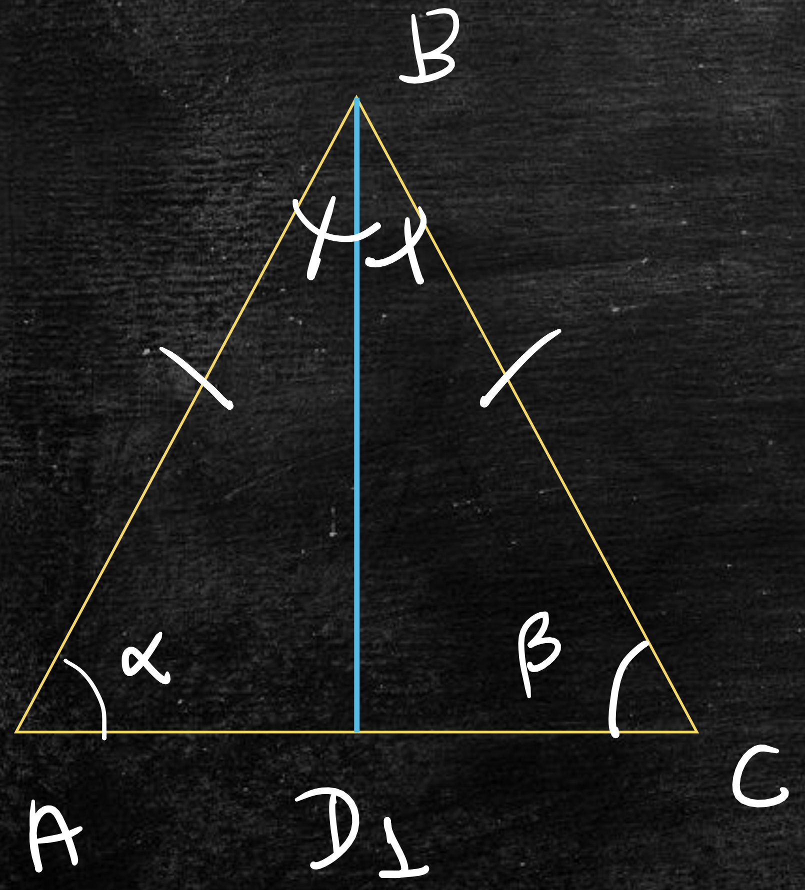
(b) $B\hat{A}C = B\hat{C}A$

(c) as bissetriz, mediana, altura, com relação ao lado AC, são todas iguais.

(a) $\Leftrightarrow$ (b) (b) $\Leftrightarrow$ (c) (c) $\Leftrightarrow$ (a)

(a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a)

(a) ⇒ (b)



Seja BD_1 a bissetriz com relação ao vértice B.

Logo ABD_1 e BD_1C são congruentes. De fato

$$|AB| = |BC|$$

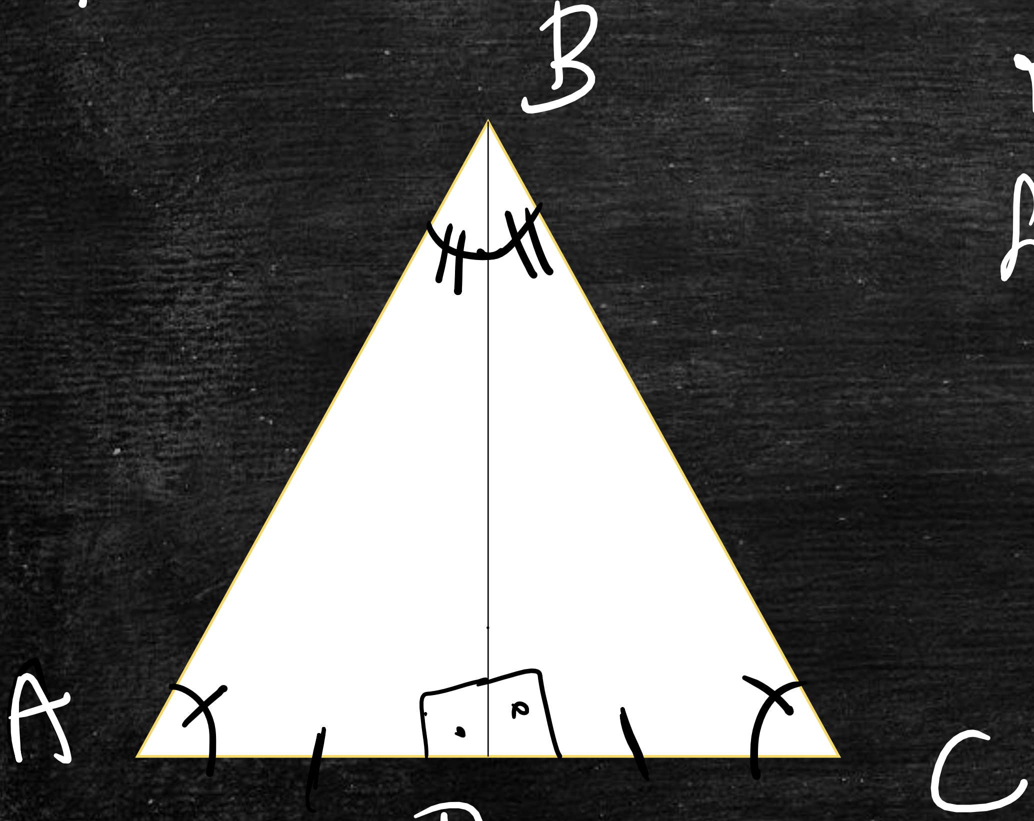
$$m(A\hat{B}D_1) = m(D_1\hat{B}C)$$

BD_1 lado comum

LAL

logo $\alpha = \beta$.

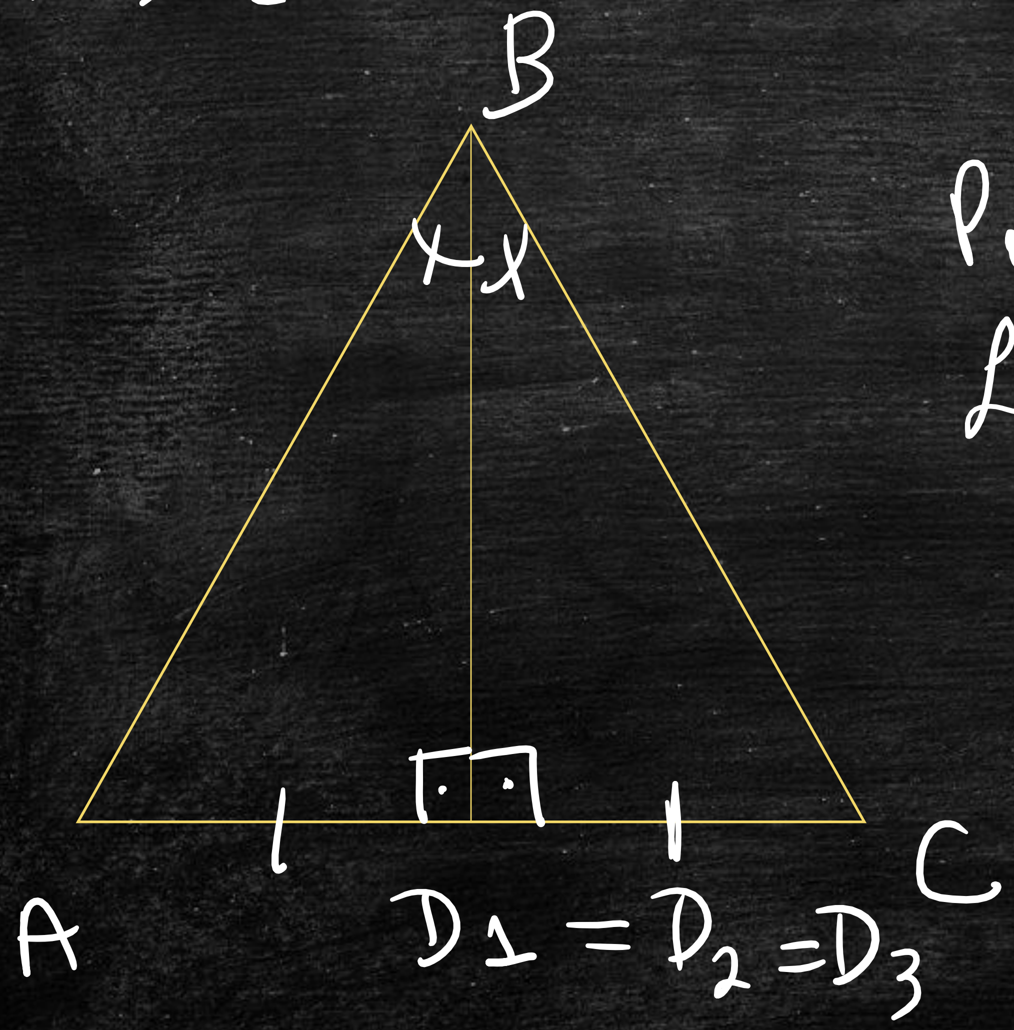
(b) ⇒ (c)



$D_1 = D_3 = D_2$

Seja BD_1 a bissetriz com relação ao vértice B.
Logo $\hat{A}BD_1$ é congruente a BD_1C. Por LAAo.

(c) $\Rightarrow$ (a)



Seja BD_1 a bissetriz com relação ao vértice B.

Por hipótese, $D_1 = D_2 = D_3$

Logo $ABD_1 \equiv BD_1C$.

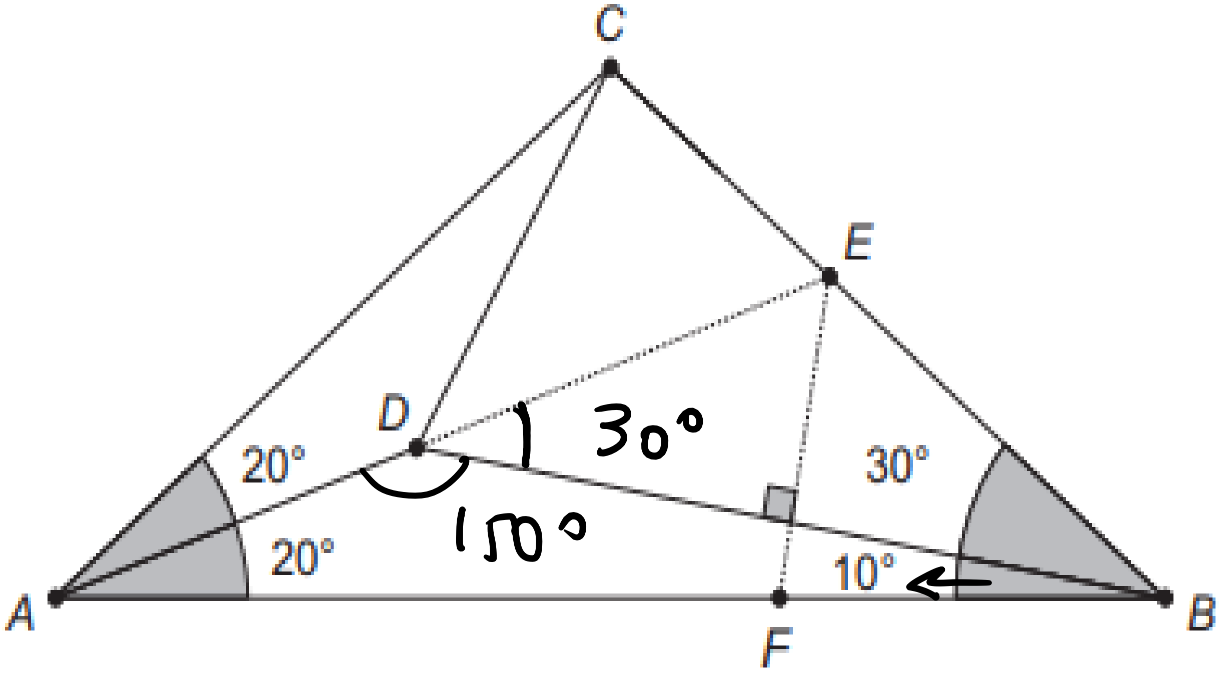
Por ALA ou LAL.

Logo $|AB| = |BC|$

NÍVEL 3 *Respostas sem justificativa não serão consideradas*

12ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2016
Somando novos talentos para o Brasil

5. As medidas em graus dos ângulos $B\hat{A}D$, $D\hat{A}C$, $A\hat{B}D$ e $D\hat{B}C$ estão indicadas na figura. O ponto E é a interseção de BC com o prolongamento de AD, e o ponto F é a interseção de AB com a perpendicular a BD por E.



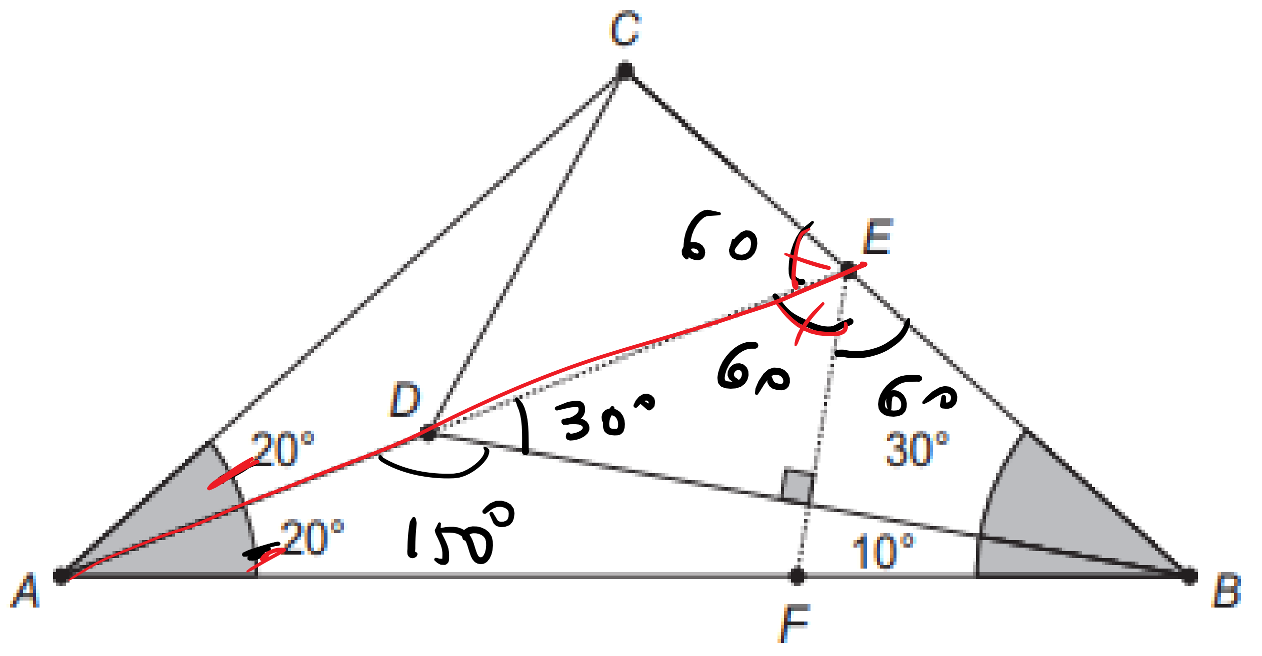
- (a) Qual é a medida do ângulo $B\widehat{D}E$?

30° – feito na figura

NÍVEL 3 *Respostas sem justificativa não serão consideradas*

12ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2016
Somando novos talentos para o Brasil

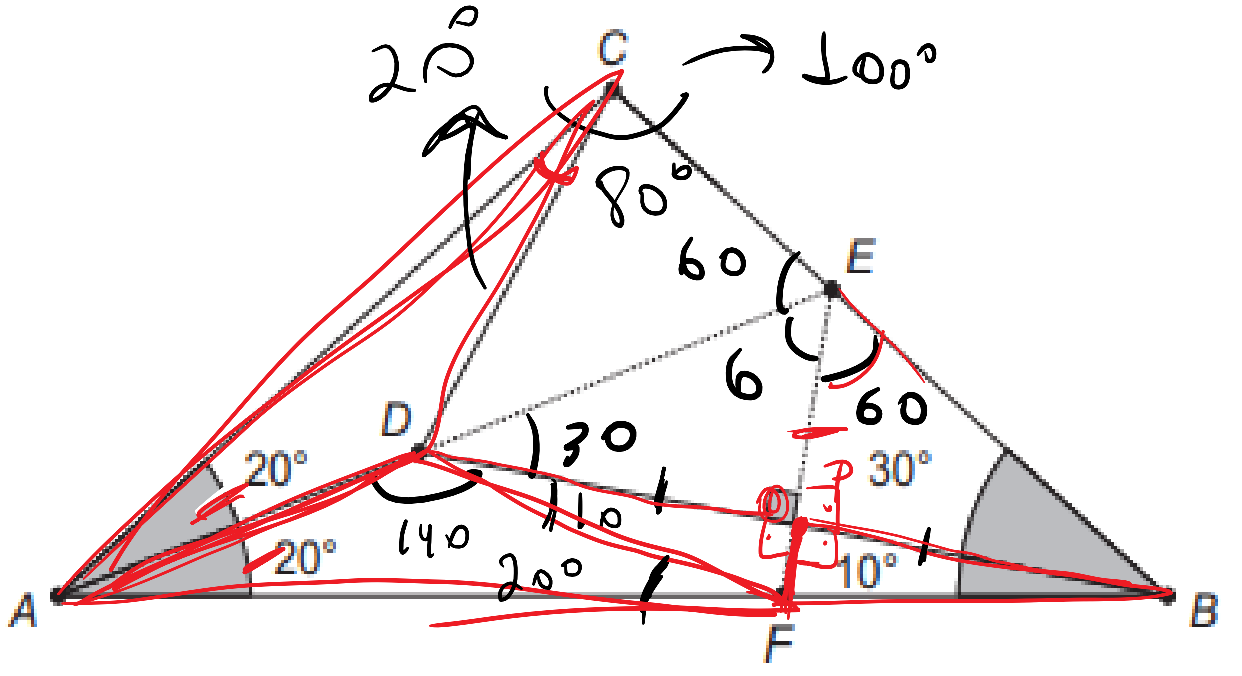
5. As medidas em graus dos ângulos $B\hat{A}D$, $D\hat{A}C$, $A\hat{B}D$ e $D\hat{B}C$ estão indicadas na figura. O ponto E é a interseção de BC com o prolongamento de AD, e o ponto F é a interseção de AB com a perpendicular a BD por E.



(b) Mostre que os triângulos ACE e AFE são congruentes.

São congruentes por ALA, cálculos feitos na figura.

5. As medidas em graus dos ângulos $B\hat{A}D$, $D\hat{A}C$, $A\hat{B}D$ e $D\hat{B}C$ estão indicadas na figura. O ponto E é a interseção de BC com o prolongamento de AD, e o ponto F é a interseção de AB com a perpendicular a BD por E.



- (c) Qual é a medida do ângulo $B\hat{C}D$? Como $|DP| = |PB|$, segue que $DPF \equiv FPB$ por LAL. Olhar para ACD e ADF. Lembre que $ACE \equiv AFE$. logo $|AC| = |AF|$.

Temos que $ADF \equiv ADC$ por LAL.

De fato: $m(C\hat{A}D) = m(D\hat{A}F)$. Temos lado AD em comum. E temos lados AC e AF de mesma medida pelo item (b).

Logo $m(A\hat{C}D) = m(D\hat{F}A) = 20°$.

$\Rightarrow m(B\hat{C}D) = 80°$

Semelhança de Triângulos

Dizemos que dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são **semelhantes** quando existe uma correspondência biunívoca entre vértices

$$A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C'$$

de modo que as medidas dos ângulos em vértices correspondentes sejam iguais, e razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma.

Escrevemos $ABC \sim A'B'C'$.

Semelhança de Triângulos

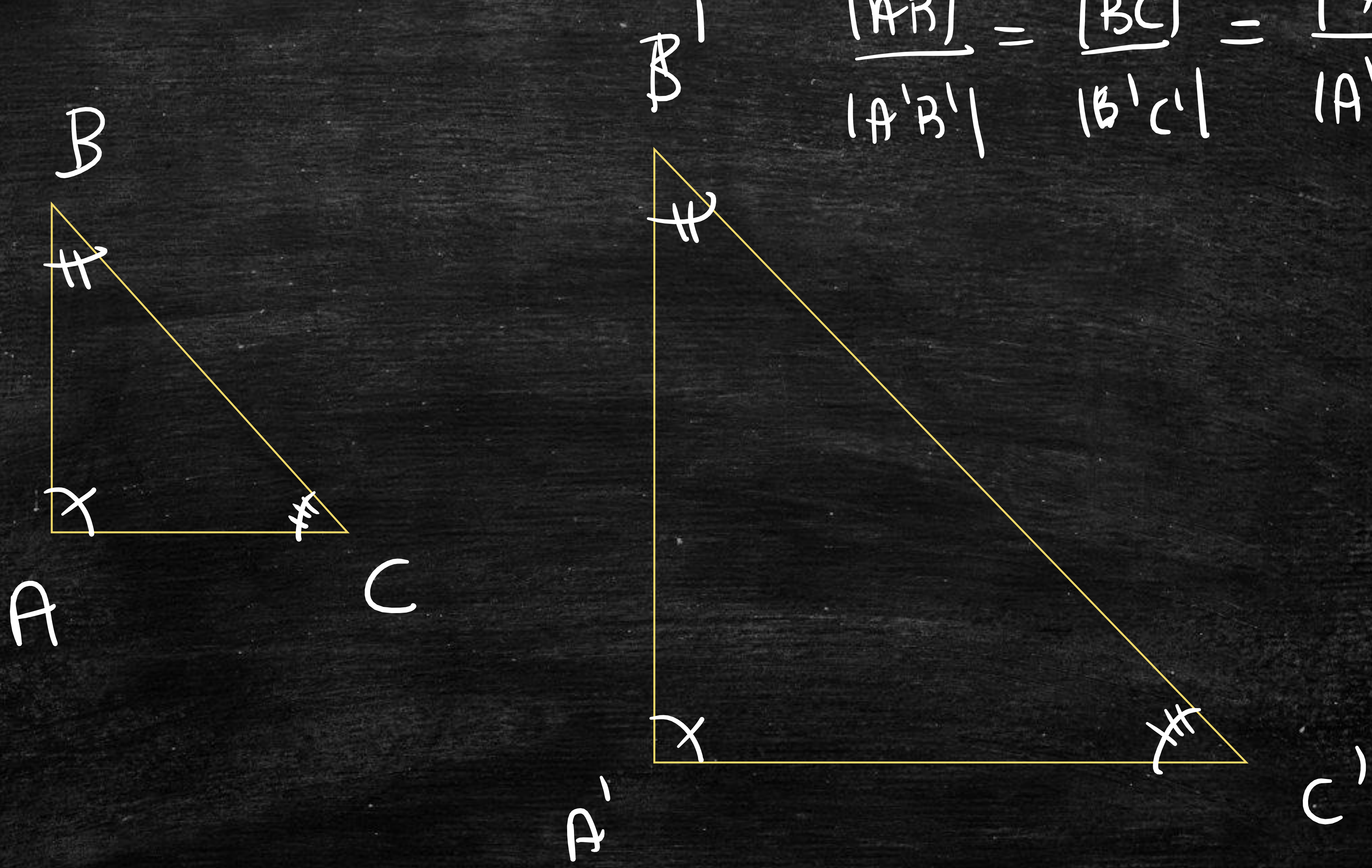
Dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, com a correspondência de vértices:

$$\rightarrow \quad A \leftrightarrow A', \mathrm{B} \leftrightarrow B', \mathrm{C} \leftrightarrow C'$$

- Assim $m(\hat{A}) = m(\widehat{A'})$, $m(\hat{B}) = m(\widehat{B'})$ e $m(\hat{C}) = m(\widehat{C'})$.
- E existe $k > 0$ tal que

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = k$$

k é a **razão de semelhança** entre os triângulos ABC e $A'B'C'$.



$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = k > 0$$

Dados dois triângulos ABC e A'B'C', as seguintes condições são equivalentes.

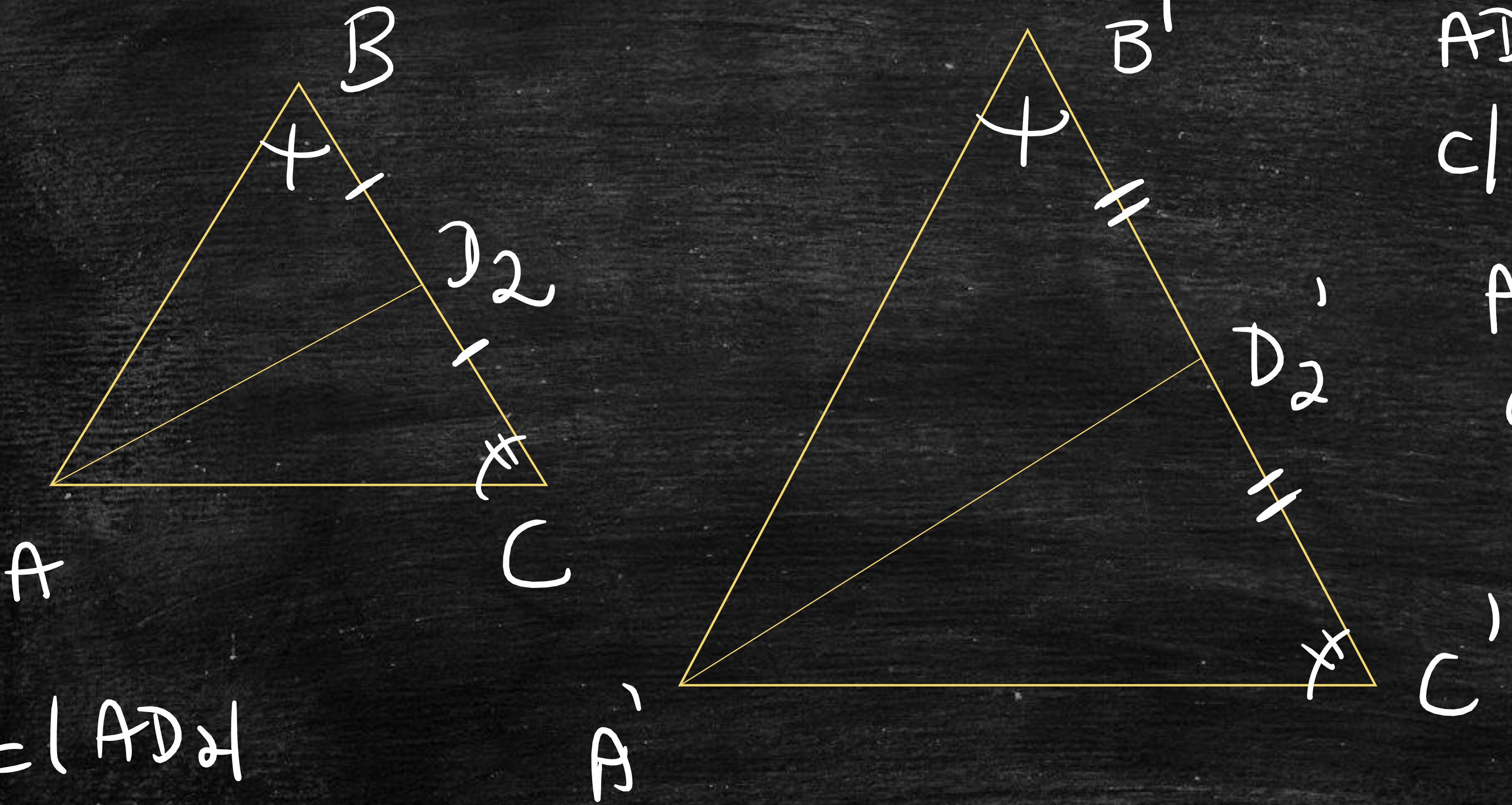
(a) $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C})$

(b) $\dfrac{|AB|}{|A'B'|} = \dfrac{|BC|}{|B'C'|} = \dfrac{|AC|}{|A'C'|} = k$.

Pode-se demonstrar usando Teo. de Tales e sua recíproca.

Aplicações e Exercícios

- Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos semelhantes, com razão de semelhança k.
- Sejam, ainda, $b_A, b_{A'}, m_A$ e $m_{A'}$, e h_A e $h_{A'}$ respectivamente os comprimentos das bissetrizes, medianas e alturas relativas a A e A'.
- Então $\frac{m_A}{m_{A'}} = \frac{h_A}{h_{A'}} = \frac{b_A}{b_{A'}} =$



AD_2 : mediana c/ relação a A,

$A'D_2'$: mediana com relação a A',

? $\frac{m_A}{m_{A'}} = k$

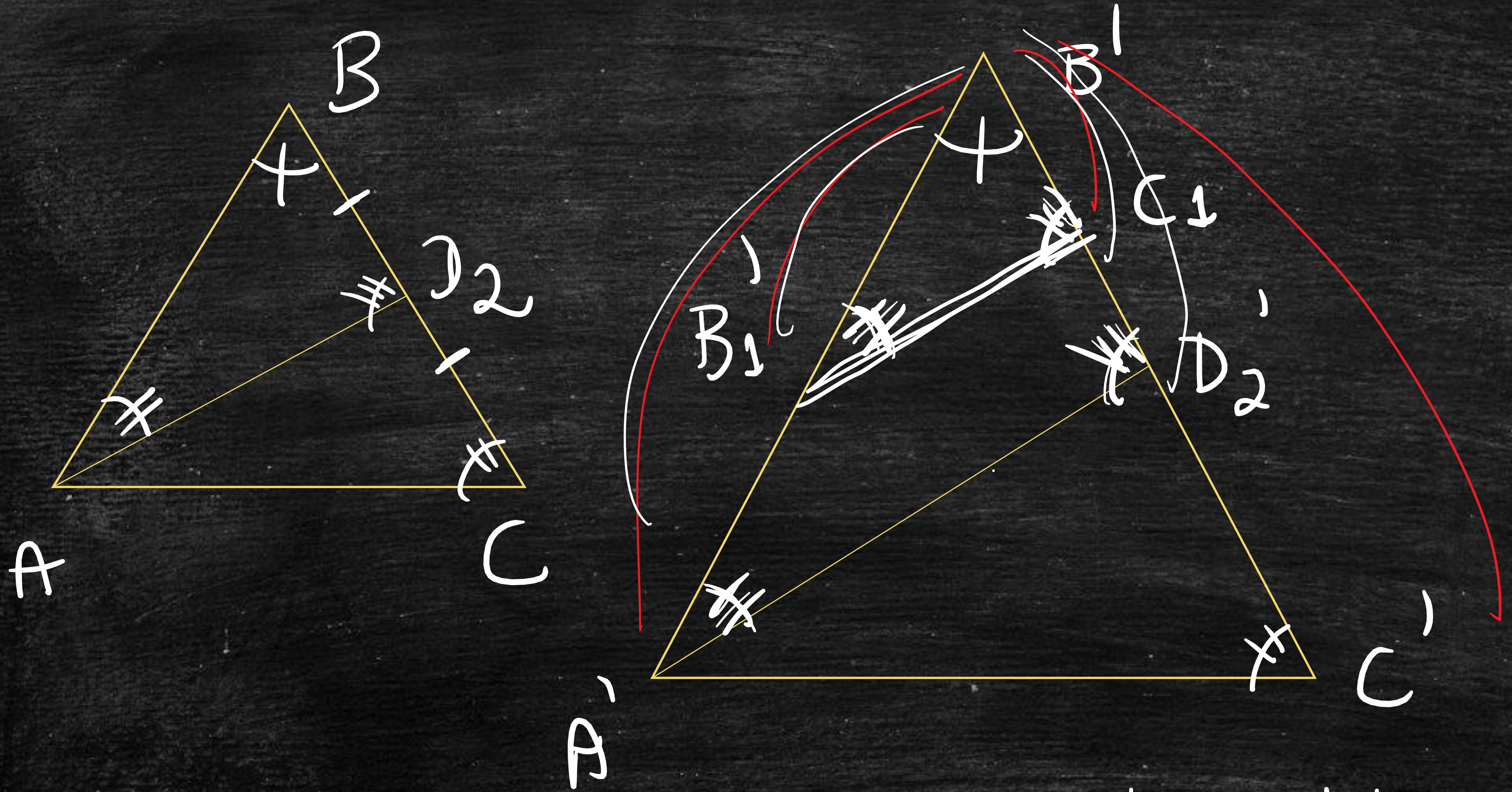
$m_A = |AD_2|$

$m_{A'} = |A'D_2'|$

Precisamos mostrar que $AD_2B \sim A'D_2'B'$

Como os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, temos que $\dfrac{|BC|}{|B'C'|} = k$.

Como D_2 (D_2') é ponto médio de BC $(B'C')$, temos que $k = \dfrac{|BC|}{|B'C'|} = \dfrac{2|BD_2|}{2|B'D_2'|} = \dfrac{|BD_2|}{|B'D_2'|} = k$



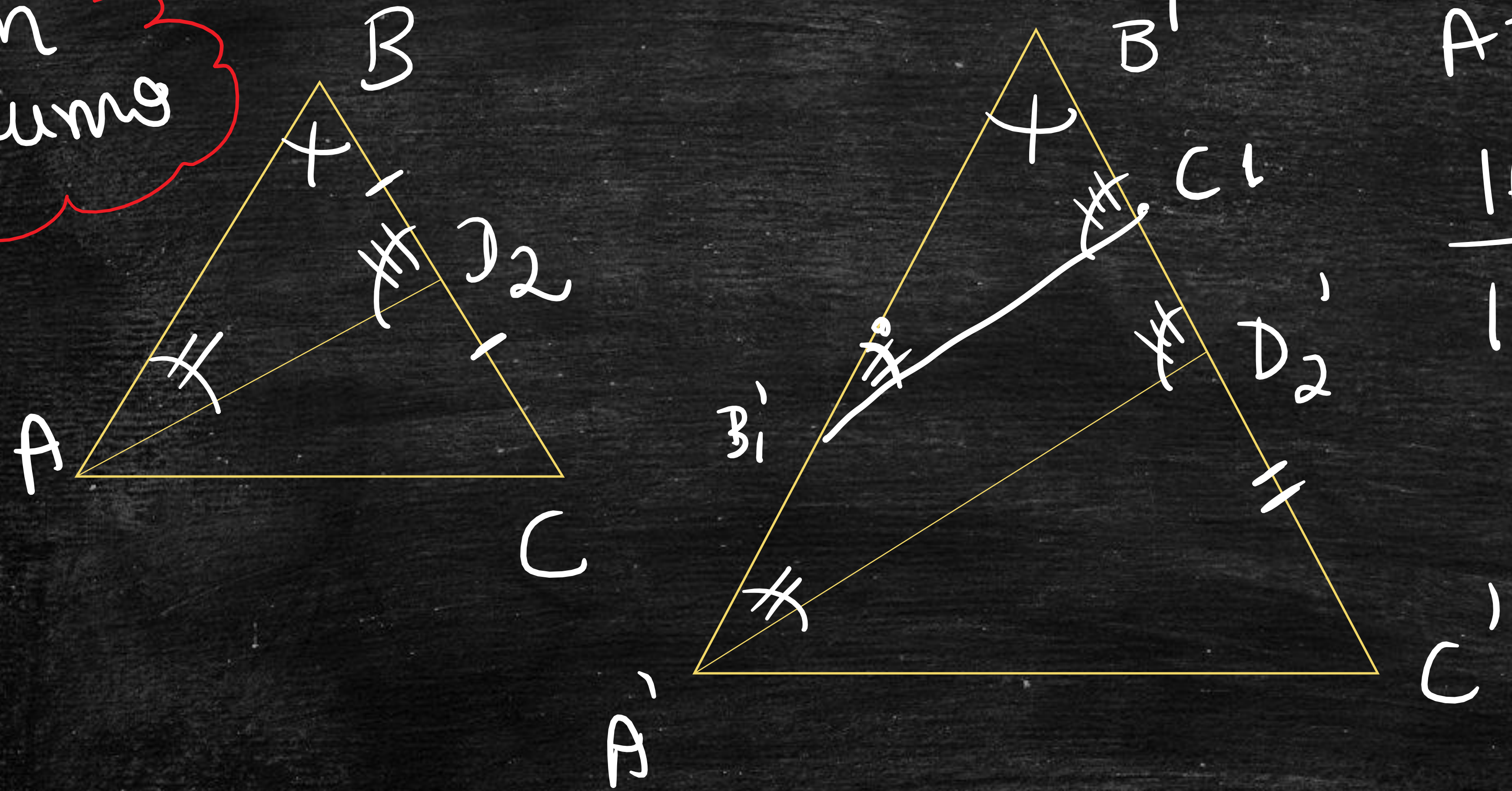
tome B_1' em $A'B'$ tal que $|B_1'B'| = |BA|$

tome C_1' em $B'C''$ tal que $|B'C_1| = |BD_2|$

Temos que $ABD_2 \equiv B_1'BC_1$, nos construção. Logo os seus ângulos correspondentes possuem mesma medida. Logo os seguintes triângulos são semelhantes: ABD_2 e $A'B'D_2'$.

Logo $$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BD_2|}{|B'D_2'|} = \frac{|AD_2|}{|A'D_2'|} = \frac{m_A}{m_{A'}} = k$$

Em resumo



$ABC \sim A'B'C'$

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = k$$

$$? \ \frac{|AD_2|}{|A'D_2|} = k$$

Construir $B_1'B'C_1 \equiv ABD_2$. Usamos que $\frac{|BD_2|}{|B'D_2'|} = k$.

Por Tales (recíproca), $B_1'C_1 \parallel A'D_2'$.

Logo $ABD_2 \sim A'B'D_2' \Longrightarrow |AD_2| / |A'D_2| = k$

14. Os seis triângulos da figura são retângulos e seus ângulos com vértice no ponto A são iguais. Além disso, $AB = 24$ cm e $AC = 54$ cm. Qual é o comprimento de AD?

A) 30 cm
B) 34 cm
C) 36 cm
D) 38 cm
E) 39 cm