Cálculo IV - Poli - 2023

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio

Departamento de Matemática
IME - USP

23 de novembro de 2023

Bibliografia Complementar

DJAIRO G. FIGUEIREDO & ALOÍSIO F. NEVES, *Equações Diferenciais Aplicadas*, Coleção Matemática Universitária, Terceira Edição, IMPA, 2018.

Equações Diferenciais Ordinárias

EDO's

Uma *EDO* é uma expressão da forma

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

onde F é uma função definida num aberto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \overset{(n+1)\text{ fatores}}{\cdots} \times \mathbb{R}^k$ a valores em $\mathbb{R}^k$.

Definição

Uma solução da EDO (1) é uma função $y : I \to \mathbb{R}^k$ definida num intervalo não degenerado $I \subset \mathbb{R}$ e tal que:

- y é n vezes derivável e, $\forall x \in I$, $\big(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)\big) \in \Omega$.
- $\forall x \in I$, $F\big(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)\big) = 0$.

Nomenclatura para EDO's

- Se (1) for da forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{2}$$

para f definida num aberto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \overset{n \text{ fatores}}{\cdots} \times \mathbb{R}^k$ a valores em $\mathbb{R}^k$, diz-se que a equação é dada na forma *explícita* ou *normal*.
- Diz-se que n é a *ordem* da EDO.
- Se $k = 1$, diz-se que a equação é uma EDO *escalar*; caso contrário, diz-se que é *vetorial* ou um *sistema de k EDO's*.

Exemplos de EDO's

- Lei de Newton: $mx'' = f(t, x, x')$
- Circuito RLC: $Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = 0$
- Decaimento radioativo: $N' = -kN$
- Crescimento populacional: $P' = kP$
- Crescimento populacional com barreira: $P' = kP(C - P)$
- Modelo predador-presa:

$$\begin{cases} x' &= -\gamma x + \alpha xy \\ y' &= \eta y - \beta xy \end{cases}$$

Exemplo

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e $g : I \to \mathbb{R}$ contínua. Considere a EDO:

$$x' = f(t, x) \tag{3}$$

onde $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(t, x) = g(t)$.

- $\varphi : I \to \mathbb{R}$ é solução de (3) se, e somente se, for primitiva de g, i.e. se for da forma
$$\varphi(t) = c + \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s$$
onde $t_0 \in I$ e $c \in \mathbb{R}$ constante. Existem, pois, infinitas soluções!
- Fixado $t_0 \in I$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, existe uma única solução $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de (3) tal que $\varphi(t_0) = x_0$, a saber
$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s$$

Problema de Cauchy

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aberto, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ e $(t_0, x_0) \in \Omega$. Diz-se que

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4}$$

é um *problema de Cauchy* ou de *valor inicial* associado à EDO $x' = f(t, x)$.

Definição

Uma *solução* do problema de Cauchy (4) é uma solução $x : I \to \mathbb{R}^n$ da equação $x' = f(t, x)$ tal que $t_0 \in I$ e $x(t_0) = x_0$.

- O problema de Cauchy (4) nunca tem soluções únicas, pois, se $x : I \to \mathbb{R}$ for uma solução e J for um subintervalo próprio de I com $t_0 \in J$, então a restrição $x|_J : J \to \mathbb{R}^n$ também é solução.
- Em vista disso, a discussão sobre unicidade de soluções só faz sentido para *soluções maximais*:

Definição

Diz-se que $x : I \to \mathbb{R}^n$ é uma *solução maximal* do problema de Cauchy (4) se não for restrição própria de alguma outra solução do mesmo problema, i.e. se não for restrição de alguma solução de (4) definida num intervalo que contenha I propriamente.

Exemplo

Considere a equação $x' = f(t,x)$, onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(t,x) = 3x^{2/3} \tag{5}$$

- Para todo $c_1 < c_2 \in \mathbb{R}$, a função $\varphi_{c_1,c_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi_{c_1,c_2}(t) = \begin{cases} (t-c_1)^3, & t \leq c_1 \\ 0, & c_1 < t < c_2 \\ (t-c_2)^3, & t \geq c_2 \end{cases}$$

  é uma solução maximal de (5). Portanto, nenhum problema de Cauchy associado a esta equação tem solução maximal única.
- Note que f não é derivável no zero.

Teorema de Existência e Unicidade

Teorema (TEU)

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *aberto e* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *de classe* C^1*. Então, para todo* $(t_0, x_0) \in \Omega$*, o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{6}$$

tem solução maximal única.

Observações

- É possível enunciar uma versão do último teorema assumindo-se menos regularidade sobre f; por exemplo, basta que f seja contínua em Ω e C^1 como função da segunda variável.
- Também é possível mostrar que toda solução do problema de Cauchy (6) se estende a uma solução maximal.
- Decorre daí que, na hipótese do TEU, se $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ forem ambas soluções de (6), então φ_1 e φ_2 coincidem em $I_1 \cap I_2$.
- O teorema se aplica a EDO's de ordem 1 (vetoriais), mas veremos a seguir como transformar equações de ordem maior num sistema de EDO's de ordem 1.

Como transformar EDO's de ordem superior em EDO's de ordem 1

- Considere a equação

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{7}$$

  para f definida num aberto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \overset{n-1 \text{ fatores}}{\cdots} \times \mathbb{R}^k$ a valores em $\mathbb{R}^k$.

- Introduzimos variáveis $y_1 = y, y_2 = y', \ldots y_n = y^{(n-1)}$. Então $y : I \to \mathbb{R}^k$ é solução de (7) se, e somente se, $Y := (y_1, \ldots, y_n) : I \to \mathbb{R}^{nk}$ for solução da EDO de ordem 1:

$$\begin{cases} y_1' & = y_2 \\ y_2' & = y_3 \\ & \ldots \\ y_n' & = f(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

Equações a Variáveis Separáveis

Considere a equação:

$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x) \tag{8}$$

onde g e h são funções a valores reais contínuas definidas em intervalos I_1 e I_2, respectivamente.

Equações a Variáveis Separáveis

Método de Resolução

- Soluções constantes: dado $a \in \mathbb{R}$, a função constante $x : I_1 \to \mathbb{R}$, $x(t) \equiv a$, é solução de (1) se, e somente se, $a \in I_2$ e a for zero de h.
- Soluções não constantes:
  1) "Separamos" as variáveis:

$$\frac{\mathrm{d}x}{h(x)} = g(t)\,\mathrm{d}t$$

  2) Calculamos primitivas dos dois membros:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{h(x)} = \int g(t)\,\mathrm{d}t + C$$

Exemplo

Determine o tempo necessário para se esvaziar um tanque cilíndrico de raio 2 m e altura 4 m, cheio d’água, admitindo que a água se escoe através de um orifício, situado na base do tanque, de raio 0.1 m, com uma velocidade $v = \sqrt{2gh}$, sendo h a altura do nível da água no tanque e $g = 10m/s^2$ a aceleração da gravidade.

Soluções por Séries de Potências

Sejam $A, x_0 \in \mathbb{R}$ e considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{9}$$

Note que, pelo TEU, (9) admite uma solução maximal única $x : I \to \mathbb{R}$, a qual será determinada a seguir.

Solução por Séries de Potências

Método de Resolução

- Tentemos uma solução da forma $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ com os coeficientes $a_n \in \mathbb{R}$ a serem determinados.
- Assumindo que $x(t)$ como acima seja solução, derivamos termo a termo e igualamos $x'(t)$ com $Ax(t)$; seguirá, levando em conta a condição inicial, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{A^n}{n!} x_0$, logo

$$x(t) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}\Big) x_0 = e^{At} x_0 \tag{10}$$

e $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida acima é a solução maximal procurada.

Solução por Séries de Potências, bis

Sejam $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = A \cdot x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{11}$$

Note que, pelo TEU, (11) admite uma solução maximal única $x : I \to \mathbb{R}^n$, a qual será determinada a seguir.

Solução por Séries de Potências, bis

Método de Resolução

- Tentemos uma solução da forma $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ com os coeficientes $a_n \in \mathbb{R}^n$ a serem determinados.
- Assumindo que $x(t)$ como acima seja solução, derivamos termo a termo e igualamos $x'(t)$ com $A \cdot x(t)$; seguirá que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{A^n}{n!} \cdot x_0$, logo

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n \cdot x_0}{n!} \tag{12}$$

  definida para $t \in \mathbb{R}$ no interior do intervalo de convergência da série de potências no 2^oM. Verificaremos que $\operatorname{dom} x = \mathbb{R}$ e, portanto, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ assim definida é a solução maximal do problema de Cauchy (11).

Exponencial de Matrizes

- Dados $n, m \in \mathbb{N}$, consideremos o espaço vetorial real $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ munido do produto interno dado por

$$\langle A, B \rangle := \operatorname{tr} B^* A$$

Definição

O produto interno acima chama-se *produto de Hilbert-Schmidt* e a norma $\|\cdot\|$ por ele induzida chama-se *norma de Hilbert-Schmidt*.

- Exercício: Mostre que, se $R \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $S \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$, então

$$\|S \circ R\| \leq \|S\| \|R\|.$$

Exponencial de Matrizes

Proposição

Dados $n \in \mathbb{N}$ *e* $X \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$*, a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

é absolutamente convergente (logo convergente).

Definição

Com a notação acima, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ chama-se *exponencial de* X e será denotada por $\exp(X)$ ou e^X. A aplicação

$$\exp : \mathsf{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathsf{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

chama-se *exponencial* de matrizes.

Exponencial de Matrizes

Algumas Propriedades de exp

- Se $A, B \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $AB = BA$, então $A \exp(B) = \exp(B) A$ e $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$.
- COROLÁRIO: para toda $X \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, e^X é inversível e $(e^X)^{-1} = e^{-X}$.
- Para toda $X \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, a aplicação $\phi : \mathbb{R} \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dada por $\phi(t) = \exp(tX)$ é derivável e $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi'(t) = X \exp(tX) = \exp(tX) X$. Em suma:
$$\frac{d}{dt}\,[e^{tX}] = Xe^{tX} = e^{tX}X.$$

Exponencial de Matrizes

- Voltemos ao problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = A \cdot x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{13}$$

dados $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

- A única solução maximal de (13) é a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\varphi(t) = e^{tA} \cdot x_0$$

Exponencial de Matrizes

Dada $X \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, como calcular e^X?

- Se $X = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, então $e^X = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$
- Se X for diagonalizável, podemos tomar $S \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ inversível tal que $D = SXS^{-1}$ seja diagonal, de modo que sabemos calcular e^D pelo item anterior. Daí $X = S^{-1}DS$ e

$$
\begin{aligned}
e^X &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(S^{-1}DS)^n}{n!} = \\
&= S^{-1} \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!} \Big) \cdot S = \\
&= S^{-1} e^D S.
\end{aligned}
$$

- Caso geral: usamos, por exemplo, o algoritmo Putzer (cf. material complementar no moodle).

Exemplo: EDO's lineares homogêneas com coeficientes constantes

Dados $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, considere a EDO linear de ordem n:

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0 \tag{14}$$

Definição

O polinômio

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \tag{15}$$

chama-se *polinômio característico* da EDO (14).

- Pondo $y_1 = x, y_2 = x', \ldots, y_n = x^{(n-1)}$ e $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, obtém-se o sistema
$$Y' = A \cdot Y \tag{16}$$
onde
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$
chama-se *matriz companheira* de $p(\lambda)$.
- Já sabemos que a solução maximal de (16) com condição inicial $Y(0) = Y_0 \in \mathbb{R}^n$ é
$$Y(t) = e^{At} \cdot Y_0$$
- A primeira componente de $Y(t)$ é a solução maximal de (14) com condição inicial $\big(x(0), x'(0), \ldots, x^{(n-1)}(0)\big) = Y_0$.

Exemplo: oscilador harmônico

- Dado $\omega > 0$, considere a EDO

$$x'' = -\omega^2 x \tag{17}$$

- Pondo $y = \frac{-1}{\omega} x'$, obtém-se o sistema:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Identificando $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ e pondo $z = x + iy$, obtém-se a EDO:

$$z' = A \cdot z \tag{18}$$

onde $A = i\omega$ e $\cdot$ denota o produto de números complexos.

Exemplo: oscilador harmônico

- Tentando-se uma solução da forma $z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, com os coeficientes $a_n \in \mathbb{C}$ a serem determinados, conclui-se que a solução maximal de (18) com condição inicial $z(0) = z_0 = x_0 + iy_0$ é $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por

$$z(t) = \exp(i\omega t)z_0$$

  onde $\exp$ denota a exponencial complexa.

- Portanto, pela fórmula de Euler, segue que a função $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$x(t) = \operatorname{Re} z(t) = x_0 \cos \omega t - y_0 \sin \omega t$$

  é a solução maximal de (17) com condição inicial $x(0) = x_0$ e $x'(0) = -\omega y_0$.

Oscilador harmônico com amortecimento subcrítico

Exercício

Generalize o método do exemplo anterior para encontrar a solução geral da EDO:

$$x'' + 2\gamma x' + \omega^2 x = 0 \tag{19}$$

dadas constantes reais $0 < \gamma < \omega$.

SUGESTÃO: encontre $\alpha, \beta > 0$ tais que $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ seja solução do sistema

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

se, e somente se, $x(t)$ for solução de (19). A seguir, ponha $z = x + iy$, $A = \alpha + i\beta$ e repita o que foi feito no caso do oscilador harmônico sem amortecimento.

Formas Diferenciais de Grau 1

Uma *forma diferencial* de grau 1 num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é uma expressão

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

onde $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$.

- Diz-se que η é de classe C^k se P e Q o forem.
- Diz-se que a forma diferencial $\eta = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ é *exata* se existir uma função derivável $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ cuja diferencial total $\mathrm{d}\varphi = \partial_x\varphi\,\mathrm{d}x + \partial_y\varphi\,\mathrm{d}y$ coincida com η, i.e. se

$$\partial_x\varphi = P \quad \text{e} \quad \partial_y\varphi = Q.$$

- Noutras palavras, η é exata se, e somente se, o campo $F = (P, Q) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ for conservativo; caso afirmativo, a condição acima é equivalente a ser φ potencial para F.

Formas Diferenciais Exatas

Recorde:

Proposição

Seja $\eta = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ *for uma 1-forma diferencial de classe* C^1 *num aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$*.*

- *Se* η *for exata, então* $\partial_y P = \partial_x Q$ *em* Ω*.*
- *Se* $\partial_y P = \partial_x Q$ *em* Ω *e este for um aberto conexo e simplesmente conexo, então* η *é exata.*

Curvas Integrais de Formas Diferenciais

- Seja $\eta = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ uma 1-forma diferencial num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Diz-se que uma curva diferenciável $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : I \to \mathbb{R}^2$ definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é uma *curva integral* de η se $\operatorname{Im}\gamma \subset \Omega$ e, $\forall t \in I$,

$$P\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)\gamma_1'(t) + Q\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)\gamma_2'(t) = 0$$

- Se $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e $y : I \to \mathbb{R}$ diferenciável, então y é solução de

$$P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{20}$$

se, e somente se, $x \in I \mapsto \big(x, y(x)\big)$ for curva integral de η.

- Se $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e $x : I \to \mathbb{R}$ diferenciável, então $x = x(y)$ é solução de

$$P(x, y)\frac{dx}{dy} + Q(x, y) = 0 \tag{21}$$

se, e somente se, $y \in I \mapsto \big(x(y), y\big)$ for curva integral de η.

Equações Diferenciais Exatas

Notação

Escreveremos abreviadamente

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{22}$$

para denotar uma das EDO's (21) ou (20) do slide anterior.

Definição

Diz-se que (22) é uma *equação diferencial exata* se $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ for uma forma diferencial exata.

Equações Diferenciais Exatas

Proposição

Seja $\eta = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ uma 1-forma diferencial exata de classe C^0 num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ um potencial para η. Então, dado $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e $\gamma : I \to \Omega$ derivável, são equivalentes:

i) *γ é curva integral de η;*

ii) *Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\phi \circ \gamma$ é constante e igual a c.*

Corolário

As soluções da EDO diferencial exata $P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$ são as funções diferenciáveis $y = y(x)$ ou $x = x(y)$ dadas implicitamente pela equação

$$\phi(x, y) = cte.$$

Equações a Variáveis Separáveis, bis

Exemplo

- Considere a equação:

$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x) \tag{23}$$

onde g e h são funções a valores reais contínuas definidas em intervalos abertos I_1 e I_2, respectivamente. Suponha que h não se anule em I_2.

- Pondo $P(t,x) = g(t)$ e $Q(t,x) = -\frac{1}{h(x)}$, as soluções de (23) coincidem com as soluções de

$$P(t,x) + Q(t,x)\frac{dx}{dt} = 0.$$

Equações a Variáveis Separáveis, bis

- Fixado $(t_0, x_0) \in I_1 \times I_2$, a 1-forma $P\,\mathrm{d}t + Q\,\mathrm{d}x$ admite potencial $\phi : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ dado por

$$\phi(t,x) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s + \int_{x_0}^{x} \frac{-1}{h(s)}\,\mathrm{d}s$$

- Conclui-se, pois, que as soluções de (23) são as funções deriváveis $x = x(t)$ dadas implicitamente por

$$\int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s + \int_{x_0}^{x} \frac{-1}{h(s)}\,\mathrm{d}s = \text{cte.}$$

Equações Homogêneas

- Diz-se que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é *homogênea de grau* $r \geq 0$ se, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$f(tx, ty) = t^r f(x, y)$$
- A EDO
$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{24}$$
diz-se *homogênea* se P e Q forem ambas homogêneas de mesmo grau.
- Se (24) for homogênea, a substituição $y = ux$ ou $x = vy$ (em que u e v passam a ser as novas variáveis dependentes) transforma a equação numa EDO a variáveis separáveis.

Fatores Integrantes

- Sejam P e Q funções a valores reais contínuas definidas num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que a equação
$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{25}$$
não seja exata. Diz-se que uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é um *fator integrante* para (25) se u não se anular em Ω e se
$$u(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x + u(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$
for uma equação diferencial exata.
- Sejam u, P, Q funções de classe C^1 com $u \neq 0$ em Ω. Suponha que Ω seja um aberto conexo e simplesmente conexo. Uma condição necessária e suficiente para que u seja fator integrante é
$$\partial_y(uP) = \partial_x(uQ)$$

Fatores Integrantes

Condição suficiente para existência de fator integrante da forma $u = u(x)$ ou $u = u(y)$

- Se
$$\frac{\partial_x Q - \partial_y P}{Q} = h(x)$$
então $u(x) = \exp(-\int h(x)\,\mathrm{d}x)$ é fator integrante.
- Se
$$\frac{\partial_x Q - \partial_y P}{P} = f(y)$$
então $u(y) = \exp(\int f(y)\,\mathrm{d}y)$ é fator integrante.

EDO's lineares de ordem 1

- Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e $f, g : I \to \mathbb{R}$ contínuas. Considere a equação
$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = f(x) \tag{26}$$
- Podemos reescrever (26) na forma
$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{27}$$
onde $P(x, y) = g(x)y - f(x)$ e $Q(x, y) \equiv 1$.

EDO's lineares de ordem 1

- Como
$$\frac{\partial_x Q - \partial_y P}{Q} = -g(x),$$
conclui-se que $\exp(\int g(x)\,\mathrm{d}x)$ é fator integrante para (27).
- Usando o fator integrante e calculando um potencial, conclui-se que a solução geral de (26) é $y : I \to \mathbb{R}$ dada por:
$$y(x) = ce^{-\int g(x)\,\mathrm{d}x} + e^{-\int g(x)\,\mathrm{d}x} \int f(x) e^{\int g(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$
com c constante real.

- Uma *EDO linear de ordem n* é uma equação da forma

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t) \tag{28}$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e $a_0, \ldots, a_{n-1}, f : I \to \mathbb{R}$.

- Se $f \equiv 0$, diz-se que a EDO (28) é *homogênea*; caso não seja, dizemos que a equação

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0 \tag{29}$$

é a *homogênea associada a* (28).

TEU para EDO's lineares

Teorema

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e $a_0, \ldots, a_{n-1}, f : I \to \mathbb{R}$ contínuas. Então, dados $t_0 \in I$ e $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução $x : I \to \mathbb{R}$ da equação

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t) \tag{30}$$

tal que $x^{(i)}(t_0) = x_i$ para $0 \leq i \leq n-1$.

Corolário

O conjunto das soluções $x : I \to \mathbb{R}$ da homogênea

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0 \tag{31}$$

é um espaço vetorial real de dimensão n.

Solução Geral da EDO linear de ordem n

Proposição

Seja $y_p : I \to \mathbb{R}$ uma solução de (30) (dita solução particular). Então qualquer outra solução de (30) é da forma $y_p + y_h$, onde $y_h : I \to \mathbb{R}$ é uma solução da homogênea associada (35).

Ou seja, se $S_h := \{y_h : I \to \mathbb{R} \mid y_h \text{ solução de } (35)\}$ for o espaço vetorial das soluções da homogênea associada, então a *solução geral* de (30) é

$$S := y_p + S_h = \{y_p + y_h : I \to \mathbb{R} \mid y_h \in S_h\}$$

EDO's lineares homogêneas com coeficientes constantes

- Dados $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, considere a EDO linear de ordem n homogênea com coeficientes constantes:

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0 \tag{32}$$

- Conforme já definimos, o *plinômio característico* de (32) é

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \tag{33}$$

Como encontrar uma base do espaço das soluções de (32)?

- Para cada raiz real r de $p(\lambda)$, com multipliciade $k = k(r)$, associamos

$$B_r := \{e^{rt}, te^{rt}, \dots, t^{k-1}e^{rt}\}$$

- Para cada par de raízes complexas conjugadas $a \pm ib$ de $p(\lambda)$, com multipliciade $\ell = \ell(a, b)$, associamos

$$B_{(a,b)} := \{e^{at}\cos bt, e^{at}\sin bt, te^{at}\cos bt, te^{at}\sin bt, \dots, t^{\ell-1}e^{at}\cos bt, t^{\ell-1}e^{at}\sin bt\}$$

- A união dos B_r e $B_{(a,b)}$, para todas as raízes de $p(\lambda)$, é uma base do espaço das soluções de (32).

Soluções Particulares pelo Método dos Coeficientes a Determinar

- Dados $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, considere a EDO linear de ordem n homogênea com coeficientes constantes:

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = f(t) \qquad (34)$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é da forma

$$f(t) = e^{\alpha t}\big(P_1(t)\cos\beta t + P_2(t)\sin\beta t\big)$$

com P_1 e P_2 polinômios de grau no máximo m e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Se k for a multiplicidade de $\alpha \pm i\beta$ como raiz do polinômio característico $p(\lambda)$ ($k = 0$ se não for raiz), então (34) admite uma solução particular da forma

$$x(t) = t^k e^{\alpha t}\big(Q_1(t)\cos\beta t + Q_2(t)\sin\beta t\big)$$

com Q_1 e Q_2 polinômios de grau no máximo m e coeficientes a serem determinados.

Wronskiano

- Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{R}$ funções deriváveis até ordem $n-1$. Definimos a *matriz wronskiana* de $(y_1, \ldots, y_n)$ no ponto $x \in I$, denotada por $W(y_1, \ldots, y_n)(x)$ ou $W(x)$, por

$$W(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

- O *determinante wronskiano* (ou, simplesmente, *wronskiano*) é a função $I \to \mathbb{R}$ dada por

$$x \mapsto \det W(x)$$

- Se $\{y_1, \ldots, y_n\}$ for L.D., então $\det W(y_1, \ldots, y_n) \equiv 0$ em I.

Proposição

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ *intervalo,* $a_0, \ldots, a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ *contínuas e* $x_1, \ldots, x_n : I \to \mathbb{R}$ *soluções da EDO homogênea*

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0 \tag{35}$$

Tem-se:

i) *Se* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *for L.D., então* $\det W(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$ *em* I*.*

ii) *Se* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *for L.I., então,* $\forall t \in I$, $\det W(x_1, \ldots, x_n)(t) \neq 0$*.*

Em particular, ou $\det W(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$ *ou* $\det W(x_1, \ldots, x_n)$ *não se anula em ponto algum de* I*.*

Soluções Particulares pelo Método da Variação das Constantes

- Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e $a_0, \ldots, a_{n-1}, f : I \to \mathbb{R}$ contínuas. Considere a EDO linear de ordem n

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t). \qquad (36)$$

- Seguindo um procedimento já destrito para transformar a EDO num sistema de ordem 1, segue que $x : I \to \mathbb{R}$ é solução de (36) se, e somente se, $X = (x, x', \ldots, x^{(n-1)}) : I \to \mathbb{R}^n$ for solução de

$$X' = A(t)X + B(t) \qquad (37)$$

onde, $\forall t \in I$,

Soluções Particulares pelo Método da Variação das Constantes

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix} \text{ e } B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

- Sejam $x_1, \ldots, x_n : I \to \mathbb{R}$ tais que $(x_1, \ldots, x_n)$ seja uma base do espaço das soluções da homogênea associada a (36). Caso a EDO seja a coeficientes constantes, sabemos como determinar uma tal base.
- Seja $W = W(x_1, \ldots, x_n) : I \to M_n(\mathbb{R})$. As colunas de W formam n soluções L.I. da homogênea associada a (37), i.e. da equação:

$$X' = A(t)X \tag{38}$$

Soluções Particulares pelo Método da Variação das Constantes

- Portanto, a solução geral de (38) é o conjunto das combinações lineares das colunas de W; ou seja, a solução geral é

$$X(t) = W(t)C, t \in I$$

  onde C é uma matriz coluna $nx1$ com entradas reais.

- Para se obter uma solução particular $X_p : I \to \mathbb{R}^n$ da não-homogênea (37), tentaremos X_p da forma

$$X_p(t) = W(t)C(t)$$

  com $C : I \to \mathbb{R}$ a ser determinada. Ou seja, substituímos a constante C por uma função $C(t)$, e daí o nome do método.

Soluções Particulares pelo Método da Variação das Constantes

Proposição

Com a notação acima, $X_p : I \to \mathbb{R}^n$ *é solução de* (37) *se, e somente se,* $\forall t \in I$,

$$W(t) \cdot C'(t) = B(t) \tag{39}$$

- Portanto, para encontrar uma solução particular $X_p(t) = W(t)C(t)$, basta resolver o sistema linear (39) nas entradas de $C'(t)$ e depois calcular uma primitiva desta função no intervalo I.

Soluções Particulares pelo Método da Variação das Constantes

- Note que $W(t)$ é inversível, de modo que podemos escrever $C'(t) = W(t)^{-1}B(t)$ e depois calcular a referida primitiva. Alternativamente, podemos aplicar a regra de Crammer para resolver o sistema, obtendo-se uma fórmula clássica, a saber, $\forall t \in I$, $C'(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor cuja i-ésima entrada é

$$\frac{\det \begin{bmatrix} x_1(t) & \cdots & 0 & \cdots & x_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & f(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}}{\det W(t)}$$

  onde o vetor coluna $B(t) = \big(0, \ldots, 0, f(t)\big)$ foi substituído na i-ésima coluna da matriz no numerador.
- Uma vez calculada $C(t)$, a solução particular procurada de (36) será a função $I \to \mathbb{R}$ dada pela primeira linha da matriz $W(t)C(t)$.

Soluções Particulares pelo Método da Variação das Constantes

Resumo do método da variação das constantes

1) Encontre $C : I \to \mathbb{R}$ tal que, $\forall t \in I$, $W(t) \cdot C'(t) = B(t)$;
2) Tome $x_p : I \to \mathbb{R}$ dada pela primeira linha da matriz $W(t)C(t)$.

Redução de ordem para EDO's lineares de ordem 2

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e $p, q, r : I \to \mathbb{R}$ contínuas. Considere a EDO:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{40}$$

Teorema (de Liouville)

Sejam $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ soluções da homogênea associada a (40). Então $w := \det W(y_1, y_2)$ é solução da equação

$$w' + p(x)w = 0.$$

Redução de ordem para EDO's lineares de ordem 2

Método para redução de ordem:

- Suponha que seja conhecida uma solução y_1 da homogênea associada a (40).
- O teorema de Liouville permite determinar uma outra solução y_2 de (40), linearmente independente da primeira: calcula-se w(x) pelo teorema e a seguir resolve-se a EDO de ordem 1 em y_2 dada por

$$y_1(x)y_2' - y_1'(x)y_2 = w(x)$$

- Com duas soluções L.I, y_1, y_2 da homogênea associada a (40), o método da variação das constantes pode ser aplicado para se encontrar uma solução particular de (40), e com isso encontramos a solução geral.