8^a Lista De Exercícios
Probabilidade I

1. Num retângulo, cujos vértices no plano cartesiano são os pontos (0,0), (0,2), (1,0) e (1,2), é escolhido aleatoriamente um ponto. Seja X e Y as variáveis aleatórias que representa as coordenadas (cartesianas) do ponto escolhido. (a) Determinar $F_{X,Y}(x,y)$, $f_{X,y}(x,y)$, (c) Verifique se X e Y são v.a´s independentes.

2. Suponha que a demanda diária X e Y de duas peças (A e B), pode ser considerado como uma variável aleatória com a seguinte função de probabilidade conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k(2x+2y-4), & x,y = 1,2,3. \\ 0, & c.c \end{cases}$$

   (a) Determine o valor de k, para que $f_{X,Y}(x,y)$ seja uma f.p conjunta de X e Y.
   (b) Qual é a probabilidade que um dia escolhido ao acaso a demanda da peça A seja o no mínimo igual à demanda da peça B
   (c) Se um dia determinado, a demanda do produto A foi de duas peças, qual é probabilidade que a demanda diária da peça B nesse dia seja no mínimo de duas peças.
   (d) Determine $E(2XY + Y|Y = 1)$
   (e) Determine e interprete a covariância de X e Y.
   (f) Determine $\rho(2X + 2; 3X + 4Y)$.

3. Numa caixa existem 4 bolas numeradas 3, 5, 5 e 7. Uma bola é sorteada ao acaso, seu número anotado (X_1) e devolvida à caixa. Uma segunda bola é escolhida, também ao acaso, e seu número é denotado por X_2.

   (a) Determine a distribuição conjunta de (X_1, X_2).
   (b) Obtenha as distribuições marginais de X_1 e X_2. Elas são independentes?
   (c) Encontre o valor esperado e a variância de $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$.
   (c) Obtenha a distribuição condicional de $X_1|X_2$.

4. O gerente de um banco tem interessa no comportamento conjunto das variáveis aleatórias: Y, tempo total entre a chegada do cliente ao banco (em minutos) e sua saída e X tempo que o cliente gasta na fila antes de alcançar a caixa (em minutos). Se um estatístico após o estudo dessas variáveis ele propus o seguinte modelo para a densidade conjunta de (X, Y)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4e^{-2y}, & 0 < x \leq y < \infty \\ 0, & c.c \end{cases}$$

   Assumindo que o cliente entre na fila logo depois de entrar no banco.

   (a) Considera muito provável que um cliente passe mais de um minuto no atendimento na caixa?
   (b) Qual é a probabilidade que um cliente demore mais de 45 minutos na fila do banco?
   (c) Determine o coeficiente de correlação entre os tempos estudados e interprete-o.
   (d) Determine a regressão de Y sobre X e interprete-o.

5. Seja (X, Y) um vetor aleatória bidimensional. Suponha que as curvas de regressão são lineares. Especificamente supor que $E(X|Y = y) = -\frac{3}{5}y - 3$ e $E(Y|X = x) = -\frac{3}{2}x - 2$. Determine: (a) $E(X)$ e $E(Y)$. (b) $\rho(X, Y)$

6. Duas componentes A e B de um produto natural se encontra em quantidades X e Y (ambas em gramas) no produto. Se X e Y são variáveis aleatórias com densidade conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2(x - 2xy + y), & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

   (a) Determine: $P(X - Y < 0,5)$; $P(X > 0,75)$
   (b) Determine $f_X(x)$, $f_Y(y)$ e $\rho(3X, 4 - 2Y)$
   (c) Determinar $P(0,5 < X < 1|Y <= 0,5)$.
   (d) O produto é utilizado como insumo de dois compostos; no primeiro composto cada grama de A dá um lucro de R$ 3,0 e cada grama de B dá um lucro de R$ 2,0; no segundo composto, cada grama de A dá um lucro de R$ 1,0 e cada grama de B dá um lucro de R$ 8,0. Se L_1 é o lucro obtido com o primeiro composto e L_2 é o lucro com segundo composto. Obtenha: (i) $\rho(L1, L2)$ e (ii) O lucro esperado se são fabricados os dois compostos.

7. Os tempos de vida, X e Y, de duas peças de certa maquina são tidos como varíaveis aleatórias independentes, com distribuição exponencial com parâmetros λ_1 e λ_2 respectivamente. Determine:

(a) a função de distribuição acumulada de X e Y.

(b) $P[X < \lambda_1, Y > 2\lambda_2]$.

(c) $P[X > Y]$.

(d) $\rho(XY + 2X, 3X + Y)$.

8. Seja X e Y variáveis aleatórias independentes, cada uma tendo a mesma distribuição Geométrica com parâmetro $\theta \in (0, 1)$. Determine $P[X = Y]$.

9. Suponha que a variável aleatória X tem distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$. Assumir que a distribuição condicional de Y dado $X = x$ têm distribuição Binomial com parâmetros n e $p = x$; ou seja,

$$f_{Y|X}(y) = \begin{cases} \binom{n}{y} x^y (1-x)^{n-y}, & y = 0, 1, \ldots, n \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

(a) Determinar $E[Y]$ e $Var(Y)$,

(b) Determinar $f_Y(y)$.

10. Seja (X, Y) um vetor aleatório bidimensional. Suponha que (i) X tem distribuição exponencial com parâmetro $1/2$ e (ii) para cada $x > 0$, a distribuição condicional de Y dado $X = x$ é $U_c(0, x^2)$. Ou seja, $X \sim Ex(1/2)$ e $Y|X = x \sim U(0, x^2)$. (a) Determine a esperança matemática da variável $Z = Y/X^2$. (b) Calcule $E(X)$ $E(Y)$ e $COV(2X + 1, 3Y - 10)$

11. Suponha que a variável aleatória bidimensional (X, Y) tenha função densidade de probabilidades conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} kx(x-y), \text{ se } 0 < x < 2, \ -x < y < x, \\ 0, \text{ para outros valores.} \end{cases}$$

(a) Calcule a constante k.

(b) Ache a função densidade de probabilidades marginal de X.

(c) Ache a função densidade de probabilidades marginal de Y.

(d) X e Y são independentes? Justifique.

12. Se ρ_{XY} é o coeficiente de correlação entre X e Y, e se tivermos $Z = aX + b$ e $W = cY + d$, com $a > 0$ e $c > 0$, prove que $\rho_{XY} = \rho_{ZW}$.

13. Sejam X e Y variáveis aleatórias com $\text{Var}(X) = 1$, $\text{Var}(Y) = 2$ e $\rho_{XY} = 1/2$. Determine $\text{Var}(X - 2Y)$.

14. Seja X e Y duas variáveis aleatórias independentes, tais que $X \sim N(0, 1)$ e $Y \sim \chi^2_{(k)}$, onde k é um número enteiro. Seja $W = X/\sqrt{Y}$. Determine $E(W)$ e $Var(W)$.

15. Baseados no número de vazios, uma placa de ferrita é classificada como alta, média ou baixa. Historicamente, 5% das placas são classificadas como altas, 80% como médias e 15% como baixas. Uma amostra de 20 placas é selecionada para teste. Faça X_1, X_2 e X_3 denotarem o número de placas que são classificadas, independentemente, como altas, médias e baixas, respectivamente.

(a) Quais são os nomes e os valores da distribuição de probabilidades conjuntas de X_1, X_2 e X_3?

(b) Determine o vetor de médias e matriz de correlação de $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)$.

(c) Determine $P(X_1 = 1, X_2 = 17, X_3 = 2)$ e $P(X \leq 1)$

16. Uma corretora de negocia título na Bolsa de Valores e utiliza um modelo probabilístico para avaliar o lucro seus lucros. Suas aplicações financeiras de compra e venda atingem três áreas: agricultura, industria e comércio. Admite que o seguinte modelo representa o comportamento do lucro diário da corretora (em milhares de dólares)$L = 3L_A + 5L_I + 4L_C$, com L_A, L_I e L_C representando respectivamente os lucros diários nos setores de agricultura, industria e comércio. As distribuições de probabilidade dessas variáveis aleatórias são $L_A \sim N(3, 5)$, $L_I \sim N(6, 9)$ e $L_C \sim N(4, 16)$. Supondo independência entre os três setores, qual será a probabilidade de um lucro diário acima de 50 mil ?.

17. A capacidade máxima de um elevador é de 500 kg. Se a distribuição X dos pesos dos usuários for suposta $N(70, 100)$:

(a) Qual é a probabilidade de sete passageiros ultrapassarem esse limite?

(b) E seis passageiros?

18. Um professor da disciplina de Estatística e Probabilidade, notou que as notas de duas provas têm distribuição normal bivariada, com parâmetros $\mu_1 = 7,5$, $\mu_2 = 8,3$, $\sigma_1^2 = 0,25$, $\sigma_2^2 = 0,16$ e $\rho = 0,8$.

(a) Se um aluno da sala recebe uma nota de 8,, qual é a probabilidade de que ele se saia melhor na segunda prova?

(b) Como é afetada a resposta em (a), se $\rho = -0.8$.

(c) Suponha que a disciplina teve somente duas provas, qual é a probabilidade que nota média de um aluno na disciplina seja superior a 7?