Distribuição normal Multivariada e a Distribuição multinomial

Vicente Garibay Cancho

10 de novembro de 2023

Vetores aleatórios multidimensionais

Seja $\boldsymbol{S}$ o espaço amostral associado a um experimento aleatório e $X_1, \ldots, X_p$ são funções, onde cada um atribui um número real $X_1(\omega) = x_1, \ldots, X_p(\omega) = x_p$ a cada $\omega \in S$ é chamado de vetor aleatório $p-$dimensional, $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_p)^\top$, como contradomínio, $R_{\boldsymbol{X}} \subset \mathbb{R}^p$.

Se $\boldsymbol{X}$ é um vetor aleatório discreto então a f.p. conjunta definida por $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_p) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_p = x_p)$, para cada $(x_1, \ldots, x_p) \in R_{\boldsymbol{X}}$. A f.p. satisfaz

i) $0 \leq f(\boldsymbol{x}) \leq 1$, $\forall (x_1, \ldots, x_p)$.

ii) $\sum \ldots \sum f(x_1, \ldots, x_p) = 1$.

iii) Para qualquer $A \subset R_{\boldsymbol{X}}$, $P(A) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} \in A) = \sum_A f(x_1, \ldots, x_p)$

Vetores aleatórios multidimensionais

Se $\boldsymbol{X}$ é um vetor aleatório contínuo, a f.d.p. conjunta de $\boldsymbol{X}$, é uma função $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_p)$ que satisfaz:

i) $f(\boldsymbol{x}) > 0$, $\forall \boldsymbol{x} \in R_{\boldsymbol{X}}$.

ii) $\displaystyle\int \ldots \int f(x_1, \ldots, x_p) dx_1 \ldots dx_p = 1$.

iii) Para qualquer $A \subset R_{\boldsymbol{X}}$,
$P(A) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} \in A) = \int_A f(x_1, \ldots, x_p) dx_1 \ldots dx_p$.

Distribuição marginal e condicional

Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_p)$ um vetor aleatório p-dimensional com f.p. ou f.d.p. conjunta, $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_p)$. Considere a partição do vetor $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2) = (X_1, \ldots, X_r, X_{r+1}, \ldots, X_p)$, tal que R_i é o suporte ou contradomínio, $\boldsymbol{X}_i$, $(i = 1, 2)$.

1) A f.d.p. conjunta do vetor $\boldsymbol{X}_1$ é dada por
   $f_1(\boldsymbol{x}_1) = \int \cdots \int f(x_1, \ldots, x_p) dx_{r+1} \ldots dx_p$.
2) A f.d.p. conjunta do vetor $\boldsymbol{X}_1$ dado $\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{x}_2$ é dada por

$$f_{\boldsymbol{X}_1|\boldsymbol{X}_2} = \frac{f(x_1, \ldots, x_p)}{f_2(x_{r+1}, \ldots, x_p)} = \frac{f(\boldsymbol{x})}{f_2(\boldsymbol{x}_2)}.$$

   onde $f_2(\boldsymbol{x}_2)$ é a f.d.p conjunta de $\boldsymbol{X}_2 = (X_{r+1}, \ldots, X_p)$.

Vetor de médias e matriz de variâncias e covariâncias

O **vetor de médias** de $\boldsymbol{X}$ é $\boldsymbol{\mu}_{p\times 1}$ e a **matriz de variâncias e covariâncias** (populacionais) de $\boldsymbol{X}$ é $\Sigma_{p\times p}$, em que

$$\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{pmatrix} \text{ e } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2p} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{sim.} & & & \sigma_p^2 \end{pmatrix}$$

Obs: Note que Σ é simétrica pois $Cov(X_i, X_k) = Cov(X_k, X_i)$, para $i, j = 1, \dots, p$.

Matriz de correlações

A **matriz de correlações** de $\boldsymbol{X}$ é $\boldsymbol{\rho} = \{\rho\}_{p \times p}$, em que

$$\boldsymbol{\rho} = Cor(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1p} \\ & 1 & \dots & \rho_{2p} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{sim.} & & & 1 \end{pmatrix}$$

- $\boldsymbol{\rho}$ é uma matriz simétrica
- $-1 \leq \rho_{ik} \leq 1$ para $i \neq k$ e $i, k = 1 \dots, p$.

Matriz de variâncias e covariâncias (populacionais)

Matricialmente,

$$Cov(\boldsymbol{X}) = \Sigma = E[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})^\top].$$

Além disso,

$$Cor(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\rho} = (V^{1/2})^{-1}\Sigma(V^{1/2})^{-1} = V^{-1/2}\Sigma V^{-1/2},$$

em que

$$V^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{pmatrix}$$

Variância-Covariância: Exemplo

Considere a matriz de variância-covariâncias

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

A Matriz

$$V^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{4} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{9} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

e

$$V^{-1/2} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Variância-Covariância: Exemplo

A matriz de correlações resulta

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho} &= V^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}V^{-1/2} \\
&= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1/5 \\ 1/6 & 1 & -1/5 \\ 1/5 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}
$$

Distribuição Normal Multivariada

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2 se sua função densidade é dada por

$$f(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)\sigma^{-2}(x-\mu)\right\}, \quad x \in R.$$

- O expoente da densidade normal univariada: $(x-\mu)(\sigma^2)^{-1}(x-\mu)$ mede a distância quadrada de x em relação à μ em unidade de desvido padrão.
- Esta distância pode ser generalizada para o caso multivariado, com vetor $\boldsymbol{X}$ de ordem $p \times 1$ dada por,

  $$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$$

  onde $\boldsymbol{\mu}$ é o vetor valores esperados do vetor $\boldsymbol{X}$ e Σ a matriz de covariâncias de $\boldsymbol{X}$.

Distribuição Normal Multivariada

Definição

Dizemos que um vetor aleatório $\boldsymbol{X}$ de ordem $(p \times 1)$ tem distribuição normal multivariada (ou p-variada) com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de variâncias e covariâncias Σ de ordem $p \times p$, se sua função de densidade conjunta é dada por

$$f(\boldsymbol{x}) = (2\pi|\Sigma|)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}, \ \boldsymbol{x} \in R^p. \qquad (1)$$

onde $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}$.

Notação: $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Distribuição Normal Multivariada

Exemplo (Normal bivariada)

Para $p = 2$, a f.d.p. dada em (1) é dada em termos dos parâmetros individuais

$$f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-1}|\Sigma|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}, \ \boldsymbol{x} \in R^2. \quad (2)$$

onde $\boldsymbol{x} = \binom{x_1}{x_2}$, $\boldsymbol{\mu} = \binom{\mu_1}{\mu_2}$ *e* $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$.

Introduzindo o coeficiente de correlação de X_1 e X_2, $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} \to \sigma_{12} = \rho\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}$. Daí temos que,

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} \sigma_{22} & -\rho\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}} \\ -\rho\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}} & \sigma_{11} \end{pmatrix}$$

Distribuição normal bivariada

O vetor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^\top$ tem distribuição normal bivariada, se sua f.d.p. conjunta é dada por:

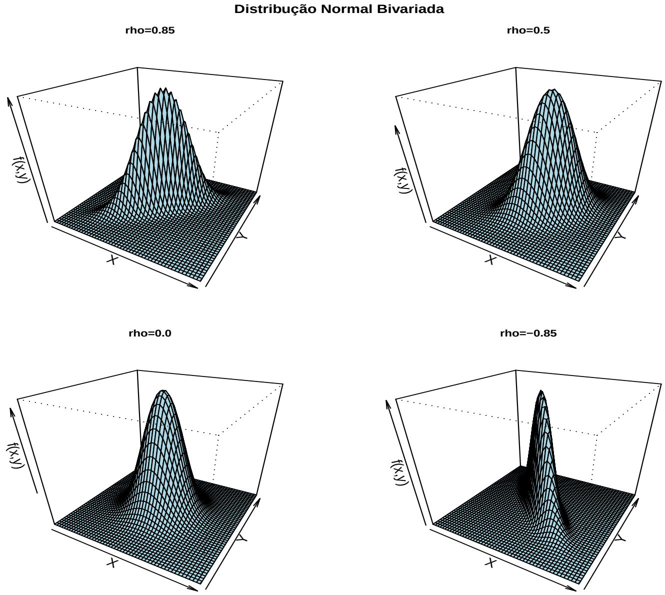
$$f(x_1, x_2) = \frac{(\sigma_1\sigma_2)^{-1}}{2\pi(1-\rho^2)} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right.\right.$$
$$\left.\left. -2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\}$$

com $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, onde μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2 e ρ são parâmetros da distribuição normal bivariada.

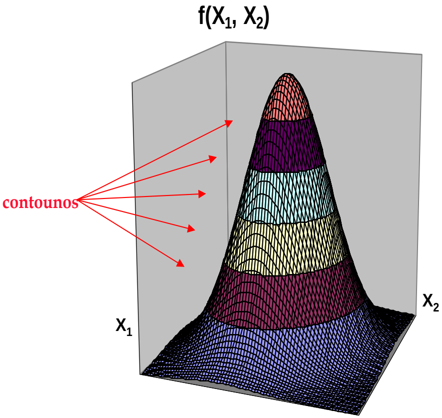
Notação:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}\right)$$

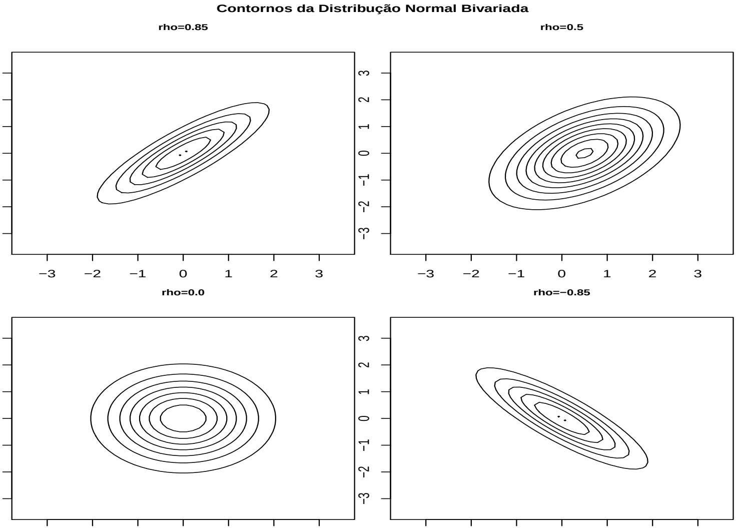
Distribuição normal bivariada



Contornos da distribuição normal bivariada



Distribuição normal bivariada



Distribuição normal bivariada

Propriedades

i) $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2.$

ii) $\rho(X_1, X_2) = \dfrac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}} = \rho$ (Coeficiente de correlação de Pearson).

iii) A distribuição condicional de X_1 dado $X_2 = x_2$ é normal com média, $E[X_1|X_2 = x_2] = \mu_1 + \rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2)$ e Variância $Var(X_1|X_2 = x_2) = \sigma_1^2(1 - \rho^2)$.

iv) Similarmente, $X_2|X_1 = x_1 \sim N\left(\mu_2 + \rho(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})(x_1 - \mu_1), \sigma_2^2(1 - \rho^2)\right)$.

v) Se $\rho = 0 \Rightarrow X_1 \perp X_2$.

vi) A v.a $Y = a_1X_1 \pm a_2X_2 \sim N(\sum_{i=1}^{2} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{2} a_i\sigma_i^2 \pm 2a_1a_2\rho\sigma_1\sigma_2)$

vii) A v.a $Z = (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi^2_{(2)}$

Exemplo

Na tentativa de substituir um teste destrutivo por um procedimento de teste não-destrutivo, foi feito um estudo extensivo da força de cisalhamento, X_2 e o diâmetro de solda X_1, de pontos de solda. Supor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2) \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, com $\mu_1 = 0,20$ polegadas, $\mu_2 = 1100$ libras, $\sigma_1^2 = 0,02$ libras^2, $\sigma_2^2 = 525$ polegados^2 e $\rho = 0,99$. (a) Determine a regressão de X_2 sobre $X_1 = x_1$ e sua respectiva variância. (b) Se o diâmetro de solda tem um diâmetro de 0,18 polegadas, qual é a probabilidade de a força do cisalhamento seja no minimo de 1080 libras?

- Dos resultados tem-se a regressão de X_2 sobre X_1

$$
\begin{aligned}
E[X_2|X_1 = x_1] &= \mu_2 + \rho(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})(x_1 - \mu_1) \\
&= 1100 + 0,99\left(\frac{\sqrt{525}}{\sqrt{0,02}}\right)(x_1 - 0,2) \\
&= 1070,8 + 145,8x_1
\end{aligned}
$$

A variância é

$$Var(X_2|X_1) = \sigma_2^2(1 - \rho^2) = 525 \times 0,19 = 99,75.$$

Exemplo

(b) Do enunciado tem-se interesse em
$P[X_2 \geq 1080|X_1 = 0,18] =?$.
$E[X_2|X_1 = 0,18] = 1070,8 + 145,8(0,18) = 1097,05$ e
$Var(X_2|X_1) = 99,75$.
Dai tem-se: $X_2|X_1 = 0,18 \sim N(1097,05, 99,75)$.

$$\begin{aligned} P[X_2 \geq 1080|X_1 = 0,18] &= P\left[Z \geq \frac{1080 - 1097,05}{\sqrt(99,75)}\right] \\ &= P[Z \geq -1,71] = 1 - P[Z \leq -1,71] \\ &= 1 - \Phi(-1,71) = 0,9564. \end{aligned}$$

Teorema (Combinação linear de variáveis aleatórias)

Seja $X_1, \ldots, X_p$, p variáveis aleatórias e seja $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, p)$. Então, a v.a.

$$Y = a_1 X_1 + \ldots + a_p X_p$$

tem média

$$E[Y] = \mu_Y = a_1 E[X_1] + \ldots + a_p E[X_p] = \sum_{i=1}^{p} a_i E[X_i]$$

e Variância

$$Var(Y) = \sigma_Y^2 = a_1^2 Var(X_1) + \ldots + a_p^2 Var(X_p) + 2 \sum_{i<j} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

.

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
Var(Y) =& E[(Y - E[Y])^2] \\
& = E[\{a_1(X_1 - E[X_1]) + \ldots + a_p(X_p - E[X_p])\}^2] \\
=& E[a_1^2(X_1 - E[X_1])^2] + \ldots + E[a_p^2(X_p - E[X_p])^2] + \\
& 2E[a_1 a_2(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])] + \ldots \\
& + 2E[a_1 a_p(X_1 - E[X_1])(X_p - E[X_p])].
\end{aligned}
$$

■

Exemplo

As variáveis aleatórias X_1, X_2 *e* X_3 *representam comprimento, largura e altura respectivamente de peças (com base retangular) fabricadas por uma industria. Sabe-se que,* $E(X_1) = 2cm$, $Var(X_1) = 0,01cm^2$, $E(X_2) = 5cm$, $Var(X_2) = 0,04cm^2$ *e* $E(X_3) = 0.5cm$, $Var(X_3) = 0,025cm^2$ *(a) Suponha que* X_1 X_2 *e* X_3 *são v.as independentes, determine o valor esperado do volume da peça. (b) Suponha que* $\rho(X_1, X_2) = 3/4$, *determine valor esperado do perímetro da base e sua respectiva variância.*

Solução: (a) A v.a, $V = X_1X_2X_3$ representa o volume da peça. Então

$$E(V) = E[X_1X_2X_3] = E[X_1]E[X_2]E[X_3] = (2)(5)(0,5) = 5\ cm^3.$$

(b) A v.a $P = 2X_1 + 2X_2$ (perímetro da base)

$$E[P] = 2E[X_1] + 2E[X_2] = 2(2) + 2(5) = 14cm$$

$$\begin{aligned} Var[P] &= 4Var[X_1] + 4VarE[X_2] + 8cov(X_1, X_2) \\ &= 4(0,01) + 4(0,04) + 8(3/4)(0,1)(0,2) = 0,32 \end{aligned}$$

Combinação linear da variáveis aleatórias normais

Teorema

Seja $X_1, \ldots, X_p$ v.a.'s independentes, tal que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, p$. Então, a v.a.

$$Y = a_1 X_1 + \ldots + a_p X_p$$

tem distribuição normal com média

$$E[Y] = \mu_Y = \sum_{i=1}^{p} a_i \mu_i$$

e variância

$$Var(Y) = \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{p} a_i^2 \sigma_i^2$$

Demonstração: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então a f.g.m. $m_X(t) = E[e^{tX}] = e^{\mu t + t^2\sigma^2/2}$. A f.g.m. da v.a. Y,

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E[e^{tY}] = E[e^{t(a_1X_1+\ldots+a_pX_p)}] \\ &= E[e^{ta_1X_1}\ldots e^{ta_pX_p}] \underbrace{=}_{X_i \text{ são ind.}} E[e^{ta_1X_1}]\ldots E[e^{ta_pX_p}] \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= m_{X_1}(a_1t)\ldots m_{X_p}(a_pt) = e^{t\sum_{i=1}^{p} a_i\mu_i + t^2\sum_{i=1}^{p} a_i^2\sigma_i^2/2} \\ &= e^{t\mu_Y + t^2\sigma_Y^2/2}, \end{aligned}$$

Assim,

$$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2).$$

■

Observação

i) se $a_i = 1$, então

$$Y = \sum_{i=1}^{p} X_i \sim N(\sum_{i=1}^{p} \mu_i, \sum_{i=1}^{p} \sigma_i^2);$$

ii) se $a_i = 1/n$, então

$$Y = \overline{X}_n \sim N(\sum_{i=1}^{p} \mu_i/n, \sum_{i=1}^{p} \sigma_i^2/n^2),$$

iii) se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $a_i = 1$, então $Y = \sum_{i=1}^{p} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$;

iv) se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $a_i = 1/n$, então

$$Y = \overline{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n).$$

Distribuição multinomial

Suponha que um experimento aleatório consiste em n ensaios.

(i) o resultado de cada ensaio seja classificado em uma das k classes;

(ii) a probabilidade de um ensaio gerando um resultado na classe 1, classe 2,..., classe k é constante ao longo dos ensaios e igual a $\theta_1, \ldots, \theta_k$ respectivamente;

(iii) os ensaios são independentes.

As variáveis aleatórias,$X_1, \ldots, X_k$ que denotam o número de tentativas que resulta a classe 1, classe 2,..., classe k nos n ensaios. O vetor aleatório $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)$, têm distribuição multinomial, com f.p. conjunta dada por:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1!, \ldots, x_k!} \theta_1^{x_1} \theta_2^{x_1} \ldots \theta_k^{x_k}, & x_j \in \{0, 1, \ldots, n\} \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

onde $\sum_{j=1}^{k} \theta_j = 1$ e $\sum_{j=1}^{k} x_j = n$. **Notação:** $\boldsymbol{X} \sim M(n, \theta_1, \ldots, \theta_k)$

Distribuição multinomial

Se $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{M}(n, \pi_1, \ldots, \pi_k)$, tem-se

(i) $X_j \sim \text{Binomial}(n, \theta_j)$, $j = 1, \ldots, k$.

(ii) $E[X_j] = n\theta_j$ e $Var(X_j) = n\theta_j(1 - \theta_j)$

(iii) $Cov(X_i, X_j) = -n\theta_i\theta_j \; (i \neq j)$

(iv) $\rho(X_i, X_j) = -\sqrt{\frac{\theta_i\theta_j}{(1-\theta_i)(1-\theta_j)}}$

Distribuição multinomial

Exemplo

No desenvolvimento de um novo receptor para transmissão de informação digital, cada bit recebido pode ser classificado como excelente, boa, razoável ou pobre, denotados por E, B, R e P respectivamente, em uma transmissão de 20 bits, qual é a probabilidade de 14 serem excelentes, 3 serem bons, 2 serem razoáveis e 1 ser pobre? Considere que as classificações de bits individuais sejam independentes e que as probabilidades de E, B, R, e P são iguais a 0,6; 0,3; 0,08 e 0,02 respectivamente.

- Faça que as variáveis X_1, X_2, X_3, X_4 denotarem o número de bits que são E, B, R e P, respectivamente, em uma transmissão de 20 bits.
- Daí $\boldsymbol{X} \sim M(20, 0, 6; 0.3; 0, 08; 0, 02)$
- Daí a probabilidade de que 12 dos bits recebidos sejam E, 6 sejam B, 2 sejam R e 0 seja P é dado por:

$$f(12, 6, 2, 0) = \frac{20!}{12! \times 6! \times 2! \times 0!}(0, 6)^{12}(0, 3)^{6}(0, 08)^{2}(0, 02)^{0}$$