Gabarito P1 - MEB

1.

a) Escreva $\frac{5}{32}$ em representação decimal.

32 não divide 5, logo: $5 \,\underline{|32}$ $\;\; 0;$

$5 \times 60 = 300$ $\qquad$ $12 \times 60 = 720$ $\qquad$ $16 \times 60 = 960$

$\Rightarrow 300 \,\underline{|32}$ $\qquad$ $\Rightarrow 720 \,\underline{|32}$ $\qquad$ $960 \,\underline{|32}$

$\underline{-288} \;\; 9$ $\qquad$ $\underline{-704} \;\; 22$ $\qquad$ $\underline{-960} \;\; 30$

12 $\qquad$ 16 $\qquad$ 0

Então $\frac{5}{3} = 0;9,22,30$ na escrita sexigesimal.

b) Sistema linear $\begin{cases} x + y = 6;30 \\ xy = 7;30 \end{cases}$. Encontre as soluções x e y do sistema

$$6;30 = 6 \cdot 60^0 + 30 \cdot \frac{1}{60} = 6,5$$

$$7;30 = 7 \cdot 60^0 + 30 \cdot \frac{1}{60} = 7,5 \qquad \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6,5 & (1) \\ xy = 7,5 & (2) \end{cases}$$

Tomando $y = 6,5 - x$ de (1), temos substituindo em (2):

$$x \cdot (6,5 - x) = 7,5$$

$$6,5x - x^2 = 7,5 \qquad\qquad \Delta = 42,25 - 4 \cdot 1 \cdot 7,5 = 12,25$$

$$\Rightarrow x^2 - 6,5x + 7,5 = 0 \qquad\qquad \text{Então } x = \frac{6,5 \pm \sqrt{12,25}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6,5 \pm 3,5}{2}, \text{ então } x' = 5 \text{ ou } x'' = 1,5$$

Se $x = 5$ então $y = 1,5$ e se $x = 1,5$ então $y = 5$

Assim, as soluções do sistema são 5 e 1;30 na escrita sexagesimal babilônica.

c) Considere os números de 4 dígitos $x = abcd$ e $y = dabc$, ambos na base 10. Mostre que $x + y$ é múltiplo de 11.

Temos que $x = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$ e

$y = d \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$

Somando, temos:

$$
\begin{aligned}
x + y &= a(10^3 + a^2) + b(10^2 + 10) + c(10 + 1) + d(10^3 + 1) \\
&= 1100a + 110b + 11c + 1001d \\
&= 11 \cdot (100a + 10b + c + 91d)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ $x + y$ é múltiplo de 11.

2.

a) Determine a representação decimal de $0,888\ldots + (0,888)^2$

$= 0,\overline{8} + (0,\overline{8})^2$

Temos que $0,\overline{8} = \frac{8}{9}$ e $(0,\overline{8})^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{64}{81}$

$\Rightarrow \frac{8}{9} + \frac{64}{81} = \frac{72+64}{81} = \frac{136}{81} = 1,\overline{67901235}$

b) Mostre que $\sqrt[3]{10}$ é um número irracional.

Suponha que $\sqrt[3]{10}$ é um número racional. Então $\sqrt[3]{10}$ pode ser escrito como $\frac{a}{b}$ tal que a, b são primos entre si.

Logo:

$\sqrt[3]{10} = \frac{a}{b} \Rightarrow 10 = \left(\frac{a}{b}\right)^3 = 10 = \frac{a^3}{b^3} \Rightarrow a^3 = 10b^3$

$\Rightarrow 10$ divide $a^3 \Rightarrow a^3$ é multiplo de 10

Podemos escrever qualquer número inteiro como produto de primos. Assim,

$a = P_1 P_2 \ldots P_n \Rightarrow a^3 = P_1^3 P_2^3 \ldots P_n^3$

Assim se a^3 é multiplo de 10, então é porque podemos assumir sem perda de generalidade que $P_1 = 2$ e $P_2 = 5$ estão em a^3

$\Rightarrow P_1 = 2$ e $P_3 = 5$ estão em $a \Rightarrow a$ é múltiplo de 10.

Assim, podemos escrever $a = 10 \cdot k \Rightarrow a$ é multiplo de k.

Mas $b^3 = \frac{a^3}{10} \Rightarrow b^3 = \frac{(10 \cdot k)^3}{10} \Rightarrow b^3 = \frac{10^3 \cdot k^3}{10}$

$\Rightarrow b^3 = 10^2 \cdot k^3 \Rightarrow b = \sqrt[3]{10^2 k^3} = k\sqrt[3]{100}$

$\Rightarrow b$ é múltiplo de k. Mas então $mdc(a,b) = k$ e $\frac{a}{b}$ não é irredutível. Contradição. Logo, $\sqrt[3]{10}$ é irracional.

c) Mostre que se x é um número irracional, então $\sqrt[3]{x}$ é um número irracional.

Vamos supor que x é um número irracional e que $\sqrt[3]{x}$ é racional.

Se $\sqrt[3]{x}$ racional, então pode ser escrito como uma fração irredutível $\frac{a}{b}$ tal que a e b são primos entre si.

Logo, $\sqrt[3]{x} = \frac{a}{b} \Rightarrow x = \left(\frac{a}{b}\right)^3 \Rightarrow x$ é o cubo de um racional $\Rightarrow x$ racional.

Absurdo pela suposição inicial. Logo, se x é irracional, $\sqrt[3]{x}$ é irracional.

3.

a) Determine como escrever $\frac{1}{n}$ como a soma de duas frações unitárias, sendo $\frac{1}{n+1}$ uma delas.

Se podemos escrever $\frac{1}{n}$ como a soma de $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{x}$, então $\exists\, x$ tal que

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{n^2+n}$$

Logo, $x = n^2 + n$ e, assim $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n^2+n}$ e então $\frac{1}{n}$ pode ser escrito como a soma de duas frações unitárias sendo $\frac{1}{n+1}$ uma delas.

b) Se n é ímpar, mostre que é possível escrever $\frac{2}{n}$ como soma de duas frações unitárias.

Queremos escrever $\frac{2}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

Temos n ímpar, logo pode ser escrito pela forma $2a+1$.

Então queremos $\frac{2}{2a+1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

De acordo com o papiro encontrado em Akhmim, temos que

$$\frac{z}{pq} = \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr}, \text{ onde } r = \frac{(p+q)}{z}.$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(2a+1)} = \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr} \qquad 2a+1 = pq, \quad p = 2a+1 \text{ e } q = 1$$

$$r = \frac{2a+1+1}{2} = \frac{2a+2}{2} = a+1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{2a+1} = \frac{1}{(2a+1)(a+1)} + \frac{1}{1\cdot(a+1)}$$, sendo $n = 2a+1$ ímpar e $a \in \mathbb{N}$.

Assim, $\frac{2}{n} = \frac{1}{n(a+1)} + \frac{1}{a+1}$, e então conseguimos escrever $\frac{2}{n}$ como a soma de duas frações unitárias.

Solução alternativa: no item anterior provamos que

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)}$$

Podemos multiplicar essa expressão por 2 e escrever $n = 2a+1$, pois n ímpar, e então:

$$\frac{2}{2a+1} = \frac{2}{2a+2} + \frac{2}{(2a+1)(2a+2)} \Rightarrow \frac{2}{2a+1} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2a^2+3a+1}$$

Logo, $\frac{2}{n}$, com n ímpar, pode ser escrita como a soma de frações unitárias.

c. Escreva $\frac{2}{97}$ como soma de duas frações unitárias.

De acordo com o papiro encontrado em Akhmim, temos que

$$\frac{z}{pq} = \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr}, \text{ onde } r = \frac{(p+q)}{z}.$$

Assim $\frac{2}{97} = \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr}$, $z = 2$, $p = 97$, $q = 1$, $r = \frac{(97+1)}{2} = 49$

$$\Rightarrow \frac{2}{97} = \frac{1}{97\cdot 49} + \frac{1}{1\cdot 49} \Rightarrow \frac{2}{97} = \frac{1}{4753} + \frac{1}{49}$$

Solução alternativa: Utilizando que podemos escrever

$$\frac{2}{2a+1} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2a^2+3a+1}$$ e, como 97 é ímpar, $97 = 2a+1 \Rightarrow a = 48$

Logo, $\frac{2}{2.48+1} = \frac{1}{48+1} + \frac{1}{2.(48)^2+3.48+1} \Rightarrow \frac{2}{97} = \frac{1}{49} + \frac{1}{4753}$

4.

a) Temos 3 opções de pagamento:

(i) À vista, 4% de desconto
(ii) 2 prestações mensais iguais, sem desconto, a primeira vencendo 1 mês após a compra;
(iii) 3 prestações iguais mensais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra;

(i) $0{,}96\,P$

(ii) $\frac{P}{2(1{,}03)} + \frac{P}{2(1{,}03)^2} \cong 0{,}9567\,P$

(iii) $\frac{P}{3} + \frac{P}{3(1{,}03)} + \frac{P}{3(1{,}03)^2} \cong 0{,}9711\,P$

$\Rightarrow$ 2ª opção mais vantajosa.

b) 99 $\rightarrow$ 4 homens mortos $\rightarrow$ 1 homem 20 dedos (pés e mãos), então 4 são 80 dedos

$\rightarrow$ 2 mãos até o fim $\rightarrow$ 10 dedos

$\rightarrow$ 1 pé completo $\rightarrow$ 5 dedos

$\rightarrow$ mais 4 $\rightarrow$ 4 dedos.

Então 99 = 80 dedos + 10 dedos + 5 dedos + 4 dedos

9 $\rightarrow$ Kokanto "parece alguém que está no ventre" se refere aos 9 meses de gestação de um ser humano.