PQI-5884 - Programação Inteira Mista aplicada à Otimização de Processos
3º Período 2023

Data	Atividade	Conteúdo
14/set	Aula 1	Introdução, formulação, classes, representação
21/set	Aula 2	Condições de otimalidade
28/set	Aula 3	Condições KKT, multiplicadores
06/out*	Aula 4	Otimização irrestrita
19/out	Aula 5	LP
26/out	Aula 6	NLP
09/out	**Aula 7**	**MILP**
17/nov*	Aula 8	MILP, problemas clássicos
23/nov	Aula 9	MILP, problema de scheduling
30/nov	Aula 10	MINLP, problema de síntese
07/dez	-	Apresentações

MILP: Mixed Integer Linear Programming

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = \underline{c}_1^T.\underline{x} + \underline{c}_2^T.\underline{y} \\
\text{s.a.} \quad & \underline{\underline{A}}.\underline{x} + \underline{\underline{B}}.\underline{y} = \underline{d}_1 \\
& \underline{\underline{C}}.\underline{x} + \underline{\underline{D}}.\underline{y} \le \underline{d}_2 \\
& \underline{x} \in \Re^n \\
& \underline{y} \in \{0, 1\}^m
\end{aligned}
$$

$$
y_i = \begin{cases} 1 & \text{se a proposição } Y_i \text{ for verdadeira} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}
$$

2

Representação de Variáveis Discretas

$w \in \{w_1, w_2, w_3, \ldots\} \Longrightarrow$

$$w = \sum y_{wi}.w_i$$
$$\sum y_{wi} = 1$$
$$w \in \Re^1$$
$$y_{wi} \in \{0,1\}$$

Exemplo: $D_{tubo} = \{ ½, ¾, 1, 1 ¼ \}$

Modelagem usando variáveis binárias:

$$D_{tubo} = (½).y_1 + (¾).y_2 + (1).y_3 + (1 ¼).y_4$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1$$
com $D_{tubo} \in \Re^1$

$\underline{y} \in \{0,1\}^4$

Seleções de múltipla escolha $\underline{y} = [\, y_1 \;\, y_2 \;\, y_3 \ldots y_m \,]^T$

Exemplos:

a) Apenas uma: $\sum y_i = 1$

b) Pelo menos três: $\sum y_i \geq 3$

c) No máximo duas: $\sum y_i \leq 2$

Condição / Implicação – Se ... então... $Y_1 \Rightarrow Y_2$

Se Y_1 for verdadeiro, então Y_2 é verdadeiro

y_1	y_2	$Y_1 \Rightarrow Y_2$
0	0	V
0	1	V
1	0	F
1	1	V

$y_2 \geq y_1$ $\Rightarrow$ $\boxed{y_1 - y_2 \leq 0}$

Equivalência – Se e somente se $Y_1 \Leftrightarrow Y_2$

A proposição Y_1 é verdadeira se, e somente se, a proposição Y_2 for verdadeira

y_1	y_2	$Y_1 \Leftrightarrow Y_2$
0	0	V
0	1	F
1	0	F
1	1	V

$y_2 = y_1$ $\Rightarrow$ $\boxed{y_1 - y_2 = 0}$

Conjunção $Y_1 \wedge Y_2$

A proposição Y_1 é verdadeira e a proposição Y_2 é verdadeira

y_1	y_2	$Y_1 \wedge Y_2$
0	0	F
0	1	F
1	0	F
1	1	V

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= 1 \end{aligned}}$$

Disjunção $Y_1 \vee Y_2$

A proposição Y_1 é verdadeira ou a proposição Y_2 é verdadeira

y_1	y_2	$Y_1 \vee Y_2$
0	0	F
0	1	V
1	0	V
1	1	V

$$y_1 + y_2 \geq 1 \Rightarrow \boxed{1 - y_1 - y_2 \leq 0}$$

Disjunção exclusiva $\quad Y_1 \veebar Y_2$

A proposição Y_1 é verdadeira <u>ou, exclusivamente,</u> a proposição Y_2 é verdadeira.

y_1	y_2	$Y_1 \veebar Y_2$
0	0	F
0	1	V
1	0	V
1	1	F

$$y_1 + y_2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y_1 + y_2 - 1 = 0}$$

Negação $\qquad \neg Y_1 \quad$ ou $\quad \sim Y_1$

Exemplo: Y_1 é verdadeiro ou Y_2 é falso $\qquad Y_1 \vee \neg Y_2$

y_1	y_2	$(1 - y_2)$	$Y_1 \vee \neg Y_2$
0	0	1	V
0	1	0	F
1	0	1	V
1	1	0	V

Múltipla escolha usando (1–*y*) em vez de *y*:

$$y_1 + (1 - y_2) \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y_2 - y_1 \leq 0}$$

Exemplo 1:
Se o reator A for selecionado, então não selecionar o separador B:
$Y_A \Rightarrow \neg Y_B$

y_A	y_B	$Y_A \Rightarrow \neg Y_B$
0	0	V
0	1	V
1	0	V
1	1	F

$$\boxed{y_A + y_B \leq 1}$$

Exemplo 2:
Produtos B1, B2 e B3 fazem parte da linha básica e produtos L1 e L2 fazem parte da linha luxo. No planejamento da produção, devem ser escolhidos pelo menos um básico e pelo menos um luxo.

Conjunção de duas disjunções:
$(Y_{B1} \vee Y_{B2} \vee Y_{B3}) \wedge (Y_{L1} \vee Y_{L2})$
em que Y_i = produzir o produto *i*

$(Y_{B1} \vee Y_{B2} \vee Y_{B3}) \rightarrow y_{B1} + y_{B2} + y_{B3} \geq 1$

$(Y_{L1} \vee Y_{L2}) \rightarrow y_{L1} + y_{L2} \geq 1$

Propriedades de expressões lógicas

Comutatividade

$(Y_A \wedge Y_B) = (Y_B \wedge Y_A)$

$(Y_A \vee Y_B) = (Y_B \vee Y_A)$

Associatividade

$Y_A \wedge (Y_B \wedge Y_C) = (Y_A \wedge Y_B) \wedge Y_C = (Y_A \wedge Y_B \wedge Y_C)$

$Y_A \vee (Y_B \vee Y_C) = (Y_A \vee Y_B) \vee Y_C = (Y_A \vee Y_B \vee Y_C)$

Distributividade

$Y_A \wedge (Y_B \vee Y_C) = (Y_A \wedge Y_B) \vee (Y_A \wedge Y_C)$

$Y_A \vee (Y_B \wedge Y_C) = (Y_A \vee Y_B) \wedge (Y_A \vee Y_C)$

Teorema de De Morgan

$\neg(Y_A \wedge Y_B) = (\neg Y_A \vee \neg Y_B)$

$\neg(Y_A \vee Y_B) = (\neg Y_A \wedge \neg Y_B)$

Equivalência para operadores não básicos

$Y_A \veebar Y_B \quad = \quad (Y_A \wedge \neg Y_B) \vee (\neg Y_A \wedge Y_B)$

$Y_A \Rightarrow Y_B \quad = \quad (\neg Y_A \vee Y_B)$

$Y_A \Leftrightarrow Y_B$

$(Y_A \Rightarrow Y_B) \wedge (Y_B \Rightarrow Y_A) \quad = \quad (\neg Y_A \vee Y_B) \wedge (\neg Y_B \vee Y_A)$

Opções				$Y_A \veebar Y_B$	$Y_A \Rightarrow Y_B$	$Y_B \Rightarrow Y_A$	$Y_A \Leftrightarrow Y_B$
y_A	y_B	$(Y_A \wedge \neg Y_B)$	$(\neg Y_A \wedge Y_B)$	$(Y_A \wedge \neg Y_B) \vee (\neg Y_A \wedge Y_B)$	$(\neg Y_A \vee Y_B)$	$(\neg Y_B \vee Y_A)$	$(\neg Y_A \vee Y_B) \wedge (\neg Y_B \vee Y_A)$
0	0	F	F	F	V	V	V
0	1	F	V	V	V	F	F
1	0	V	F	V	F	V	F
1	1	F	F	F	V	V	V

LÓGICA PROPOSICIONAL E PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Raman e Grossmann (1991)

Procedimento:

Passo 1: Converter operadores não básicos em básicos ($\wedge \vee \neg$).

Passo 2: Distribuir as negações (De Morgan).

Passo 3: Distribuir "ou" sobre "e".
Resultado: Conjunção de disjunções
$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_S$ em que $Q_i = (P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_R)$

Passo 4: Conversão para equações lineares:
Cada disjunção gera uma equação de múltipla escolha:
$(P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_R) \rightarrow y_1 + y_2 + \ldots + y_R \geq 1$
Caso haja negações, substituir y_i por $(1 - y_i)$ no somatório.
Ex: $(\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \ldots \vee \neg P_R) \rightarrow (1-y_1) + (1-y_2) + \ldots + (1-y_R) \geq 1$

Exemplo: Converter a expressão lógica $Y_A \veebar Y_B$ em equações.

Passo 1: operadores básicos
$Y_A \veebar Y_B \rightarrow (Y_A \wedge \neg Y_B) \vee (\neg Y_A \wedge Y_B)$

Passo 2: não há negações a distribuir

Passo 3: distribuir $\vee$ sobre $\wedge$

$$(Y_A \wedge \neg Y_B) \vee (\neg Y_A \wedge Y_B)$$

$$\{ (Y_A \wedge \neg Y_B) \vee (\neg Y_A) \} \wedge \{ (Y_A \wedge \neg Y_B) \vee (Y_B) \}$$

$$\{ [(Y_A) \vee (\neg Y_A)] \wedge [(\neg Y_B) \vee (\neg Y_A)] \} \wedge \{ [(Y_A) \vee (Y_B)] \wedge [(\neg Y_B) \vee (Y_B)] \}$$

pela associatividade fica:

$$\{ (Y_A \vee \neg Y_A) \wedge (\neg Y_B \vee \neg Y_A) \} \wedge \{ (Y_A \vee Y_B) \wedge (\neg Y_B \vee Y_B) \}$$

$$(Y_A \vee \neg Y_A) \wedge (\neg Y_B \vee \neg Y_A) \wedge (Y_A \vee Y_B) \wedge (\neg Y_B \vee Y_B)$$

$(Y_A \vee \neg Y_A) \wedge (\neg Y_B \vee \neg Y_A) \wedge (Y_A \vee Y_B) \wedge (\neg Y_B \vee Y_B)$

Passo 4:

$$\begin{aligned} y_A + (1 - y_A) &\geq 1 \\ (1 - y_B) + (1 - y_A) &\geq 1 \\ y_A + y_B &\geq 1 \\ (1 - y_B) + y_B &\geq 1 \end{aligned}$$

Que fica:

$$\begin{aligned} 0 &\geq 0 \\ -y_B - y_A &\geq -1 \\ y_A + y_B &\geq 1 \\ 0 &\geq 0 \end{aligned}$$

Rearranjando:

$$\begin{aligned} y_A + y_B &\leq 1 \\ y_A + y_B &\geq 1 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad y_A + y_B = 1$$

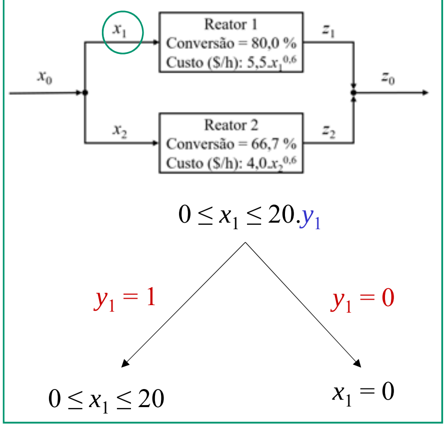
RESTRIÇÕES CONDICIONAIS EM VARIÁVEIS CONTÍNUAS (BIG-M)

Exemplo: Se o reator A não for selecionado, então sua vazão de alimentação x_A (m^3/h) deve ser nula.

$$x_A \geq 0$$
$$x_A \leq M.y_A + \varepsilon$$

$$\boxed{\begin{aligned} & x_A \geq 0 \\ & x_A \leq 20.y_A + 1.10^{-3} \end{aligned}}$$

Aula 2



Proposição: $Y \Rightarrow (\ g(\underline{x}) \leq 0\ )$

$$g(\underline{x}) \leq M.(1-y)$$

Proposição: $Y \Rightarrow (\ h(\underline{x}) = 0\ )$

$$-M.(1-y) \leq h(\underline{x}) \leq M.(1-y) + \varepsilon$$

Exemplo:

A variável x_A deve estar entre 0 e 10 ou entre 15 e 25.

Modelagem:

$$15.(1-y_A) \leq x_A \leq 10.(y_A) + 25.(1-y_A)$$

Caso $y_A = 1$, tem-se $0 \leq x_A \leq 10$

Caso $y_A = 0$, tem-se $15 \leq x_A \leq 25$