Aula 10 - Matrizes de transformações

A cada transformação linear podemos associar uma matriz indexada a bases fixadas de seu domínio e contra-domínio da seguinte forma.

Seja $T: V \mapsto W$ transf. linear $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ bases de V e W resp/te.

V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$.

Seja agora $v \in V$ $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ arbitrário.

Então $T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i)$.

Considere agora a seguinte matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

Para cada $j = 1, \ldots, n$ obtemos a_{ij} pela combinação linear dos $T(v_j)$ em $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_m\}$:

$$T(v_j) = a_{1j} w_1 + \ldots + a_{mj} w_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i .$$

Assim

$$T(v) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T(v_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1} a_{ij} \alpha_j \right) w_i$$

$$\therefore [T(v)]_{B'} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \alpha_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \alpha_j \right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$= A [v]_B \qquad A := [T]_{BB'}$$

OBS:

- As colunas de A são os coeficientes de $T(v_j)$.
- Qdo $T: V \mapsto V$ e $B = B'$ denotamos $[T]_B = [T]_{BB}$.

Exemplos:

1) $D: \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(x) \to p'(x)$.

Consideramos $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{1, x, x^2, x^3\}$

$D(1) = 0 \quad D(x) = 1 \quad D(x^2) = 2x$ e $D(x^3) = 3x^2$

$[D(1)]_{\mathcal{B}} = 0 \quad [D(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [D(x^2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

$[D(x^3)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad [D]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2) $T: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3 : (x, y) \to (2x+y, y-x, 3x)$.

$\mathcal{B} = \{(1,2), (2,1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$

$T(1,2) = (4,1,3) = 4(1,1,1) + (-3)(0,1,1) + 2(0,0,1)$

$T(2,1) = (5,-1,6) = 5(1,1,1) + (-6)(0,1,1) + 7(0,0,1)$

Daí $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Exercício: Mostre os seguintes resultados:

Prop: Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ com dimensões n e m respect/te. Seja $M \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ uma matriz. Mostre que dados $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases de V e W respect/te existe única $T: V \longmapsto W$ linear tal que $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = M$.

Teorema: Sejam $F: U \longmapsto V$ e $G: V \longmapsto W$ transformações lineares com U, V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ de dimensão n, m e r respect/te. Fixe bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$ de U, V e W respect/te. Então $[G \circ F]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [G]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[F]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

Corolário: Sejam U e V esp. vetoriais sobre $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases de U e V respect/te $\dim U = \dim V$. Mostre que $T: U \mapsto V$ linear é isomorfismo se só se $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ for invertível. Neste caso, também vale $[T^{-1}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \left([T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\right)^{-1}$.

dem. Veja que se T é isomorfismo, então

$T \circ T^{-1} =$ Identidade em U

$\therefore [I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [T \circ T^{-1}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [T^{-1}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$

pelo teorema anterior. Analogamente,

$[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [T^{-1} \circ T] = [T^{-1}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

Além disso,

$$1 = \det [I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \det [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \det [T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

$$\Longrightarrow \det [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \neq 0.$$

$$\Longrightarrow [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \in M_n(\mathbb{K}) \text{ é invertível.}$$

Por outro lado, se $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ é invertível, então $Nuc(T) = \{0\} \rightsquigarrow T$ é isomorfismo.

Com isso, mostramos o resultado. $\blacksquare$

Matriz de Mudança de Bases

Seja U espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases de U: $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Considere agora a transformação identidade $I : U \longmapsto U$ transformando vetores escritos em $\mathcal{B}$

para $\mathcal{B}'$. Então $[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ é a transformação linear que leva vetores de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$.

Tal matriz é chamada matriz mudança de bases de $\mathcal{B}'$ para $\mathcal{B}$.

OBS: Seja $T: U \mapsto U$ linear. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases de U. Se P é a matriz mudança de base de $\mathcal{B}'$ para $\mathcal{B}$

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1} [T]_{\mathcal{B}'} P.$$

Def. Duas matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ são semelhantes se $\exists\, P \in M_n(\mathbb{K})$ invertível tal que $A = P^{-1} B P$.

Exemplo: As matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[T]_{\mathcal{B}'}$ da observação acima são semelhantes.

Exercícios: seção 3.4.7: 1, 2, 3, 4, 5.