MAT-315 - Introdução à Análise (Real) - 2023

4ª Lista de exercícios

Séries Numéricas

1. Prove o critério de Cauchy para séries: Uma série $\sum a_n$ é convergente se, e somente se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$, para todo $p \in \mathbb{N}$ e $n > N$.
   Sugestão: Trabalhe com a sequência das somas parciais e use o critério de Cauchy tradicional. Note que se $m > n$ podemos escrevê-lo na forma $n + p$ com $p \in \mathbb{N}$.

2. Prove que se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries convergente e $c \in \mathbb{R}$, então as séries $\sum(a_n + b_n)$ e $\sum ca_n$ são convergentes e vale $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$ e $\sum ca_n = c \sum a_n$.
   Sugestão: Trabalhe com a sequência das somas parciais e use as propriedades dos limites para sequências

3. (a) Prove, formalmente, que uma sequência crescente ou é convergente, ou diverge para $+\infty$. *Sugestão: Divida em casos. Limitada e não limitada*
   (b) Mostre que uma série de números positivos ou converge, ou diverge para $+\infty$.

4. Use a definição para mostrar que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$.
   Sugestão: $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}$

5. Verifique quais são convergentes ou divergente.
   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$;
   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{n}+1)}{n^2}$.
   Cuidado com o último! Melhor mostrar que é absolutamente convergente

6. Sejam (a_n) e (b_n) sequências de números reais tais que $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $(\frac{a_n}{b_n})$ é limitada. Mostre que se $\sum b_n$ é absolutamente convergente então $\sum a_n$ é absolutamente convergente e portanto convergente.
   Dica: Use o Teste da Comparação.

7. Calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ com erro menor que 0,1.