Universidade de São Paulo
ICMC - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Professora: Regilene Delazari dos Santos Oliveira
Alunos:

Álgebra Linear - SMA0304
Atividade Bônus 8

23/10/2023

Questão 1. Considere $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x, y, z) = (x - y, 2y, y + z)$. Determine a transformação inversa T^{-1} usando a matriz $[T]_{C,C}$, em que C é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

Solução: Com relação à base canônica, a matriz de T é:

$$[T]_C^C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A inversa de T é exatamente a inversa da matriz acima. Procedemos por escalonamento:

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Onde as operações elementares foram as seguintes:

$$\begin{aligned}
2L_1 + L_2 &\to L_1 \\
2L_3 - L_2 &\to L_2 \\
\frac{1}{2}L_i &\to L_i \ \forall\ i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Temos, portanto, que $T^{-1}(x, y, z) = (x + \frac{y}{2}, \frac{y}{2}, \frac{-y}{2} + z)$

■

Questão 2. Seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^4$. Defina uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ por:

$$T(e_1) = e_2 \ ; \ T(e_2) = e_3 \ ; \ T(e_3) = e_4 \ ; \ T(e_4) = e_1.$$

Determine $T(v)$ para $v \in \mathbb{R}^4$ arbitrário e verifique se T é um automorfismo. Em caso afirmativo, encontre seu inverso.

Solução: Se $v = (x, y, z, w)$, então $T(v) = (w, x, y, z)$, visto que T apenas permuta a base canônica e, consequentemente, as entradas de um vetor. Assim, sua matriz associada é:

$$[T]_C^C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que é invertível, visto que seus vetores coluna formam a base a canônica. A matriz inversa é:

$$\left([T]_C^C\right)^{-1} = [T^{-1}]_C^C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais especificamente, $T^{-1}(x, y, z, w) = (y, z, w, x)$.

Questão 3. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $T : U \longrightarrow V$ uma transformação linear. Julgue as afirmações a seguir em verdadeira ou falsa, mostrando um exemplo quando a afirmação é falsa.

a) Se $\dim(U) = \dim(V) + 1$ e $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$, então T é sobrejetora.

b) Se $\dim(U) < \dim(V)$, então T é sobrejetora.

c) Se $\{u_1, u_2, u_3\}$ é L.I, então $\{T(u_1), T(u_2), T(u_3)\}$ também é.

Solução: Para a primeira afirmação, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos as seguintes igualdade:

$$\begin{aligned} \dim(V) + 1 &= \dim(U) \\ &= \dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\mathrm{Ker}(T)) \\ &= \dim(\mathrm{Im}(T)) + 1 \end{aligned}$$

De maneira que $\dim V = \dim(\mathrm{Im}(T))$, logo $V = \mathrm{Im}(T)$ pois $\mathrm{Im}(T) \subseteq V$. Portanto, T é, de fato, sobrejetora.

Para a segunda afirmação, considere a aplicação $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x) = (x, 0)$. Veja que T não é sobrejetora, pois $(1, 1)$ não está na imagem de T, por exemplo.

A última afirmação é falsa e daremos um contra-exemplo. A transformação $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, x - y)$ é tal que:

$$\begin{aligned} T(0, 0, 1) &= (0, 0) \\ T(0, 1, 0) &= (1, -1) \\ T(1, 0, 0) &= (1, 1) \end{aligned}$$

Portanto, T leva a base canônica em um conjunto gerador que não é L.I.

■

Questão 4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz com respeito à base canônica C de $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$[T]_{C,C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Podemos afirmar que:

a) T é invertível.

b) T não é invertível e $\text{Ker}(T) = [(1, -2, 1)]$.

c) T não é invertível e $\text{Ker}(T) = [(-1, -2, 1)]$.

d) T não é invertível e $\text{Ker}(T) = [(1, -2, 1), (-1, -2, 1)]$.

e) Nenhuma das alternativas acima é correta.

Solução: O cálculo do determinante mostra que a matriz não é invertível. Para encontrar o núcleo, aplicaremos o processo de escalonamento para resolver o sistema homogêneo associado. Temos que:

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 0 \\ 2 & 5 & 8 & | & 0 \\ 3 & 6 & 9 & | & 0 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & 0 \\ 0 & -2 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Onde as operações elementares aplicadas foram as seguintes:

$$
\begin{aligned}
L_2 - 2L_1 &\to L_2 \\
\frac{1}{3}L_3 &\to L_3 \\
L_3 - L_1 &\to L_3 \\
L_1 - 4L_2 &\to L_1
\end{aligned}
$$

Ao final, obtemos então que o conjunto solução é $\{(z, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$ e a opção correta é a letra b).

■