Universidade de São Paulo
ICMC - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Professora: Regilene Delazari dos Santos Oliveira
Alunos:

Álgebra Linear - SMA0304
Atividade Bônus 5

25/09/2023

Questão 1. Determine as coordenadas de $v = (4, -5, 3) \in \mathbb{R}^3$ na base $B = \{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (3, 1, 0)\}$.

Solução: É possível verificar que B é um conjunto de 3 vetores L.I e, portanto, é uma base. Devemos escrever v como combinação linear de tais vetores e, por definição, os coeficientes serão as coordenadas de v na base B. Assim, se as coordenadas são α, β, γ, devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} 4 &= \alpha + \beta + 3\gamma \\ -5 &= \alpha + 2\beta + \gamma \\ 3 &= \alpha \end{aligned}$$

cuja solução é $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, -5, 2)$. Alternativamente, pode-se encontrar a matriz M_B^C de mudança da base B para a base canônica C e então $v_B = M_B^C.v_C$, onde v_C é o vetor de coordenadas com relação à base canônica. Esse é o conteúdo da Proposição 6.3, da apostila.

■

Questão 2. Seja $C = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ uma base do espaço vetorial V e

$$B = \{u_1, u_1 - u_2, u_1 - u_3, u_1 - u_4\}.$$

1. Mostre que B também é uma base de V.
2. Encontre as matrizes de mudança de base M_C^B e M_B^C.

Solução: No item 1, é suficiente mostrar que o conjunto B é L.I. Suponha que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são números reais tais que:

$$\alpha(u_1) + \beta(u_1 - u_2) + \gamma(u_1 - u_3) + \delta(u_1 - u_4) = 0.$$

Reorganizando os termos, obtemos que:

$$(\alpha + \beta + \delta + \gamma)u_1 - \beta u_2 - \gamma u_3 - \delta u_4 = 0$$

Como C é um conjunto L.I, segue que o seguinte sistema se verifica:

$$\alpha + \beta + \delta + \gamma = \beta = \gamma = \delta = 0.$$

A única solução é a trivial e a afirmação está provada. Para o item b), denote por v_1, v_2, v_3, v_4 os elementos de B. Note que:

$$\begin{aligned} v_1 &= 1.u_1 + 0.u_2 + 0.u_3 + 0.u_4 \\ v_2 &= 1.u_1 - 1.u_2 + 0.u_3 + 0.u_4 \\ v_3 &= 1.u_1 + 0.u_2 - 1.u_3 + 0.u_4 \\ v_4 &= 1.u_1 + 0.u_2 + 0.u_3 - 1.u_4 \end{aligned}$$

Assim, a matriz M_C^B é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $M_C^B.M_C^B = I_4$, a matriz identidade de ordem 4 e $M_B^C = (M_C^B)^{-1}$, temos que $M_B^C = M_C^B$.

$\blacksquare$

Questão 3. A matriz de mudança de uma base B de $\mathbb{R}^2$ para a base $\{(1,1),(0,2)\}$ é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determine a base B.

Solução: Denotemos $B = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$. Por definição, temos que:

$$(1,1) = u_{11}(x_1, y_1) + u_{21}(x_2, y_2)$$
$$(0,2) = u_{12}(x_1, y_1) + u_{22}(x_2, y_2)$$

onde os coeficientes determinam a matriz de mudança de base, que também é dada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

Considerando as equações acima, temos que resolver o seguinte sistema:

$$x_1 + 3x_2 = 1$$
$$y_1 + 3y_2 = 1$$
$$3x_2 = 0$$
$$3y_2 = 2$$

Cuja solução é $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $y_1 = -1$, $y_2 = 2/3$.

$\blacksquare$