TEORIA DOS MODELOS: MODELOS SATURADOS

RICARDO BIANCONI

Sumário

1. Introdução

A existência de modelos com propriedades mais fortes (saturação, modelos atômicos, etc) depende da estrutura dos espaços de n-tipos sobre uma teoria. Aqui estudamos as propriedades de saturação, universalidade e homogeneidade. De quebra, estudamos os modelos atômicos, ao estudarmos o caso enumerável.

Na Seção 2, consideramos primeiramente a propriedade de κ-saturação (realizar tipos sobre conjuntos de parâmetros A, com $|A| < \kappa$) e suas correlatas κ-homogeneidade (fraca) (isomorfismos parciais entre subestruturas de tamanho menor que κ podem ser estendidos a um novo

---

Date: 2022.

elemento) e κ-universalidade (a estrutura contém subestrutura elementar isomorfa a cada modelo de sua teoria de tamanho menor que κ). Na mesma seção, consideramos o caso enumerável e mostramos uma condição necessária e suficiente para que existam modelos enumeráveis saturados.

Na Teoria de Estabilidade, é conveniente trabalharmos com submodelos elementares de uma estrutura grande o suficiente, que seja altamente saturada (realiza tipos sobre "conjuntos pequenos") e fortemente homogêneas (dadas duas realizações de um tipo sobre um conjunto pequeno de parâmetros, existe um automorfismo da estrutura grande que mapeia uma realização na outra. Esse tema é tratado nas duas seções seguintes, sobre modelos especiais e o *modelo monstro*.

Por fim, tratamos de saturação recursiva, uma propriedade importante no estudo dos modelos da aritmética de Peano.

Neste texto assumimos familiaridade com ordinais, cardinais e a aritmética cardinal, embora citemos os resultados e definições necessários.

1.1. **Um pouco de Aritmética Cardinal.** Para o que segue, lembramos alguns conceitos e resultados de aritmética cardinal. Lembramos que um conjunto X é um *ordinal* (de von Neumann) se ele for um conjunto transitivo (se $A \in B \in X$, então $A \in X$, ou seja, $B \subset X$) e bem ordenado pela relação de pertinência "$\in$" (se $A \subseteq X$ e $A \neq \varnothing$, então existe $\min A \in X$). Um ordinal α é dito *inicial* se não existir $\beta < \alpha$ e função sobrejetora $f : \beta \to \alpha$. Um *cardinal* é um ordinal inicial. O Axioma da Escolha implica que para cada conjunto X, existe um único cardinal κ e uma bijeção $f : \kappa \to X$, e denotamos $|X| = \kappa$. A *cofinalidade* de um cardinal κ infinito é o menor ordinal $\lambda = \mathrm{cof}(\kappa)$, tal que existe uma inclusão estritamente crescente e ilimitada $\lambda \hookrightarrow \kappa$; tal λ é, na verdade, um cardinal.

Aritmética cardinal:

(a) **soma:** $\sum_{i\in I} \kappa_i = |\bigcup_{i\in I} \kappa_i \times \{i\}|$, a cardinalidade da união disjunta dos conjuntos κ_i;
(b) **produto:** $\prod_{i\in I} \kappa_i = |\times_{i\in I}\kappa_i|$, a cardinalidade do produto cartesiano dos conjuntos κ_i;
(c) **exponenciação:** $\kappa^\lambda = |\{f : \lambda \to \kappa\}|$, a cardinalidade do conjunto de funções $\lambda \mapsto \kappa$; $\kappa^{<\lambda} = \bigcup_{\mu<\lambda} \kappa^\mu$, o supremo dos cardinais κ^μ, com $\mu < \lambda$.

A função $\aleph$ (alef): existe uma função $\aleph : \mathrm{Ord} \to \mathrm{Card}$ enumerando os cardinais infinitos, definida recursivamente por $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} =$ o menor cardinal estritamente maior que $\aleph_\alpha$; se δ for um ordinal limite, $\aleph_\delta = \sup_{\alpha<\delta} \aleph_\alpha$.

A função $\beth$ (bet): existe uma função $\beth$: Ord $\times$ Card $\to$ Card, definida recursivamente por $\beth_0(\kappa) = \kappa$, $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$; se δ for um ordinal limite, $\beth_\delta = \sup_{\alpha<\delta} \beth_\alpha$.

2. Modelos κ-saturados, κ-homogêneos, κ-universais

Começamos com a teoria mais geral e depois particularizamos para o caso enumerável.

Definição 1. Seja $\kappa \geq \omega$ um cardinal. Dizemos que a estrutura M é κ-saturada se, para todo $A \subset M$, cuja cardinalidade $|A| < \kappa$ e todo tipo $\Gamma \in S_1(A)$ contendo a $L(A)$-teoria de M, $T_{L(A)}(M)$, M realiza o tipo Γ. Se $\kappa = |M|$, então dizemos que M é saturada.

Teorema 2.1. Seja $\kappa \geq \omega$ que não seja menor que a cardinalidade do conjunto de L-fórmulas. Então, dada uma L-estrutura A de cardinalidade $|A| \leq 2^\kappa$, existe uma extensão elementar $B \succ A$ κ^+-saturada e de cardinalidade 2^κ.

Demonstração. Construiremos B usando uma união de cadeia elementar. Começando com uma extensão elementar, se for preciso, podemos supor que $|A| = 2^\kappa$. Seja $A_0 = A$ e seja $\mathcal{P}_{\kappa^+}(A_0) = \{X \subset A_0 : |X| \leq \kappa\}$. Então $|\mathcal{P}_{\kappa^+}(A_0)| = \sup_{\eta\leq\kappa} 2^{\kappa\times\eta} = 2^\kappa$ e, portanto, $|\bigcup_{X\in\mathcal{P}_{\kappa^+}(A_0)} S_1(X)| = 2^\kappa$. Assim, podemos obter extensão elementar $A_1 \succ A_0$ que realiza todos os tipos em $\bigcup_{X\in\mathcal{P}_{\kappa^+}(A_0)} S_1(X)$ e de cardinalidade $|A_1| = 2^\kappa$ (usando o método das constantes). Indutivamente construímos cadeia elementar $A_0 \prec A_1 \prec A_2 \prec \dots$, tal que, para cada $\alpha \geq 0$, $A_{\alpha+1}$ realiza todos os tipos em $\bigcup_{X\in\mathcal{P}_{\kappa^+}(A_\alpha)} S_1(X)$ e tem cardinalidade $|A_{\alpha+1}| = 2^\kappa$, e se $\delta < 2^\kappa$ for ordinal limite, definimos $A_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} A_\alpha$, que também tem cardinalidade $|A_\delta| = 2^\kappa$ e é extensão elementar de seus predecessores.

Seja $B = \bigcup_{\alpha<2^\kappa} A_\alpha$. Então $B \succ A$, $|B| = 2^\kappa$ e se $X \subset B$ tem cardinalidade $|X| \leq \kappa$ então, como a cofinalidade de 2^κ é estritamente maior do que κ, existe $\alpha < 2^\kappa$, tal que $X \subset A_\alpha$. Daí decorre que $A_{\alpha+1}$ realiza todos os tipos em $S_1(X)$ e, como $B \succ A_\alpha$, B também realiza esses tipos. $\square$

Uma estrutura M é dita κ-homogênea se, para todos $X, Y \subset M$, tais que $|X| = |Y| < \kappa$ e $(M, x_\alpha)_{\alpha<|X|} \equiv (M, y_\alpha)_{\alpha<|Y|}$ (sendo que $X = \{x_\alpha : \alpha < |X|\}$ e $Y = \{y_\alpha : \alpha < |Y| = |X|\}$), então dado $a \in M$ existe $b \in M$, tal que $(M, x_\alpha, a)_{\alpha<|X|} \equiv (M, y_\alpha, b)_{\alpha<|Y|}$.

Teorema 2.2. Seja $\kappa \geq \omega$ que não seja menor que a cardinalidade do conjunto de L-fórmulas, e seja M uma estrutura κ-saturada. Então M é κ-homogênea.

Demonstração. Seja M uma estrutura κ-saturada e $X, Y \subset M$, tais que $|X| = |Y| < \kappa$ e $(M, x_\alpha)_{\alpha<|X|} \equiv (M, y_\alpha)_{\alpha<|Y|}$ (sendo que $X = \{x_\alpha : \alpha < |X|\}$ e $Y = \{y_\alpha : \alpha < |Y| = |X|\}$), e seja $a \in M$. Seja $\Gamma \in S_1(X)$ o tipo do elemento a sobre o conjunto de parâmetros X (ou seja, se $\lambda = |X| < \kappa$ e $C = \{c_\alpha : \alpha < \lambda\}$ é um conjunto de novas constantes, Γ é um conjunto maximal consistente de $L(C)$-fórmulas $\phi(x)$, com variável livre x, ou sem variáveis livres, tal que é realizado pelo elemento $a \in M$ na estrutura $(M, x_\alpha)_{\alpha<\lambda}$). Interpretando cada $c_\alpha \in C$ pelo elemento $y_\alpha \in Y$ e usando a hipótese de que $(M, x_\alpha)_{\alpha<|X|} \equiv (M, y_\alpha)_{\alpha<|Y|}$, obtemos um conjunto Γ finitamente satisfatível na estrutura $(M, y_\alpha)_{\alpha<|Y|}$, ou seja, um tipo em $S_1(Y)$, que é realizado por um elemento $b \in M$, devido à sua κ-saturação. Daí, segue que $(M, x_\alpha, a)_{\alpha<|X|} \equiv (M, y_\alpha, b)_{\alpha<|Y|}$, como queríamos. $\square$

Uma estrutura M é dita κ-universal se para toda estrutura $N \equiv M$ de cardinalidade $|N| < \kappa$, existe $N' \prec M$ isomorfa a N. Isto é, M tem cópia isomorfa de todos os modelos de sua teoria, que sejam de cardinalidade menor do que κ.

Teorema 2.3. Seja $\kappa \geq \omega$ que não seja menor que a cardinalidade do conjunto de L-fórmulas. Se M é uma L-estrutura κ-saturada, então também é κ^+-universal.

Demonstração. Seja M uma estrutura κ-saturada e suponha que $N \equiv M$ tem cardinalidade $|N| \leq \kappa$. Recorrendo a uma extensão elementar de N, se necessário, podemos supor que $|N| = \kappa$ e enumeramos $N = \{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Vamos obter $N' \prec M$ por indução em $\alpha < \kappa$.

Começando com $\alpha = 0$, seja T a L-teoria de M e $\Gamma \in S_1(T)$ o tipo do elemento $a_0 \in N$ (sem parâmetros). Como $N \equiv M$ e Γ é realizado em N, então Γ é finitamente satisfatível, e portanto realizado por um elemento $b_0 \in M$, devido à κ-saturação de M.

Suponha que já tenhamos definido uma sequência $\langle b_\alpha : \alpha < \beta\rangle$ de elementos de M, tal que, para cada $\lambda < \beta$, o tipo do elemento b_λ sobre o conjunto de parâmetros $\{b_\alpha : \alpha < \lambda\}$, denotado por $tp(b_\lambda/\{b_\alpha : \alpha < \lambda\})$, conincide com $tp(a_\lambda/\{a_\alpha : \alpha < \lambda\}$ (ambos vistos como um conjunto de $L(\{c_\alpha : \alpha < \lambda\})$-fórmulas tendo no máximo a variável livre x) – observe-se que esta afirmação já foi provada no caso em que $\lambda = 0$. Seja b_β o elemento de M que realiza o tipo $tp(a_\beta/\{a_\alpha : \alpha < \beta\}$ (usando a κ-saturação de M).

Seja $N' \subset M$ o conjunto de todos os b_α, $\alpha < \kappa$, assim obtidos. Então a aplicação $f : a_\alpha \in N \mapsto b_\alpha \in M$ é uma bijeção sobre sua imagem N', que é subestrutura de M, pois toda a informação da estrutura N está contida nos tipos acima considerados. Para provarmos que $N' \prec M$, sejam $\phi(\bar{x})$ uma L-fórmula (com variáveis livres $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$), $\bar{b} \in (N')^n$, e suponhamos que $M \models \phi(\bar{b})$. Renomeando variáveis, se necessário, podemos supor que os elementos da n-upla $\bar{b}$ estejam listados em ordem crescente de índices $\bar{b} = (b_{\alpha_1}, \ldots, b_{\alpha_n})$, com $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$. Então $\phi(c_{\alpha_1}, \ldots, c_{\alpha_{n-1}}, x) \in tp(b_{\alpha_n}/\{b_\eta : \eta < \alpha_n\}) = tp(a_{\alpha_n}/\{a_\eta : \eta < \alpha_n\})$ (como conjunto de $L(\{c_\eta : \eta < \alpha_n\})$-fórmulas). Como o tipo é realizado em N e, portanto em N', $N' \models \phi(\bar{b})$, ou seja, $N' \prec M$, como queríamos. $\square$

Agora provemos a recíproca dos dois teorema anteriores.

Teorema 2.4. Seja $\kappa \geq \omega$ que não seja menor que a cardinalidade do conjunto de L-fórmulas, e seja M uma L-estrutura infinita. São equivalentes as seguintes asserções:

(1) M é κ-saturada;
(2) M é κ-homogênea e κ^+-universal;
(3) M é κ-homogênea e κ-universal.

Demonstração. Já provamos acima que (1) $\Rightarrow$ (2). A implicação (2) $\Rightarrow$ (3) é imediata.

Provemos a implicação (3) $\Rightarrow$ (1). Seja M uma L-estrutura κ-homogênea e κ-universal. Seja $X \subset M$, cuja cardinalidade seja $|X| = \lambda < \kappa$, enumeremos $X = \{a_\eta : \eta < \lambda\}$ e seja $C = \{c_\eta : \eta < \lambda\}$ um conjunto de novos símbolos de constantes. Seja $\Gamma \in S_1(X)$ um tipo sobre o conjunto de parâmetros X (conjunto de $L(C)$-fórmulas), que seja finitamente satisfatível em M. Queremos mostrar que Γ é realizado em M.

Seja $N \equiv M$, tal que $X \subset N$, N realiza o tipo Γ e $|N| = \max\{|X|, |L| + \omega\} < \kappa$, que pode ser obtido pelo método das constantes. Por ser uma estrutura κ-universal e $|N| < \kappa$, existe $N' \prec M$ isomorfa à estrutura N, por um morfismo $f : N \to M$. Seja $Y = \{b_\eta = f(a_\eta) : \eta < \lambda\} \subset M$ a imagem do conjunto X pela aplicação f. Se $p \in N$ realiza o tipo Γ em N, sua imagem $b = f(p)$ realiza-o em N' e, portanto em M. Pela construção de N', obtemos que $(M, a)_{a \in X} \equiv (M, b)_{b \in Y}$. Como M é, por hipótese, κ-homogêneo, existe $q \in M$, tal que $(M, a, q)_{a \in X} \equiv (M, b, p)_{b \in Y}$. Mas isto significa que o elemento q realiza o tipo γ em M, como queríamos. $\square$

2.1. **O caso enumerável.** Aqui assumimos que a linguagem L é enumerável e que T é uma L-teoria completa, com modelos infinitos. Enfrentamos aqui a questão da existência de modelos enumeráveis e ω-saturados.

Uma condição necessária óbvia é que os espaços de tipos S_n sobre T sejam finitos ou enumeráveis, pois uma estrutura enumerável só pode realizar uma quantidade enumerável de tipos. Mostremos que essa condição também é suficiente.

Lema 2.1. Suponha que $\bigcup_{n\geq 1} S_n$ seja enumerável. Então, para cada conjunto finito de parâmetros A (dentro de algum modelo de T) o conjunto $\bigcup_{n\geq 1} S_n(A)$ também será enumerável.

Demonstração. Sejam $\bar{a} \in M^k$ e $p \in S_n(\bar{a})$. Se trocarmos as constantes correspondentes de $\bar{a}$ por variáveis $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$, obtemos um tipo $q \in S_{n+k}$ sobre T, sem parâmetros. Se $p_1, p_2 \in S_n(\bar{a})$ forem dois tipos distintos, então os correspondentes $q_1, q_2 \in S_{n+k}$ serão distintos, pois existirá L-fórmula $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ (com $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\bar{y} = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})$), tal que $\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in p_1$ e $(\neg\phi)(\bar{x}, \bar{a}) \in p_2$, o que implica que $\phi(\bar{x}, \bar{y}) \in q_1$ e $(\neg\phi)(\bar{x}, \bar{y}) \in q_2$. Como S_{n+k} é finito ou enumerável, o mesmo acontece com $S_n(\bar{a})$. $\square$

Com esse argumento de contagem em mãos, podemos obter a equivalência desejada.

Teorema 2.5. A L-teoria T, numa linguagem enumerável L e com modelos infinitos, tem um modelo enumerável ω-saturado se, e somente se, $\bigcup_{n\geq 1} S_n$ for enumerável.

Demonstração. Já vimos que a condição de $\bigcup_{n\geq 1} S_n$ ser enumerável é necessária.

Suponhamos, então, que essa união seja enumerável e obtenhamos um modelo enumerável de T que seja ω-saturado.

Como T tem modelos infinitos e L é enumerável, pelo Teorema de Löwenheim-Skolem, existe $M_0 \models T$ enumer—'avel. Construímos uma cadeia elementar $(M_j : j < \omega)$ de modelos enumeráveis de T com a condição de que M_{j+1} realize todos os tipos sobre subconjuntos finitos de M_j.

No passo inicial, temos o modelo M_0 acima. Suponhamos construídos modelos enumeráveis $M_0 \preceq M_1 \preceq \cdots \preceq M_j$, tal que para cada i, $0 \leq i \leq j$, M_i realize todos os tipos sobre subconjuntos finitos de M_{i-1} (e se $i = 0$ essa hipótese é verdadeira por ser vazia). Pelo Lema, como M_j é enumerável, o conjunto $P_{fin}(M_j) = \{A \subset M_j : A \text{ é finito}\}$

é enumerável e, daí, $\bigcup_{A\in P_{fin}(M_j)}\bigcup_{n\geq 1} S_n(A)$ será enumerável. Pelos Teoremas da Compacidade e de Löwenheim-Skolem, existe extensão elementar enumerável $M_{j+1} \succeq M_j$ que realize todos os tipos sobre conjuntos finitos de M_j. A união $M_\omega = \bigcup_{j<\omega} M_j$ é o modelo saturado procurado. □

2.2. **Modelos Atômicos.** A condição $|\bigcup_{n\geq 1} S_n| = \omega$ implica que os tipos isolados são densos em cada um dos espaços S_n. De fato, vale o seguinte lema.

Lema 2.2. Suponha que L seja enumerável e que exista uma L-fórmula $\phi(\bar{x})$, tal que todo n-tipo que a contenha seja não isolado. Então $|S_n| = 2^{\aleph_0}$.

Demonstração. É claro que $|S_n| \leq 2^{\aleph_0}$, pois L é enumerável.

Construímos a seguir, por recursão, uma família de L-fórmulas indexada na árvore binária $2^{<\omega}$ (sequências finitas de elementos de $\{0,1\}$), ϕ_s, tal que para cada s, ϕ_s seja consistente e as seguintes $\phi_{s\frown 0}$ e $\phi_{s\frown 1}$ sejam da forma $\phi_{s\frown 0} = \phi_s \wedge \psi$ e $\phi_{s\frown 1} = \phi_s \wedge (\neg\psi)$, para alguma L-fórmula ψ.

Começamos com $\phi_\varnothing = \phi$ dada, indexada pela sequência vazia. Suponhamos obtida ϕ_s.

Afirmação: existe uma L-fórmula $\psi(\bar{x})$, tal que cada uma das fórmulas$\phi_{s\frown 0} = \phi_s \wedge \psi$ e $\phi_{s\frown 1} = \phi_s \wedge (\neg\psi)$ seja consistente e não pertençam a nenhum tipo isolado.

Podemos fazer um argumento topológico. O espaço S_n é Hausdorff e compacto. O aberto (e fechado) O_{ϕ_s} não é vazio e não contém pontos isolados. Assim, existem pelo menos dois pontos $p \neq q$ em O_{ϕ_s}. Seja $\psi(\bar{x}$, tal que $\psi \in p$ e $(\neg\psi) \in q$. Os abertos (e fechados) $O_{\phi\wedge\psi} \ni p$, e $O_{\phi\wedge(\neg\psi)} \subset O_\phi \ni q$ são disjuntos, não vazios e não contêm pontos isolados (por serem subconjuntos de O_ϕ). Isso ilustra como se faz o passo da recursão.

Para cada sequência (infinita) $t \in 2^\omega$, seja $\Gamma_t = \{\phi_{t\restriction_n} : n < \omega\}$, onde $t\restriction_n$ é a restrição da sequência t ao domínio $\{0,\ldots,n-1\}$, $n \geq 0$ (sendo que $t\restriction_0 = \varnothing$, a sequência vazia). Cada um desses conjuntos de fórmulas é consistente (por Compacidade) e são dois a dois inconsistentes entre si. Assim, existe um n-tipo contendo cada Γ_t, totalizando $2^{\aleph_0}$ tipos distintos. □

3. Modelos Especiais e Fortemente Homogêneos

Tratamos agora do problema da existência de modelos fortemente κ-homogêneos. Mostramos que modelos especiais (definidos mais adiante) satisfazem essa propriedade.

3.1. **Mais um Pouco de Aritmética Cardinal.**

Precisamos de alguns resultados de aritmética cardinal para demonstrar a existência e algumas propriedades de modelos especiais.

Definição 2 (Funções Normais)**.** Uma função de ordinais $f : Ord \to Ord$ é normal se for crescente e contínua em relação à ordem dos ordinais, ou seja

(i) (crescente) se $\alpha < \beta$, então $f(\alpha) < f(\beta)$;
(ii) (contínua) se $\lambda = \sup\{\alpha \in Ord : \alpha < \lambda\}$, então $f(\lambda) = \sup\{f(\alpha) : \alpha < \lambda\}$.

Exemplo 3.1 (A Função $\aleph$)**.** Lembramos que definimos recursivamente $\aleph_0$ como o primeiro ordinal infinito (enumerável); $\aleph\alpha + 1$ como o menor ordinal maior que $\aleph_\alpha$, para o qual não exista bijeção com $\aleph_\alpha$ (um cardinal); para λ um ordinal limite, $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$. A definição dessa função deixa claro que ela é uma função normal.

Exemplo 3.2 (A Função $\beth$)**.** A função $\beth : Ord \to Ord$ é definida recursivamente por $\beth_0 = \aleph_0$; $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beta_\alpha}$ (potência de cardinais); para λ um ordinal limite, $\beth_\lambda = \sup\{\beth_\alpha : \alpha < \lambda\}$. A definição dessa função deixa claro que ela é uma função normal.

Observação 3.1. Se $f : Ord \to Ord$ for uma função normal, então $f(\alpha) \geq \alpha$, para todo $\alpha \in Ord$. Isso segue por uma indução transfinita. Claramente $f(0) \geq 0$, e como $f(\alpha + 1) > f(\alpha) \geq \alpha$ (essa última desigualdade é a hipótese de indução), vale que $f(\alpha+1) \geq \alpha+1$. Se λ for um ordinal limite, então, por hipótese de indução, para todo $\alpha < \lambda$, vale que $f(\alpha) \geq \alpha$. Como f é uma função normal, $f(\lambda) = \sup\{f(\alpha) : \alpha < \lambda\} \geq \sup\{\alpha : \alpha < \lambda\} = \lambda$.

Funções normais têm uma propriedade importante.

Lema 3.1 (Pontos Fixos)**.** Seja $f : Ord \to Ord$ uma função normal. Dado $\alpha \in Ord$, existe $\beta > \alpha$, tal que $f(\beta) = \beta$ (um ponto fixo).

Demonstração. Dado $\alpha \in Ord$, sejam $\alpha_0 = \alpha + 1$ e para todo $n \in \omega$, $\alpha_{n+1} = f(\alpha_n)$. Seja $\alpha_\omega = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$.

A continuidade de f garante que

$$f(\alpha_\omega) = \sup_{n\in\omega} f(\alpha_n) = \sup_{n\in\omega} \alpha_{n+1} = \alpha_\omega.$$

Como $a_\omega \geq a_0 > \alpha$, vale a desigualdade $f(\alpha_\omega) \geq \alpha_\omega > \alpha$. □

As imagens de funções normais têm uma característica útil. Lembramos que a *cofinalidade* de um ordinal limite α é o menor ordinal β, para o qual existe uma função estritamente crescente e ilimitada $f : \beta \to \alpha$. Observe que a cofinalidade de um ordinal limite é um cardinal.

Lema 3.2. Se $f : Ord \to Ord$ for uma função normal, então existe uma única função normal $g : Ord \to Ord$ que enumera os pontos fixos de f.

Demonstração. A existência de uma função crescente g que enumera os pontos fixos de f segue por uma construção recursiva, com $g(0)$ sendo o menor ponto fixo de f, $g(\alpha+1)$ como o menor ponto fixo de f maior que $g(\alpha)$ e se λ for um ordinal limite, a continuidade de f implica que $\sup_{\alpha<\lambda} g(\alpha)$ também será um ponto fixo de f e, portanto, podemos definir $g(\lambda) = \sup_{\alpha<\lambda} g(\alpha)$.

Assim, obtivemos uma função g estritamente crescente, que enumera os pontos fixos de f e também é contínua nos ordinais limites, ou seja, a função g é normal. □

Lema 3.3. Dados um cardinal regular $\kappa \geq \omega$ e uma função normal $f : Ord \to Ord$, existe um ponto fixo de f de cofinalidade κ.

Demonstração. Seja $g : Ord \to Ord$ a função normal que enumera os pontos fixos de f. Do modo como definimos, $g(\kappa)$ será um ponto fixo de f de cofinalidade κ. □

Definição 3. Dado um cardinal $\kappa \geq \omega$ seja $\kappa^* = \sup\{2^\mu : \mu < \kappa\}$ (exponenciais de cardinais).

Exemplo 3.3. Seja κ um ponto fixo da função $\beth$, $\kappa = \beth_\kappa$. Então $\kappa^* = \kappa$.

Lema 3.4. Seja $\kappa \geq \omega$ um cardinal. Valem as seguintes equivalências:

(i) $\kappa = \kappa^*$ se, e somente se, para todo cardinal $\mu < \kappa$, $2^\mu \leq \kappa$;
(ii) $(\kappa^+)^* = \kappa^+$ se, e somente se $2^\kappa = \kappa^+$.

Demonstração. Para o item (i), pela definição de κ^*, se $\kappa = \kappa^*$, então para todo cardinal $\mu < \kappa$, $2^\mu \leq \kappa$. Como para cardinal μ, $\mu < 2^\mu$, se para cada cardinal $\mu < \kappa$ valer que $2^\mu \leq \kappa$, temos que

$$\kappa \leq \kappa^* = \sup_{\mu<\kappa} \mu \leq \sup_{\mu<\kappa} 2^\mu \leq \kappa,$$

ou seja, $\kappa = \kappa^*$.

Para o item (ii), como $\mu < \nu$ implica que $2^\mu \leq 2^\nu$, se $(\kappa^+)^* = \kappa^+$, então $\kappa^+ = (\kappa^+)^* = \sup\{2^\mu : \mu \leq \kappa\} = 2^\kappa$, temos que $\kappa^+ = \kappa$. Reciprocamente, se $\kappa^+ = 2^\kappa$, então $(\kappa^+)^* = \sup\{2^\mu : \mu \leq \kappa\} = 2^\kappa = \kappa^+$. □

3.2. **Modelos Especiais.** Aqui introduzimos os modelos especiais.

Definição 4 (Modelos especiais)**.** Uma estrutura M é dita um modelos especial se existir uma cadeia elementar M_β, tal que $\beta < |M|$ é cardinal e M_β é β^+-saturado. A cadeia de modelos M_β é chamada de cadeia especializadora de M.

Teorema 3.1. Seguem algumas propriedades e exemplos de modelos especiais.

(i) toda estrutura finita é especial;
(ii) todo modelo saturado (isto é, M é $|M|$-saturada) é especial;
(iii) todo modelo de cardinalidade κ^+ é saturado se, e somente se, for especial;
(iv) todo modelo de cardinalidade κ regular e limite (ou seja, fracamente inacessível) é saturado se, e somente se, for especial;

Demonstração. Como toda estrutura finita $\overline{M} = (M, \dots)$ é saturada em qualquer cardinal, ela é especial, com sequência especializante constante $\overline{M}_n = \overline{M}$, $n = 0, \dots, |M| - 1$. Isso mostra o item (i).

Para o item (ii), suponha que $\overline{M}$ seja κ-saturado então é μ^+-saturado, para todo $\mu < \kappa$. A sequência constante $\overline{M}_\mu = \overline{M}$, $\mu < \kappa$, mostra que $\overline{M}$ é especial.

Para o item (iii), como κ^+-saturação implica trivialmente μ^+-saturação, para todo $\mu \leq \kappa$, uma cadeia especializante constante $\overline{M}_\kappa = \overline{M}$, $\kappa < |M|$ mostra que $\overline{M}$ é especial. Agora suponhamos que $\overline{M}$ seja especial, com uma sequência especializante $(\overline{M}_\mu : \mu \leq \kappa < \kappa^+)$. Como $M = \bigcup_{\mu \leq \kappa} M_\mu = M_\kappa$, que é κ^+-saturado, segue que $\overline{M}$ é κ^+-saturado.

Para o item (iv), suponhamos que $\overline{M}$ seja saturado e $|M| = \kappa$ um cardinal regular e limite. Uma cadeia constante como em (ii) mostra que $\overline{M}$ é especial. Reciprocamente, suponhamos que $\overline{M} = (M, \dots)$ seja especial de cardinalidade fracamente inacessível, e seja $(\overline{M}_\mu : \mu < \kappa)$ uma cadeia especializante para $\overline{M}$. Seja $A \subset M$, com cardinalidade $|A| = \mu < \kappa$, e $p \in S_1(A)$. Como κ é regular e $M = \bigcup_{\eta<\kappa} M_\eta$, existe um cardinal $\nu < \kappa$, tal que $A \subseteq M_\nu$. Sem perda de generalidade, $\nu = \sup\{\mu, \nu\} \geq \mu$. Como $\overline{M}_\nu$ é ν^+-saturado, $\overline{M}_\nu$ realiza o tipo p e, portanto $\overline{M}$ também o realiza. □

Observação 3.2. Seja $\overline{M} = (M, \dots)$ um modelo especial, com $|M| = \kappa \geq \omega$, e $(\overline{M}_\mu : \mu < \kappa)$ uma sequência especializante de $\overline{M}$. Se $\omega \leq \mu_0 < \kappa$, então $(\overline{M}_\mu : \mu_0 \leq \mu < \kappa)$ também será uma cadeia especializante de $\overline{M}$.

Teorema 3.2. Todo modelo especial de cardinalidade $\kappa \geq \omega$ é κ^+-universal.

Demonstração. Se $\overline{M}$ for especial de cardinalidade $|M| = \kappa$, um cardinal sucessor, $\kappa = \mu^+$, então $\overline{M}$ será κ-saturado (pelo item (iii) do teorema anterior) e, portanto, κ^+-universal.

Se κ for cardinal limite, seja $(\overline{M}_\mu : \mu < \kappa)$ uma sequência especializante de $\overline{M}$. Como observamos mais acima, $(\overline{M}_\mu : |L| \leqq \mu < \kappa)$ também é cadeia especializante de $\overline{M}$.

Seja $\overline{N} \equiv \overline{M}$, com $|N| = \lambda \leq \kappa$, e seja $\bar{a} : \alpha \in \lambda \mapsto a_{\underline{\alpha}} \in N$ uma enumeração de N. Obtemos por reecursão uma sequência $\bar{b} : \alpha \in \lambda \mapsto b_\alpha \in M$, tal que $(\overline{N}, \bar{a}) \equiv (\overline{M}, \bar{b})$, tal que, para cada cardinal $\mu < \kappa$, a restrição de $\bar{b}$ a μ esteja em M_μ, $\bar{b}|_\mu : \mu \to \overline{M}_\mu$, e valha a equivalência elementar $(\overline{M}_\mu, \bar{b}|_\mu) \equiv (\overline{N}, \bar{a}|_\mu)$.

Obtemos recursivamente a sequência $\bar{b}$, usando a μ^+-saturação de $\overline{M}_\mu$, para cada $\mu < \kappa$. Observe que se um modelo $\overline{M}'$ for μ^+-saturado e $\bar{c} : \lambda \to M'$ for uma sequência de comprimento um ordinal $\lambda < \mu^+$, então a expansão $(\overline{M}', \bar{c})$ também será μ^+-saturado. □

Mostremos que existem muitos modelos especiais de uma teoria completa, que tenha modelos com domínios infinitos.

Teorema 3.3 (Existência de Modelos Especiais)**.** Seja $\overline{M} \models T$ com domínio infinito, $|L| \leq |M| < \kappa = \kappa^*$. Existe uma extensão elementar especial $\overline{M}' \succeq \overline{M}$ de cardinalidade κ. O mesmo resultado vale no caso em que $|M| = \kappa$.

Demonstração. Tratamos primeiramente do caso em que $|L| \leq |M| < \kappa$. Sem perda de generalidade, $\overline{M}$ é μ_0^+-saturado, de cardinalidade $2^{mu_0} < \kappa$. Por recursão transfinita, obtemos uma cadeia elementar $(\overline{M}_\mu : \mu_0 \leq \mu < \kappa)$ de modelos μ^+-saturados, de cardinalidade $|M_\mu| = 2^\mu < \kappa$. A união dessa cadeia será um modelo especial de cardinalidade $|M| = \sup_{\mu<\kappa} 2^\mu = \kappa$. Para completar a cadeia especializante, definimos $\overline{M}_\mu = \overline{M}_{\mu_0}$, para todos os demais cardinais $\mu \leq \mu_0$.

O caso em que $|M| = \kappa$ pode ser obtido do fato que um modelo especial de cardianalidade κ é κ^+-universal. Seja $\overline{M}' \equiv \overline{M}$ um modelo especial de cardinalidade $\kappa = \kappa^* = |M|$. Como $\overline{M}'$ é κ^+ universal, existe $\overline{M}'' \preceq \overline{M}'$, tal que $\overline{M} \cong \overline{M}''$. □

Como ocorre no caso de modelos saturados de mesma cardinalidade, dois modelos especiais de mesma cardinalidade serão isomorfos.

Para mostrar isso, façamos alguns resultados preliminares.

Definição 5 (Enumeração Adaptada)**.** Dado um modelo especial $\overline{M} = (M, \dots)$ de cardinalidade $|M| = \kappa \geq \omega$ e uma sequência especializante $(\overline{M}_\mu : \mu < \kappa)$, uma enumeração de M adaptada à sequência especializante é uma sequência sobrejetora $\alpha \in \kappa \mapsto a_\alpha \in M$, tal que para todo cardinal $\mu < \kappa$, a imagem dessa sequência restrita a μ esteja em $\overline{M}_\mu$.

Lema 3.5. Dado um modelo especial $\overline{M} = (M, \dots)$ de cardinalidade $|M| = \kappa \geq \omega$ e uma sequência especializante $(\overline{M}_\mu : \mu < \kappa)$, existe uma enumeração $a : \alpha \in \kappa \mapsto a_\alpha \in M$ adaptada à sequência especializante.

Demonstração. Definimos a sequência a recursivamente.

Seja $b : \alpha \in \kappa \mapsto b_\alpha \in M$ uma bijeção (uma enumeração de M sem repetições). Essa enumeração induz uma boa ordem em M, à qual nos referimos a seguir.

Seja $a_0 \in M_0$ um elemento qualquer. Para cada $\alpha \in \kappa$, $\alpha > 0$, definimos a_α como o menor elemento b_β distinto dos a_γ,$\gamma < \alpha$, tal que $b_\beta \in M_{|\alpha|}$ se tal elemento existir. Caso contrário, definimos $a_\alpha = a_0$.

Com essa definição, resta apenas mostrar que a sequência a é sobrejetora. Argumentamos por contradição. Suponhamos que a sequência a não seja sobrejetora e seja b_γ um elemento fora da imagem da sequência. Seja $\mu < \kappa$ o menor cardinal, tal que $b_\gamma \in M_\mu$. Para todo ordinal α, com $\mu \leq \alpha < \kappa$, como $|\alpha| \geq \mu$, a escolha de a_α tem que ser algum b_β, com $\beta < \gamma$, pois $b_\gamma \in M_{|\alpha|} \supseteq M_\mu$. Em particular, a sequência a será injetora, o que causa uma contradição, pois $|\{\beta \in \mathit{Ord} : \beta < \gamma\}| < \kappa = |\{\alpha \in \mathit{Ord} : \gamma \leq \alpha < \kappa\}|$.

Assim, concluímos que a sequẽncia a é uma enumeração adaptada à sequência especializante. □

Com essa enumeração em mãos, podemos mostrar o resultado principal.

Teorema 3.4 (Unicidade de Modelos Especiais)**.** Se $\overline{M}$ e $\overline{M}'$ forem dois modelos especiais, tais que $\overline{M} \equiv \overline{M}'$ e $|M| = |M'|$, então $\overline{M} \cong \overline{M}'$.

Demonstração. Sejam $\kappa = |M| = |M'|$. Sejam $(\overline{M}_\mu : \mu < \kappa)$ e $(\overline{M}'_\mu : \mu < \kappa)$ sequências especializantes de $\overline{M}$ e $\overline{M}'$, respectivamente. Sem perda de generalidade, $\overline{M}_\alpha$ e $\overline{M}'_\alpha$ são $\omega_1 = \omega^+$ saturados, para todo $\alpha < \omega$.

Pelo lema acima, existem enumerações adaptadas às sequências especializantes $a : \alpha \in \kappa \mapsto a_\alpha \in M$, e $b : \alpha \in \kappa \mapsto b_\alpha \in M'$.

Afirmação 1: Existem sequências $c : \alpha \in \kappa \mapsto c_\alpha M$ e $d : \alpha \in \kappa \mapsto d_\alpha \in M'$, tais que $(\overline{M}, a, c) \equiv (\overline{M}', d, b)$, com as imagens das restrições $a|_\alpha$ e $c|\alpha$ em $\overline{M}_{|\alpha|}$, e $b|_\alpha$ e $d|_\alpha$ em $\overline{M}'_{|\alpha|}$, onde $s|_\alpha$ denota a restrição de uma sequência ao ordinal $\alpha = \{\beta \in \mathit{Ord} : \beta < \alpha\}$.

Mostramos a existência dessas sequências por indução em $\alpha \leq \kappa$, mostrando que $(\overline{M}, a|_\alpha, c|_\alpha) \equiv (\overline{M}', d|_\alpha, b|_\alpha)$.

O passo inicial é a hipótese $\overline{M} \equiv \overline{M}'$, pois o ordinal 0 é o conjunto vazio.

Se λ for um ordinal limite, definimos $s|_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} s|_\alpha$, para cada uma das sequências. A *Hipótese de Indução* diz que para cada $\alpha < \lambda$, vale que $(\overline{M}, a|_\alpha, c|_\alpha) \equiv (\overline{M}', d|_\alpha, b|_\alpha)$, com as imagens das restrições $a|_\alpha$ e $c|_\alpha$ em $\overline{M}_{|\alpha|}$, e $b|_\alpha$ e $d|_\alpha$ em $\overline{M}'_{|\alpha|}$. Daí, temos que as imagens das restrições $a|_\lambda$ e $c|_\lambda$ em $\overline{M}_{|\lambda|}$, e $b|_\lambda$ e $d|_\lambda$ em $\overline{M}'_{|\lambda|}$, e a equivalência elementar $(\overline{M}, a|_\lambda, c|_\lambda) \equiv (\overline{M}', d|_\lambda, b|_\lambda)$ é imediata (testamos fórmula a fórmula, reduzindo ao caso em que os símbolos de costantes são interpretados em algum nível $\alpha < \lambda$).

A *Hipótese de Indução* para o ordinal sucessor $\alpha+1$ é $(\overline{M}, a|_\alpha, c|_\alpha) \equiv (\overline{M}', d|_\alpha, b|_\alpha)$, com as imagens das restrições $a|_\alpha$ e $c|_\alpha$ em $\overline{M}_{|\alpha|}$, e $b|_\alpha$ e $d|_\alpha$ em $\overline{M}'_{|\alpha|}$. Assim, vale também a equivalência elementar no nível $|\alpha|$, $(\overline{M}_{|\alpha|}, a|_\alpha, c|_\alpha) \equiv (\overline{M}'_{|\alpha|}, d|_\alpha, b|_\alpha)$. Como $\overline{M}_{|\alpha|}$ é $|\alpha|^+$-saturado, existe $d_\alpha \in M'_\alpha$, tal que $(\overline{M}_{|\alpha|}, a|_{\alpha+1}, c|_\alpha) \equiv (\overline{M}'_{|\alpha|}, d|_{\alpha+1}, b|_\alpha)$. Analogamente, existe $c_\alpha \in M$, tal que $(\overline{M}_{|\alpha|}, a|_{\alpha+1}, c|_{\alpha+1}) \equiv (\overline{M}'_{|\alpha|}, d|_{\alpha+1}, b|_{\alpha+1})$ (observe que $|\alpha + 1| = |\alpha|$, quando $\alpha \geq \omega$.

Para $\alpha = \kappa$ (um ordinal limite), obtemos as sequências c e d, e se definirmos $f : M \mapsto M'$, tal que para cada $\alpha \in \kappa$, $f(a_\alpha) = d_\alpha$, e $f(c_\alpha) = b_\alpha$, então f será um homomorfismo bijetor, pois as sequências a e b enumeram M e M', respectivamente. □

3.3. **Modelos Homogêneos.** Coletamos algumas propriedades de modelos κ-homogêneos e de modelos fortemente homogêneos. Aqui mostramos que um modelo especial $\overline{M}$ será $\mathrm{cof}(|M|)$-fortemente homogêneo e mostramos que modelos homogêneo satisfazem um resultado de unicidade mais fraco que a de modelos saturados.

Definição 6 (Modelos Fortemente κ-homogêneos)**.** A estrutura M será chamada de fortemente κ-homogênea se satisfizer a propriedade de que se $\kappa < |M|$ for um cardinal (infinito) e $(a_\alpha : \alpha < \kappa)$ e $(b_\alpha : \alpha < \kappa)$ forem sequências de elementos de M indexadas pelos ordinais menores que λ, e que as expansões $(M, (a_\alpha : \alpha < \kappa)) \equiv (M, (b_\alpha : \alpha < \kappa))$, então essas expansões são isomorfas. Isso significa que existe automorfismo $F : M \to M$, tal que $F(a_\alpha) = b_\alpha$, para todo $\alpha < \kappa$.

3.4. **O Modelo Monstro.** Na Teoria da Estabilidade em Teoria dos Modelos, sempre se assume a existência de um modelo ambiente (da teoria completa sendo estudada) muito saturado e homogêneo, contendo como subestruturas elementares todos os modelos de cardinalidades "pequenas" de onde são tomados parâmetros para conjuntos definíveis e para os tipos. Uma formalização dessa ideia é considerar uma cadeia elementar de modelos especiais $\overline{M}_\alpha$ (α ordinal) de cardinalidades κ_α estritamente crescentes. Chamamos tal cadeia de *modelo monstro*, e denotamos simplesmente por $\mathbb{M}$. A existência de tal cadeia elementar demonstra-se por recursão transfinita.

4. Saturação Recursiva

Tratamos agora de uma forma mais restrita da noção de saturação, os modelos recursivamente saturados. Esses modelos são importantes na teoria dos modelos da Aritmética de Peano.

4.1. **Linguagens Recursivas.** Saturação é uma propriedade de modelos realizarem tipos, o oposto à omissão de tipos.

Veremos primeiramente a propriedade de saturação recursiva, que se refere à realização de conjuntos recursivos de fórmulas e, por isso, precisamos definir o que vem a ser isto.

Sejam $V_0 = \varnothing$ e, se $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$ (o conjunto das partes – ou subconjuntos – de V_n) e $V_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Seja L_{ZF} a assinatura contendo apenas o símbolo de relação binária $\in$.

Dizemos que uma L_{ZF}-fórmula é Δ_0^0 (ou Π_0^0, ou também Σ_0^0) se for logicamente equivalente a uma fórmula sem quantificadores, ou da forma $\exists x(x \in y \wedge \psi)$ ou $\forall x(x \in y \to \psi)$, sendo que ψ também é considerada como Δ_0^0 e a variável y é distinta da variável x. Se θ for fórmula Π_n^0 (ou, respectivamente, Σ_n^0) e ϕ for equivalente a $\exists x\, \theta$ (ou a $\forall x\, \theta$, respectivamente), então dizemos que ϕ é Σ_{n+1}^0 (ou, respectivamente, Π_{n+1}^0), sendo y distinta de x. Se ϕ for, ao mesmo tempo, equivalente a uma fórmula Σ_n^0 e a uma outra fórmula Π_n^0, diremos que ϕ é Δ_n^0. Se θ for fórmula Π_n^0 (ou, respectivamente, Σ_n^0) e ϕ for equivalente a $\exists x(x \in y \wedge \theta)$ ou a

$\forall x(x \in y \to \theta)$, então dizemos que ϕ é Π^0_n (ou, respectivamente, Σ^0_n), sendo y distinta de x.

Diremos que o subconjunto $A \subset V_\omega$ é recursivamente enumerável, ou abreviadamente r.e., se for definido por uma fórmula ϕ Σ^0_1, ou seja, $A = \{a \in V_\omega : (V_\omega, \in) \models \phi(a)\}$. Dizemos que tal conjunto é recursivo se tanto A quanto $V_\omega \setminus A$ forem recursivamente enumerável (e portanto A é definível por fórmula Δ^0_1).

Identificando o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ com o subconjunto $\omega \subset V_\omega$ (ou seja, 0 é identificado como conjunto $\varnothing$ e $n+1$ com o conjunto correspondente a $\{0, \ldots, n\}$), podemos codificar assinaturas e linguagens em V_ω usando índices em ω. Mas os detalhes de tais possíveis codificações serão deixados para outra ocasião (veja o texo sobre a Incompletude). Para o que vem a seguir, basta sabermos que:

(1) podemos definir a soma e o produto em ω, imitando as operações de $\mathbb{N}$ por fórmulas Δ^0_1;
(2) podemos definir uma espécie de *assinatura maximal*, por exemplo contendo conjuntos disjuntos $C = \{c_s : s \in 2^{<\omega}\}$, $F = \{f_{n,s} : n \in \omega \text{ e } s \in 2^{<\omega}\}$ e $R = \{R_{n,s} : n \in \omega \text{ e } s \in 2^{<\omega}\}$, sendo que poderemos codificar cada símbolo como par ordenado ($c_s = (0, s)$, $F_{n,s} = ((0, n), s)$ e $R_{n,s} = ((1, n), s)$), etc;
(3) podemos definir os símbolos de variáveis por $x_n = (1, n)$ e os símbolos lógicos como $\wedge = (2, 0)$, $\vee = (2, 1)$, $\neg = (2, 2)$, $\to = (2, 3)$, $\exists x_n = (3, n)$, $\forall x_n = (4, n)$ e, se quisermos, códigos para símbolos de separação (vírgula e parênteses);
(4) fórmulas são sequências finitas de símbolos, satisfazendo as regras usuais de construção, etc.

As assinaturas que usaremos serão assumidas como subconjunto recursivo da assinatura maximal, cujo complemento seja infinito nessa assinatura.

4.2. **Modelos Recursivamente Saturados.** Dada uma assinatura recursiva L, dizemos que uma L-estrutura M é recursivamente saturada se, para todo conjunto de novas constantes $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ e todo conjunto recursivo $\Gamma(x)$ de $L(C)$-fórmulas tendo no máximo como livre a variável x, que seja finitamente satisfatível em M, então M realiza Γ.

Nesta seção, assumiremos que L será uma assinatura recursiva (finita ou enumerável).

Teorema 4.1. Dada L-estrutura infinita M, existe $N \succ M$ de mesma cardinalidade, que é recursivamente saturada.

Demonstração. Como a quantidade de conjuntos recursivos $\Gamma(x)$ é no máximo enumerável, o método das constantes pode ser aplicado para obtermos a extensão elementar desejada $N \succ M$. $\square$

Dada assinatura (recursiva) L, que tenha símbolos de função, seja L' a assinatura que contenha L e também contenha um símbolo relacional $(n+1)$-ário R_f para cada símbolo de função n-ária $f \in L$. Se A é uma L-estrutura, vamos expandi-la a uma L'-estrutura, interpretando cada símbolo relacional R_f como sendo o gráfico da função $f^A : A^n \to A$. Seja L'' a restrição de L' retirando-se apenas todos os símbolos de função. Com este procedimento, podemos trabalhar com assinaturas que não tenham símbolos de função, mas que estes sejam representados pelos seus gráficos (é apenas um truque sintático que não afeta de modo essencial as estruturas).

Seja T uma L-teoria consistente e suponhamos que $A, B \models T$ e suponhamos que L não tenha símbolos de função. Seja L^A a assinatura obtida de L pela indexação de cada símbolo de constante c com o índice c_A, e de cada símbolo de relação R com R_A e com um novo símbolo de relação unária U_A. Seja L^B obtida pela indexação dos símbolos de L agora por B, com o novo símbolo relacional unário U_B. Definimos o par de modelos $M = (A, B)$ como sendo a $L^A \cup L^B$-estrutura M, cujo domínio seja o conjunto $M = A \cup B$, interpretando $U_A^M = A$, $U_B^M = B$, $c_A^M = c^A \in A \subset M$, $c_B^M = c^B \in B \subset M$, para cada símbolo de constante $c \in L$, e $R_A^M = R^A \subset A^n \subset M^n$ e $R_B^M = R^B \subset B^n \subset M^n$, para cada símbolo relacional n-ário $R \in L$.

Para cada L-fórmula ϕ, definimos indutivamente ϕ_A como sendo:

(1) se ϕ for atômica, ϕ_A é obtida de ϕ trocando-se cada ocorrência de símbolo de constante $c \in L$ por $c_A \in L^A$ e de símbolo relacional $R \in L$ por R_A;
(2) $(\phi \wedge \psi)_A = \phi_A \wedge \psi_A$; $(\phi \wedge \psi)_A = \phi_A \wedge \psi_A$; $(\phi \vee \psi)_A = \phi_A \vee \psi_A$ e $(\neg\phi)_A = \neg(\phi_A)$;
(3) $(\exists x\phi)_A = \exists x(U_A(x) \wedge \phi_A)$ e $(\forall x\phi)_A = \forall x(U_A(x) \to \phi_A)$.

A mesma definição, *mutatis mutandis*[1], para ϕ_B.

Para a aplicação que temos em mente, precisamos de mais um ingrediente.

Dadas as L-estruturas A e B, um isomorfismo parcial é uma relação $I \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [A]^n \times [B]^n$ (sendo que $[A]^0 = [B]^0 = \{\varnothing\}$, e $[A]^n$ é o conjunto de todos os subconjuntos de A contendo exatamente n elementos, e o mesmo para $[B]^n$), tal que:

[1] Esnobice latinesca, que significa mudando o que deve ser mudado.

(1) $\varnothing \, I \, \varnothing$;
(2) se $\bar{a} \in [A]^n$ e $\bar{b} \in [B]^n$ são tais que $\bar{a} \, I \, \bar{b}$, então as $L(\{c_1, \ldots, c_n\})$-estruturas $(A, \bar{a})$ e $(B, \bar{b})$ satisfazem as mesmas $L(\{c_1, \ldots, c_n\})$-sentenças atômicas;
(3) (homogeneidade) se $\bar{a} \in [A]^n$ e $\bar{b} \in [B]^n$ são tais que $\bar{a} \, I \, \bar{b}$, dado $a_{n+1} \in A$ existe $b_{n+1} \in B$ (e, reciprocamente, dado $b_{n+1} \in B$, existe $a_{n+1} \in A$) tal que $\bar{a} \cup \{a_{n+1}\} \, I \, \bar{b} \cup \{b_{n+1}\}$.

Lema 4.1. Se existir um isomorfismo parcial I entre A e B, então $A \equiv B$.

Demonstração. Provamos a seguinte asserção, por indução na complexidade das L-fórmulas, que implicará na equivalência elementar entre A e B:

> Para todo $n \geq 0$ e todo $\bar{a} = \{a_1, \ldots, a_n\} \in [A]^n$ e todo $\bar{b} = \{b_1, \ldots, b_n\} \in [B]^n$, se $\{a_1, \ldots, a_n\} \, I \, \{b_1, \ldots, b_n\}$ e $\phi(x_1, \ldots, c_n)$ é L-fórmula e $A \models \phi(\bar{a})$, então $B \models \phi(\bar{b})$.

O passo inicial, das fórmulas atômicas, segue imediatamente da segunda condição da definição do isomorfismo parcial e os conectivos proposicionais não trazem nenhuma dificuldade.

Consideremos uma fórmula $\exists x \phi(x, x_1, \ldots, x_n)$, tal que $A \models \exists x \phi(x, \bar{a})$ e seja $a \in A$, tal que $A \models \phi(a, \bar{a})$ – estamos também supondo, como hipótese de indução, que a afirmação é verdadeira para a fórmula ϕ. Pela terceira condição sobre o isomorfismo parcial, existe $b \in B$, tal que $\{a_1, \ldots, a_n, a\} \, I \, \{b_1, \ldots, b_n, b\}$, o que implica que $B \models \phi(b, \bar{b})$, pela hipótese de indução.

Por fim, consideremos uma fórmula $\forall x \phi(x, x_1, \ldots, x_n)$, tal que $A \models \forall x \phi(x, \bar{a})$ e seja $b \in B$. Pela terceira condição sobre o isomorfismo parcial, existe $a \in A$, tal que $\{a_1, \ldots, a_n, a\} \, I \, \{b_1, \ldots, b_n, b\}$. Como $A \models \forall x \phi(x, \bar{a})$, temos que $A \models \phi(a, \bar{a})$ e, portanto, que $B \models \phi(b, \bar{b})$, por hipótese de indução. Mas isto implica que $B \models \forall x \phi(x, \bar{b})$, dado que o elemento $b \in B$ é arbitrário.

Se L contiver pelo menos um símbolo de constante, então se ϕ for L-sentença atômica (que existe) e $A \models \phi$, então $B \models \phi$ devido às duas primeiras condições sobre o isomorfismo parcial. A conjunção, disjunção, implicação e negação de L-sentenças seguem facilmente por indução e a quantificação também sai por indução e pela terceira condição em I.

Para terminarmos a demonstração, precisamos ainda considerar o caso em que a assinatura L não contenha nenhum símbolo de constante e, portanto não tenha sentenças atômicas – aqui o passo inicial da indução para provarmos que $A \equiv B$ é o das L-sentenças menos complexas, que são do tipo $\exists x\phi(x)$ ou $\forall x\phi(x)$, sendo $\phi(x)$ atômica e contendo apenas uma variável. Mas este caso tem o tratamento igual ao da quantificação que foi feito acima. $\square$

Por fim, a aplicação. Lembramos que uma L-teoria é completa se, para toda sentença ϕ, ou $T \models \phi$ ou $T \models \neg\phi$ (isto é, ϕ ou $\neg\phi$ é consequência lógica de T).

Teorema 4.2. Uma L-teoria T é completa se, e somente se, para todo $M = (A, B)$ $L^A \cup L^B$-estrutura recursivamente saturada, se $A, B \models T$ então existe isomorfismo parcial I entre A e B.

Demonstração. ($\Rightarrow$): Suponhamos que T seja completa e que $M = (A, B)$ $L^A \cup L^B$-estrutura recursivamente saturada, com $A, B \models T$.

Afirmamos que a relação $\bar{a}\, I\, \bar{b}$ se $(A, \bar{a}) \equiv (B, \bar{b})$ é um isomorfismo parcial.

Sendo T completa e $A, B \models T$, então $A \equiv B$, o que implica que $\varnothing\, I\, \varnothing$, ou seja, a primeira condição está garantida.

Se $(A, \bar{a}) \equiv (B, \bar{b})$, certamente essas duas estruturas satisfazem as mesmas $L(\bar{c})$-sentenças – a segunda condição!

Por fim, suponhamos que $\bar{a}\, I\, \bar{b}$ e que $a \in A$. Seja $\Gamma(x)$ o conjunto de todas as fórmulas da forma $U_B(x)$ e $\phi_A(c_a, \bar{c}) \leftrightarrow \phi_B(x, \bar{d})$, sendo $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ um L-fórmula com as variáveis livres indicadas, e c_a, $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_n)$, $\bar{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ novas constantes, todas distintas. Certamente tal conjunto é recursivo. Da hipótese de que $\bar{a}\, I\, \bar{b}$, ou seja, de que $(A, \bar{a}) \equiv (B, \bar{b})$, vemos que cada parte finita de Γ é satisfatível em M e, portanto, pela hipótese de que M é recursivamente saturado, Γ é realizado por um elemento $b \in B \subset M$. Isto quer dizer, então, que $(A, \bar{a}, a) \equiv (B, \bar{b}, b)$. Trocando A por B no argumento acima exposto, obtemos o que faltava para concluir aque a terceira condição também está verificada para I.

($\Leftarrow$): Agora suporemos que para todo $M = (A, B)$ $L^A \cup L^B$-estrutura recursivamente saturada, se $A, B \models T$ então existe isomorfismo parcial I entre A e B. Mostraremos que T é completa.

Para isto, basta mostrar que, dados modelos $A_0, B_0 \models T$, temos que $A_0 \equiv B_0$. Consideremos o par $M_0 = (A_0, B_0)$ e uma extensão elementar $M = (A, B)$ que seja recursivamente saturada. Como $M \succ M_0$, devemos ter $A_0 \prec A$ e $B_0 \prec B$, ou seja, $A, B \models T$. pela hipótese, existe isomorfismo parcial entre A e B e, portanto, $A \equiv B$. Isto implica que $A_0 \equiv B_0$, como esperávamos. $\square$

Este é um bom critério para provar que certas teorias T são completas.

Exemplo 4.1. Consideremos o seguinte conjunto de sentenças T, que são satisfeitas na estrutura $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, 0, 1, +, -, <)$:

(1) sentenças dizendo que $(\mathbb{Z}, 0, +, -)$ é um grupo abeliano (a soma é associativa, distributiva, tem elemento neutro 0 e oposto $-$);
(2) $<$ é uma ordem linear (estrita) em $\mathbb{Z}$ e 1 é o menor elemento positivo;
(3) $\forall x, y, z(x < y \to x + z < y + z)$ (a ordem é compatível com a operação do grupo)
(4) para cada $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ a sentença $\forall x \bigvee_{0 \leq j < k}(k|x - j)$, sendo que $k|t$ é a fórmula $\exists z(kz = t)$ e kz representa o termo $(z + (z + (... + z) \dots)$ contendo exatamente k vezes a variável z.

Provemos que tal conjunto T forma uma teoria completa usando o critério acima.

Consideremos $A, B \models T$, tais que $M = (A, B)$ seja recursivamente saturado. Definimos a relação I entre n-uplas de A e de B, como $\bar{a}\, I\, \bar{b}$ se:

(1) para cada termo $T(x_1, \dots, x_n)$, $A \models T(\bar{a}) > 0$ se, e somente se, $B \models T(\bar{b}) > 0$;
(2) para cada termo $T(x_1, \dots, x_n)$ e cada $k \in \mathbb{N}$ $k > 1$, $A \models k|T(\bar{a})$ se, e somente se, $B \models k|T(\bar{b})$.

A condição $\varnothing\, I\, \varnothing$ decorre diretamente do fato de que $A, B \models T$.

As fórmulas atômicas de L são da forma $T_1(\bar{x}) < T_2(\bar{x})$ ou $T_1(\bar{x}) = T_2(\bar{x})$. A primeira é equivalente, em modelos de T, a uma do tipo $T(\bar{x}) > 0$ (ou, mais precisamente, $0 < T(\bar{x})$), e a segunda é equivalente, naqueles modelos, a uma do tipo $T(\bar{x}) = 0$, que é equivalente a $T(\bar{x}) + 1 > 0 \wedge -T(\bar{x}) + 1 > 0$. Usando essas equivalências e a hipótese de que $\bar{a}\, I\, \bar{b}$, concluímos que $(A, \bar{a})$ e $(B, \bar{b})$ satisfazem as mesmas $L(\bar{c})$-sentenças atômicas, ou seja, a segunda condição de um isomorfismo parcial.

Para verificarmos a terceira condição, basta mostrar a seguinte afirmação, decorrente dessas equivalências expostas acima e do Teorema da Compacidade (observando que $\bigwedge_{i=1}^{n}(\phi_i \leftrightarrow \psi_i)$ é logicamente equivalente a $(\bigwedge_i \phi_i \leftrightarrow \bigwedge_i \psi_i)$):

Para todos os termos $T(\bar{x})$ e $S(\bar{x})$ e todos $k, l, m \in \mathbb{N}$, com $k > 1$, se

$$A \models P(\bar{a}) < mc < S(\bar{a}) \text{ e } c \equiv l (\operatorname{mod} k),$$

então existe $x \in B$, tal que

$$B \models P(\bar{b}) < mx < S(\bar{b}) \text{ e } x \equiv l (\operatorname{mod} k).$$

Se existirem apenas uma quantidade finita de elementos de A entre $T(\bar{a})$ e $S(\bar{a})$, então o elemento c é da forma $c = T(\bar{a}) + j$, para algum $j \in \mathbb{N}$ e, portanto x será da mesma forma $x = T(\bar{b}) + j$. Senão, sendo infinita a quantidade, o mesmo ocorrerá em B e podemos escolher $x \equiv l \pmod{k}$ naquele intervalo, o que sempre existirá.

5. Exercícios

Exercício 5.1. Mostre que a união e a intersecção de conjuntos recursivos é recursiva.

Exercício 5.2. Ache fórmulas Δ_1^0 específicas para definir as codificações indicadas na introdução.

Obs.: Nos exercícios a seguir, que tratam de estruturas recursivamente saturadas, uma hipótese implícita e sempre presente será a de que L é uma assinatura recursiva sem símbolos de funções.

Exercício 5.3. Mostre que se M é estrutura recursivamente saturada e $|M| = \omega$, então existe um automorfismo (morfismo bijetor) de M distinto da identidade. [Sugestão: tente achar elementos distintos a_0 e b_0 de M, tais que $(M, a_0) \equiv (M, b_0)$.]

Exercício 5.4. Seja $M = (A, B)$ um par recursivamente saturado. Mostre que tanto A como B são também recursivamente saturados.

Exercício 5.5. Suponha que A e B sejam L-estruturas, tais que $B \subseteq A$ e a estruturas expandida (A, P) seja recursivamente saturada, na linguagem expandida com um símbolo relacional unário P, interpretado como sendo o subconjunto B de A. Mostre que o par $M = (A, B)$ é estrutura recursivamente saturada.

Exercício 5.6. Seja $M = (A, B)$ uma estrutura recursivamente saturada, com $|M| = \omega$. Mostre as seguintes equivalências:

(1) $T_\exists(A) = T_\exists(B)$ (A e B satisfazem as mesmas sentenças existenciais) se, e somente se, existir inclusao de A em B.
(2) $T^+(A) = T^+(B)$ se, e somente se, existir um homomorfismo sobrejetor $f : A \to B$.

Exercício 5.7. Prove que se I é um isomorfismo parcial entre A e B e $(a_1, \dots, a_n) \, I \, (b_1, \dots, b_n)$, então existe isomorfismo parcial entre as estruturas expandidas $(A, \bar{a})$ e $(B, \bar{b})$.

Exercício 5.8. Use o método dos modelos recursivamente saturados para obter axiomatizações completas das teorias das seguintes estruturas:

(1) $(\omega, <)$;
(2) $(\mathbb{Q}, 0, +, \leq)$;
(3) $(\mathbb{Q}, <, F)$, sendo que $F : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ é automorfismo de $(\mathbb{Q}, <)$, tal que $\forall x (x < F(x))$.

Exercício 5.9. Mostre que uma estrutura M é κ-saturada para todo cardinal $\kappa \geq \omega$ se, e somente se, M for estrutura finita.

Exercício 5.10. Mostre que se M é κ-homogênea e $|M| = \kappa$, então dados $\lambda < \kappa$ e $X, Y \subset M$, tais que $|X| = |Y| = \lambda$ e $(M, x_\alpha)_{\alpha<\lambda} \equiv (M, y_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ (sendo que x_α e y_α são enumeraçõesde X e Y, respectivamente), então existe um automorfismo $f : M \to M$ (ou seja, L-morfismo bijetor), tal que $f(x_\alpha) = y_\alpha$, para todo $\alpha < \lambda$. [Sugestão: enumere $M = \{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de modo que estenda a enumeração de X e também como $M = \{b_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de modo que estenda a enumeração de Y e defina f indutivamente, partindo da função $f_0 : x_\alpha \in X \mapsto y_\alpha \in Y$.]

Exercício 5.11. Sejam I um conjunto infinito, M_i, $i \in I$, L-estruturas, e U um ultrafiltro ω-incompleto sobre I. Mostre que o ultraproduto $\prod_i M_i/_U$ é uma estrutura ω_1-saturada.

Exercício 5.12. Sejam $M \equiv N$ duas estruturas saturadas e de mesma cardinalidade (são ambas $|M|$-saturadas, $|M| = |N|$). Mostre que M e N são isomorfas.

Exercício 5.13. Neste exercício assumiremos a Hipótese do Contínuo: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Sejam A e B duas L-estruturas, $|L| \leq \omega$, com cardinalidades $|A|, |B| \leq \aleph_1$. Mostre que são equivalentes:

(1) $A \equiv B$;
(2) para todos os ultrafiltros não principais U e V sobre ω, são isomorfos os ultraprodutos $\prod A/_U \cong \prod B/_U \cong \prod B/_V$;
(3) existem ultrafiltros U e V (sobre algum conjunto de índices I), tais que $\prod A/_U \cong \prod B/_V$.