Mecânica Relativística

Einstein compatibilizou a eletrodinâmica de Maxwell com seu princípio de Relatividade

Mas a mecânica Newtoniana não é compatível com isso. Precisamos, modificá-la

Já vimos como fazer quando as forças são de natureza eletromagnética → quadri-força de Lorentz

Certamente temos que ~~~~ obter a Mecânica Newtoniana para $\frac{v}{c} \ll 1$, pois sabemos que ela funciona neste limite.

Colisões de partículas é uma abordagem promissora pois não necessita, em princípio, definir força.

Caminho → leis de conservação de quadri-vetores

Conservação do quadri-momento (hipótese)

"A soma dos quadri-momentos de todas as partículas ~~sofrendo~~ entrando em uma colisão é a mesma que a soma dos quadri-momentos de todas as partículas saindo da colisão"

A colisão pode ou não ser elástica.

Escrevemos

$$\sum^{*} P^{\mu}_{(a)} = 0 \qquad a = 1, 2, 3 \ldots$$

refere às partículas

$\sum^{*} \equiv$ Conta como positivos os quadri-momentos das partículas entrando, e como negativos as que saem

Ou ainda

$$\sum_{in} P^{\mu}_{(a)} = \sum_{out} P^{\mu}_{(a)}$$

Escrevemos, como $\underline{\underline{m_0}}$ a massa de repouso da partícula

Daí

$$P^{\mu} = m_0 u^{\mu} \qquad u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \equiv \text{quadri-velocidade}$$

e

$$P \equiv (mc, \vec{p}) \qquad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m\vec{v}$$

$$m \equiv \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

massa relativística inercial

$$\left(\begin{array}{l} P \equiv \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \\ E = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{array} \right)$$

~~Nota~~ Nota que $\underline{\underline{m}}$ cresce com $\underline{\underline{v}}$.

Como o quadrivetor $\sum^* p^\mu_{(a)} = 0$, então suas 4 componentes devem zerar. Em particular, as componentes espaciais

$$\sum^* m v^i = 0$$

$$\uparrow$$

$$\frac{dx^i}{dt}$$

$$\left(u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$\parallel$$

$$v^i$$

Isto parece com a lei de conservação do momento linear da Teoria Newtoniana.

Mas, agora m depende da velocidade $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Razoável? É a única lei invariante de Lorentz que podemos ter!

Note que volta a Newton p/ $\frac{v}{c} \ll 1$

Equivalência entre massa e energia

A conservação do quadrimomento total implica que sua componente temporal deve ser conservada:

$$\sum^* m_{(a)} = 0$$

Note que não é igual à conservação de massa na mecânica Newtoniana, pois m depende da velocidade.

Na verdade, $\sum^{*} m = 0$, implica a conservação de uma energia que é feita de energia cinética e energia contida na "massa" da partícula.

Consideremos a expansão

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} m_0 v^2\right) + \dots$$

ou

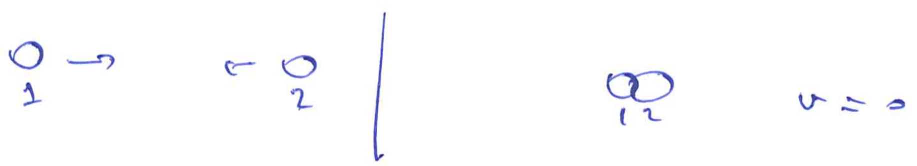
$$mc^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots$$

Ou seja, o que é conservado é a "energia cinética" e a "energia de repouso" contida na massa de repouso. Logo

"massa e energia são equivalentes"

Podemos generalizar para "outras formas" de energia.

Exemplo Colisão ~~de 2~~ inelástica de 2 partículas



energia cinética é transformada em calor.

As esferas partículas fornecem ΔE de calor ao ambiente

$\Delta E \equiv$ energia cinética original

Logo após a colisão e antes de ceder calor ao ambiente as duas partículas em repouso tinham um excesso de massa $\frac{\Delta E}{c^2}$

Portanto, calor contribui para massa.

~~Hoje conta~~

Todas as formas de energia podem contribuir para a massa e vice-versa

Confirmação experimental: Exemplo da aniquilação de pares de partícula anti-partícula

$$\underset{e^+}{\circ} \quad \underset{e^-}{\circ} \quad \rightarrow \quad \text{fótons}$$

$$2m_0c^2 \quad \rightarrow \quad 2m_0c^2 \text{ em energia p/ fótons}$$

Ex: Sol: vivemos graças à transformação de massa em energia pelas reações de fusão nuclear no sol.

Podemos distinguir energia cinética T e "energia interna" m_0c^2 pela relação

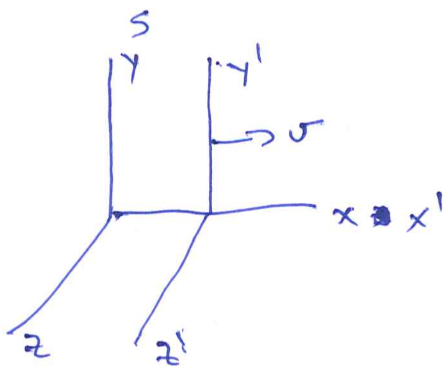
$$T = c^2(m - m_0)$$

Nota $T \rightarrow \infty$ se $v \rightarrow c$

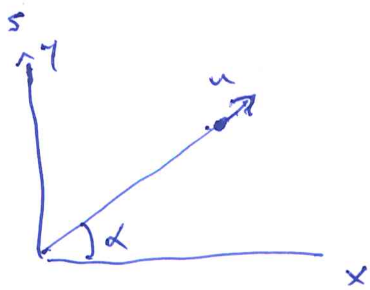
Particle aberration formula

Antes de analisar o espalhamento de partículas vamos estudar o que é chamado de "aberração", ou seja a mudança de direção de ~~p~~ uma partícula conforme nos movemos em relação a ela (notamos isso na inclinação da chuva quando dirigimos um carro)

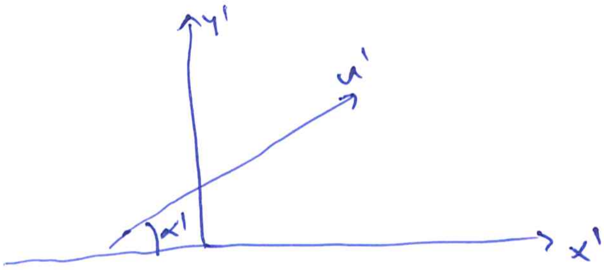
Considere dois sistemas inerciais S e S', de tal modo que S' move-se com velocidade v ao longo do eixo-x positivo de S



Suponha que tenhamos uma partícula movendo-se com velocidade u formando um ângulo α com o eixo-x de S (tudo no plano x-y)



No referencial S' ele vai fazer um ângulo α' em relação ao eixo-x':



Pelas transformações de Lorentz temos que

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) \qquad dx' = \gamma(dx - v\,dt)$$

$$dy' = dy \qquad \text{e} \qquad dz' = dz$$

Com $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Temos que

$$u = (u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

$$u' = (u_1', u_2', u_3') = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right)$$

Mas

$$dt' = \gamma\,dt\left(1 - \frac{v}{c^2}u_1\right) \qquad dx' = \gamma\,dt(u_1 - v)$$

e daí

$$\underbrace{\frac{dx'}{dt'}}_{u_1'} = \frac{u_1 - v}{1 - u_1\frac{v}{c^2}}, \qquad \underbrace{\frac{dy'}{dt'}}_{u_2'} = \frac{u_2}{\gamma\left(1 - u_1\frac{v}{c^2}\right)}, \qquad \underbrace{\frac{dz'}{dt'}}_{u_3'} = \frac{u_3}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_1\right)}$$

Temos que

$$u'_1 = u'\cos\alpha' \qquad u'_2 = u'\,\mathrm{sen}\,\alpha' \qquad u'_3 = 0$$

$$u_1 = u\cos\alpha \qquad u_2 = u\,\mathrm{sen}\,\alpha \qquad u_3 = 0$$

Daí

$$u'\cos\alpha' = \frac{u\cos\alpha - v}{1 - u\cos\alpha\frac{v}{c^2}} \ , \quad u'\,\mathrm{sen}\,\alpha' = \frac{u\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\gamma\left(1 - u\cos\alpha\frac{v}{c^2}\right)}$$

Daí

$$\boxed{\tan\alpha' = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha'}{\cos\alpha'} = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\gamma(v)\left(\cos\alpha - \frac{v}{u}\right)}} \qquad (*)$$

Esta é a "particle aberration formula"

Nota que se a partícula for um fóton temos

$$u = u' = -c$$ (assumindo que o fóton incide sobre o observador)

e daí

$$\boxed{\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha + v/c}{1 + \frac{v}{c}\cos\alpha} \ , \quad \sin\alpha' = \frac{\sin\alpha}{\gamma(v)\left(1 + \frac{v}{c}\cos\alpha\right)}} \qquad (**)$$

Esta é a "light aberration formula"

Esta aberração foi primeiramente observada por Bradley em 1728 e devido ao movimento da Terra em torno do Sol

Nota que podemos usar a identidade trigonométrica

$$\frac{\sin\alpha'}{1+\cos\alpha'} = \frac{2\sin\left(\frac{\alpha'}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha'}{2}\right)}{1+\cos^2\left(\frac{\alpha'}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha'}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{\alpha'}{2}}{\cos\frac{\alpha'}{2}} = \tan\left(\frac{\alpha'}{2}\right)$$

Daí temos que, usando (✱✱)

$$\cancel{\frac{\sin\alpha'}{1+\cos\alpha'} = \frac{\sin\alpha}{\gamma(v)(1+\cos\alpha}}$$

$$1+\cos\alpha' = \frac{1+\frac{v}{c}\cos\alpha+\cos\alpha+\frac{v}{c}}{1+\cos\alpha\,\frac{v}{c}} = \frac{\left(1+\frac{v}{c}\right)(1+\cos\alpha)}{1+\cos\alpha\,\frac{v}{c}}$$

e

$$\frac{\sin\alpha'}{1+\cos\alpha'} = \frac{\sin\alpha}{\gamma(v)(1+\cos\alpha)\left(1+\frac{v}{c}\right)} =$$

$$= \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\,\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+v/c} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}$$

Ou seja

$$\boxed{\tan\frac{\alpha'}{2} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\,\tan\frac{\alpha}{2}}$$

Como $\tan\frac{1}{2}\alpha$ é monotônica ~~em~~ no intervalo $0\leq\alpha\leq 180^\circ$, observamos que

$$\alpha' < \alpha \quad \text{se} \quad v>0$$

$$\alpha' > \alpha \quad \text{se} \quad v<0$$

Note que para termos o raio saindo do observador basta trocar c por $-c$.

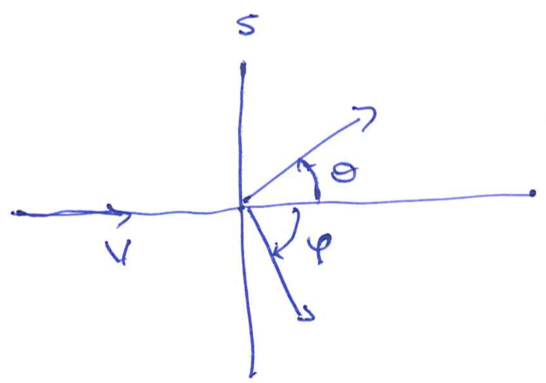
Note que conforme $v \to c$ ~~o~~ o ângulo α' fica bastante menor que α. Ou seja, a radiação ~~da~~ de uma carga acelerada acaba sendo emitido em um cone restrito na direção frontal.

Isso é o que ocorre na radiação síncrotron, emitida por cargas bastante aceleradas em um anel circular.

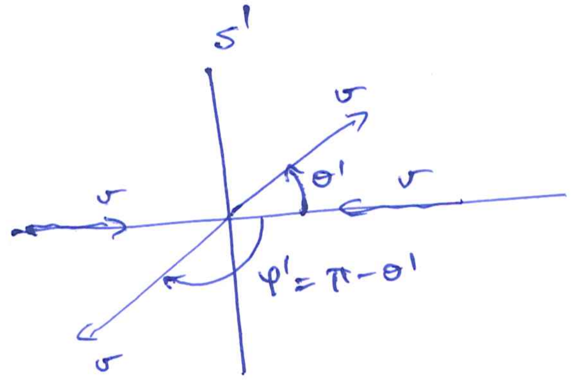
Espalhamento partículas com mesma massa

Vamos considerar ~~o~~ espalhamento elástico de duas partículas de mesma massa.

No referencial laboratório uma ~~ou~~ partícula está parada e a outra se aproxima com velocidade V



No entanto, é mais fácil analisar este problema no referencial onde as duas se aproximam com mesma velocidade v em direções opostas



Pela conservação do momento (e energia) segue que as partículas saem c/ a mesma velocidade v e em direções opostas (mas em eixo diferente)

Pela equação de aberração das partículas (*) na pág (67) temos que

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta'}{\gamma(v)(\cos\theta'+1)}$$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi'}{\gamma(v)(-\cos\theta'+1)}$$

$$\left(\sin\varphi' = \sin(\pi-\theta') = \sin\theta'\right)$$

$$\left(\cos\varphi' = \cos(\pi-\theta') = -\cos\theta'\right)$$

Ou seja, temos a relação entre os ângulos nos dois referenciais.

Multiplicando temos

$$\tan\theta\tan\varphi = \frac{\sin\theta'\sin\varphi'}{\gamma^2(v)(1-\cos^2\theta')} = \frac{1}{\gamma^2(v)} = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Podemos escrever isso como (veja (6.17) e (3.10) do Rindler (segunda edição))

$$\tan\theta\tan\varphi = \frac{1}{\gamma^2(v)} = \frac{2}{\gamma(V)+1}$$

Note que p/ $c\to\infty$ obtemos o resultado Newtoniano onde

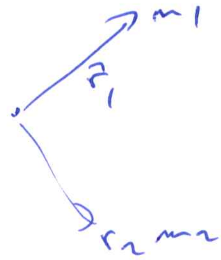
$$\tan\theta\tan\varphi = 1 \rightarrow \theta+\varphi = 90^\circ$$

que é a regra p/ bolas de bilhar de mesma massa.

The zero-momentum frame

Na Mecânica Newtoniana temos o conceito de "centro de massa" que é uma média ponderada dos vetores posição das partículas, onde o peso (na média) é a massa:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a}$$



Na Relatividade Especial este conceito não ~~se aplica~~ é apropriado pois não envolve quadri-vetores ou invariantes.

~~[illegible]~~ Dado um sistema de partículas consideramos o quadri-momento total

$$P^\mu = \sum_a P^\mu_a = \sum_a \left(\frac{E_a}{c}, \vec{p}_a \right)$$

O referencial "zero-momento" é aquele onde a soma dos momentos espaciais se anula, i.e.

$$\sum_a \vec{p}_a = 0$$

e daí

$$P^\mu_{ZM} = \left(\sum_a \frac{E_a}{c}, 0 \right)$$

Note que este conceito de referencial de momento zero não se aplica para um sistema de fótons, pois eles sempre têm que ter um momento p/ existir.

Por exemplo, considere dois fótons movendo-se ~~na~~ na mesma direção. Não existe um referencial onde a soma de seus momentos espaciais é zero.

Outra observação é que o quadri-momento total é sempre "time-like". Para uma partícula

$$\cancel{\boxed{P_\mu P^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2}}$$

$$P^\mu = m_0 u^\mu \rightarrow P_\mu P^\mu = m_0^2 u_\mu u^\mu = m_0^2 c^2$$

Se temos duas partículas com quadrimomento P_1^μ e P_2^μ, consideramos o invariante $P_1^\mu P_{2\mu}$. Indo para o referencial de repouso da primeira temos

$$P_1^\mu = \left(\frac{E_1}{c}, 0\right) \qquad P_2^\mu = \left(\frac{E_2}{c}, \vec{P}\right)$$

e daí

$$P_1^\mu P_{2\mu} = \frac{E_1 E_2}{c^2} = \frac{m_0^{(1)} c^2}{c^2} \frac{m_0^{(2)} c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= m_0^{(1)} m_0^{(2)} c^2 \gamma(v) > 0$$

Logo se tomarmos a soma dos quadrimomentos de um sistema de partículas

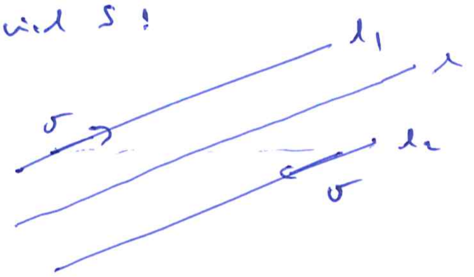
$$(P_1^\mu + P_2^\mu + P_3^\mu + \dots)^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + 2P_1P_2 + 2P_1P_3 + \dots$$

e cada termo é positivo, e portanto time like.

Logo é compatível com o facto de ~~[illegible]~~ existir um referencial onde $\sum_a P_a^\mu$, ~~não~~ tem componente espacial nula.

Nota que ao contrário da Mecânica Newtoniana o centro de massa ~~[illegible]~~ na Relatividade Especial não é unicamente determinado.

Considere duas partículas idênticas movendo-se com velocidades opostas em linhas paralelas l_1 e l_2 e um referencial S:



O centro de massa delas está na linha intermediária l

No referencial de repouso de uma delas, a outra é mais massiva, e dai o centro de massa não está em l.

Variáveis de Mandelstam

Estas variáveis são invariantes de Lorentz usados no espalhamento de 2 partículas indo e 2 partículas, e elas codificam a energia, momento e ângulos.

Considere partículas 1 e 2 se espalhando e produzindo partículas 3 e 4. O quadrimomento é conservado

$$P_1^\mu + P_2^\mu = P_3^\mu + P_4^\mu$$

as variáveis de Mandelstam são definidas como:

$$s = (P_1+P_2)^2 c^2 = (P_3+P_4)^2 c^2$$

$$t = (P_1-P_3)^2 c^2 = (P_4-P_2)^2 c^2$$

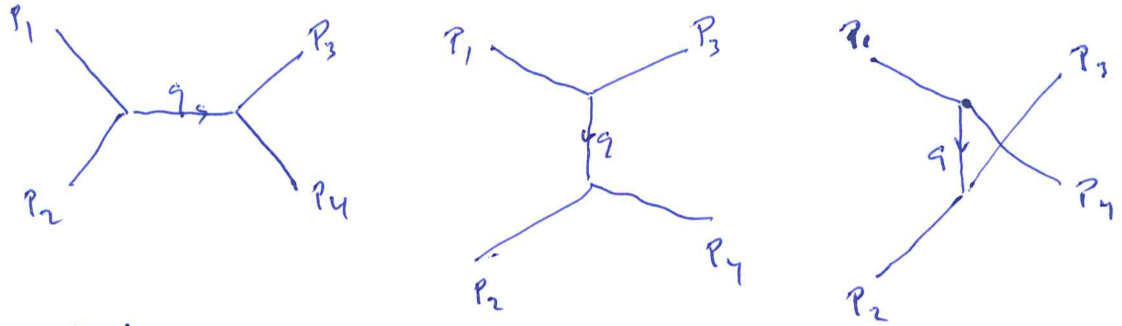
$$u = (P_1-P_4)^2 c^2 = (P_3-P_2)^2 c^2$$

Note que s é a energia total ao quadrado no referencial "zero momento". De fato

$$P_1^\mu + P_2^\mu = \left(\frac{E_1}{c}+\frac{E_2}{c}, 0\right)$$

e $$s^2 = (E_1+E_2)^2$$

Costuma-se usar a estas variáveis para denotar os canais s, t e u



s-channel $\uparrow$ $q = P_1 + P_2$

t-channel $\uparrow$ $q = P_1 - P_3$

u-channel $\uparrow$ $q = P_1 - P_4$

Nota que

$$\frac{s+t+u}{c^2} = (P_1+P_2)^2 + (P_1-P_3)^2 + (P_1-P_4)^2$$

$$= P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 + P_1^2 + P_3^2 - 2P_1P_3 + P_1^2 + P_4^2 - 2P_1P_4$$

$$= 3P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 + 2P_1\underbrace{(P_2 - P_3 - P_4)}_{=-P_1}$$

$$= P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2$$

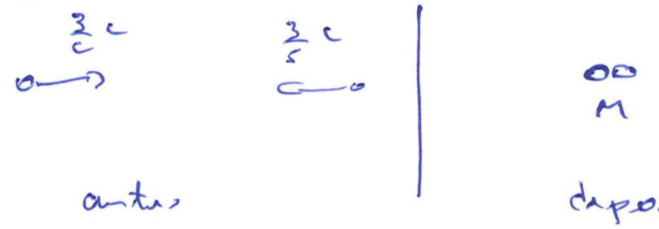
$$= (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2)\,c^2$$

Ou seja a soma das massas de repouso ao quadrado.

Exemplo 1

(Griffiths cap 3?)

Considere dois pedaços de argila de massa m (iguais) que colidem "head-on" com velocidade $\frac{3}{5}c$. e grudam um ao outro.



Qual a massa M?

Pela conservação de energia $E_1 + E_2 = E_M$

" " " momento $p_1 + p_2 = p_M$

$p_M = 0 \Leftrightarrow p_1 = -p_2$

Daí

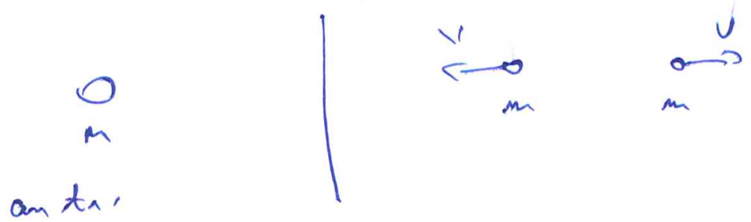
$$E_M = Mc^2 = \frac{2mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}} = \frac{5}{4}\,2mc^2$$

Logo $M = \frac{5}{2}m$

Nota que $M > 2m$, pois o calor aumenta a massa de repouso do bloco grudado.

Exemplo 2

Uma partícula de massa M em repouso decai em duas de massa m cada. Qual a velocidade das massas resultantes?



Conservação de energia

$$Mc^2 = \frac{2mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow 1-\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{2m}{M}\right)^2$$

$$\rightarrow \quad \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{2m}{M}\right)^2}$$

Note que temos que ter $M \geq 2m$, e $M = 2m$ é o limiar possível para o decaimento

Caso do deuteron

$m_d = 1875.6 \; MeV/c^2$ $\qquad m_p + m_n = 1877.9 \; MeV/c^2$

Logo deuteron não pode decair em $p+n$

Temos que excitar o deuteron para isso acontecer

Exemplo 3

$$\pi \rightarrow \mu + \nu$$

Qual a velocidade do muon?. Considere $m_\nu = 0$

Conservação de energia $\quad E_\pi = E_\mu + E_\nu$

" " momento $\quad \vec{p}_\pi = \vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu \rightarrow \vec{p}_\mu = -\vec{p}_\nu$

pois $\vec{p}_\pi = 0$

Usamos $\quad E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$

Daí

$$E_\pi = m_\pi c^2$$

$$E_\mu = c\sqrt{m_\mu^2 c^2 + \vec{p}_\mu^{\,2}}$$

$$E_\nu = |p_\nu| c = |p_\mu| c$$

e

$$m_\pi c^2 = c\sqrt{m_\mu^2 c^2 + \vec{p}_\mu^{\,2}} + |p_\mu| c$$

$$(m_\pi c - |p_\mu|)^2 = m_\mu^2 c^2 + \vec{p}_\mu^{\,2}$$

$$m_\pi^2 c^2 - 2 m_\pi c |p_\mu| = m_\mu^2 c^2$$

$$|p_\mu| = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2) c}{2 m_\pi}$$

e daí

$$E_\mu = c\sqrt{m_\mu^2 c^2 + \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2 c^2}{4 m_\pi^2}}$$

$$= c^2 \sqrt{\frac{4 m_\pi^2 m_\mu^2 + m_\pi^4 + m_\mu^4 - 2 m_\pi^2 m_\mu^2}{4 m_\pi^2}}$$

$$= c^2 \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)}{2 m_\pi}$$

Mas $E = \gamma m c^2$ e $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$

Logo $$\frac{\vec{p}}{E} = \frac{\vec{v}}{c^2}$$

e daí

$$v_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} c$$

Utilizando o valor das massas $v_\mu = 0.271 c$

Um jeito mais rápido!

Use conservação do quadrimomento

$$P_\pi^\rho = P_\mu^\rho + P_\nu^\rho \rightarrow P_\nu^\rho = P_\pi^\rho - P_\mu^\rho$$

e daí

$$P_\nu^2 = P_\pi^2 + P_\mu^2 - 2 P_\pi P_\mu$$

$$0 = m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2 \underbrace{\frac{E_\pi}{c}}_{= m_\pi c} \frac{E_\mu}{c}$$

e daí

$$2 m_\pi E_\mu = m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2$$

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2 m_\pi} c^2$$

De maneira análoga

$$P_\mu^\rho = P_\pi^\rho - P_\nu^\rho \rightarrow P_\mu^2 = P_\pi^2 + P_\nu^2 - 2 P_\pi P_\nu$$

$$m_\mu^2 c^2 = m_\pi^2 c^2 - 2 \underbrace{\frac{E_\pi}{c}}_{= m_\pi c} \frac{E_\nu}{c}$$

$$E_\nu = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)}{2 m_\pi} c^2$$

Mas $E_\nu = |P_\nu| c = |P_\mu| c$ e daí

$$|P_\mu| = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2) c}{2 m_\pi}$$

Daí

$$\frac{|P_\mu|}{E_\mu} = \frac{|v_\mu|}{c^2} = \left(\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2}\right) \frac{1}{c} \rightarrow |v_\mu| = \left(\frac{m_\pi^2 - m_M^2}{m_\pi^2 + m_M^2}\right) c$$

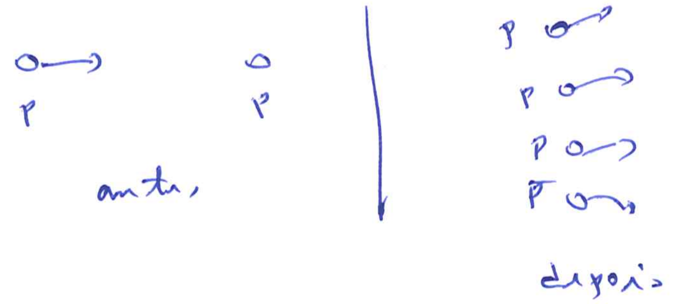
Exemplo 4

Produção de pares protão/anti-protão (Bevatron de Berkeley)

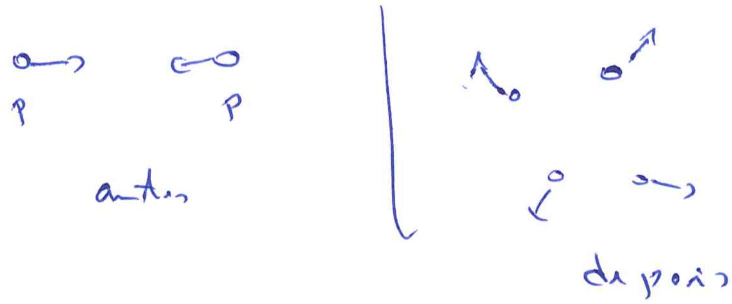
$$p + p \to p + p + p + \bar{p}$$

Qual o limiar de energia para a produção do par?

Lab



CM



No referencial CM todas as partículas devem estar em repouso para não "gastar" com energia cinética. Isto é possível porque no CM o momento (espacial) total é nulo.

Pela conservação do quadri-momento temos que o quadri-momento total no ref. CM (antes e depois) é

$$P^{\mu}_{TOT,CM} = (4mc, 0, 0, 0)$$

No sistema Lab o quadri-momento total é (antes e depois)

$$p^{\mu}_{TOT,Lab} = \left(\frac{E + mc^2}{c}, |\vec{p}|, 0, 0 \right)$$

onde E e $|\vec{p}|$ são a energia e momento do próton incidente. Mas p^2 é invariante. Logo

$$p^2_{TOT,Lab} = p^2_{TOT,CM}$$

e daí

$$\frac{(E + mc^2)^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = (4mc^2)^2$$

Mas $\frac{E^2}{c^2} - |p|^2 = m^2c^2$ e daí

$$\frac{E^2}{c^2} + m^2c^4 + 2Emc^2 - |p|^2 = (4mc^2)^2$$

$$2m^2c^4 + 2Emc^2 = 16m^2c^4$$

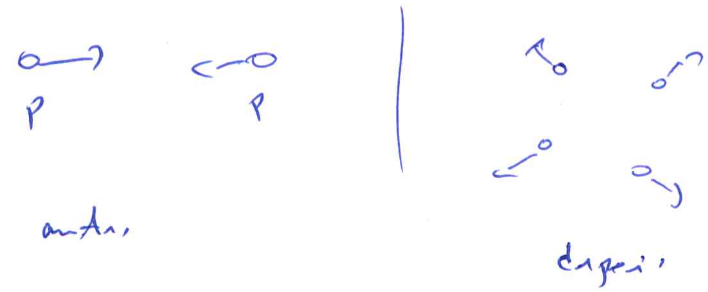
e $E = \frac{14m^2c^4}{2mc^2}$,

$$\boxed{E = 7mc^2}$$

Ou seja, precisamos, no referencial Lab, 7 vezes a massa de repouso do próton, em energia, para atingir o limiar de produção de pares

Nota que se tivessemos um colisor de protons, de tal maneira que o sistema lab tornar-se o CM, i.e.

ex)



Precisaríamos dar uma energia cinética de mc^2 para cada proton, para atingir o limiar de produção dos pares.

Logo o acelerador de colisão de feixes requer menos "eletricidade" para produzir os pares.

Exemplo 5

Duas partículas idênticas, colidem "head on", cada uma com massa m e energia cinética T.

Qual a energia cinética relativa T', i.e., a energia cinética de uma no referencial da outra?

Escrevemos o quadrimomento total nos dois referenciais

$$p^\mu_{TOT} = \left(\frac{2E}{c}, 0 \right) \qquad p'^\mu_{TOT} = \left(\frac{E' + mc^2}{c}, \vec{p}\,' \right)$$

Como p^2 é invariante

$$\left(\frac{2E}{c}\right)^2 = \left(\frac{E' + mc^2}{c}\right)^2 - \vec{p}\,'^2$$

Mas

$$E'^2 - \vec{p}\,'^2 c^2 = m^2 c^4 \rightarrow \vec{p}\,'^2 = \frac{E'^2 - m^2c^4}{c^2}$$

e daí

$$\left(\frac{2E}{c}\right)^2 = \frac{\cancel{E'^2} + m^2c^4 + 2E'mc^2}{c^2} - \frac{\cancel{E'^2} - m^2c^4}{c^2}$$

$$= \frac{2m^2c^4 + 2E'mc^2}{c^2} = \frac{2mc^2(E' + mc^2)}{c^2}$$

e daí

$$2E^2 = mc^2(E' + mc^2)$$

Temos que $T = E - mc^2$, $T' = E' - mc^2$

e daí

$$2(T + mc^2)^2 = mc^2(T' + 2mc^2)$$

$$2T^2 + 4Tmc^2 + \cancel{2m^2c^4} = \cancel{2m^2c^4} + mc^2T'$$

$$\boxed{T' = 4T\left(1 + \frac{T}{2mc^2}\right)}$$

O resultado clássico é $T' = 4T$ p/ $T \ll 2mc^2$

Nota que se colidimos eléctrons head on no laboratório com energia cinética de 1 GeV, temos que a energia cinética relativa é ($m_e c^2 \sim 0{,}5$ MeV)

$$T' = 4\,\text{GeV}\left(1 + \frac{1\,\text{GeV}}{2\;0{,}5\times10^{-3}\,\text{GeV}}\right)$$

$$= 4\,\text{GeV}\left(1 + 10^{3}\right)$$

$$\sim 4000\,\text{GeV}$$

Ou seja no caso relativístico não ganhamos somente um fator 4 mas sim um fator 4000.