ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PQI 5871 Fluidodinâmica Computacional

Ardson dos Santos Vianna Júnior - ASVJ
e-mail: ardson@usp.br

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Aula 9
Turbulência – Matemática

PQI 5871 Fluidodinâmica computacional

Roteiro

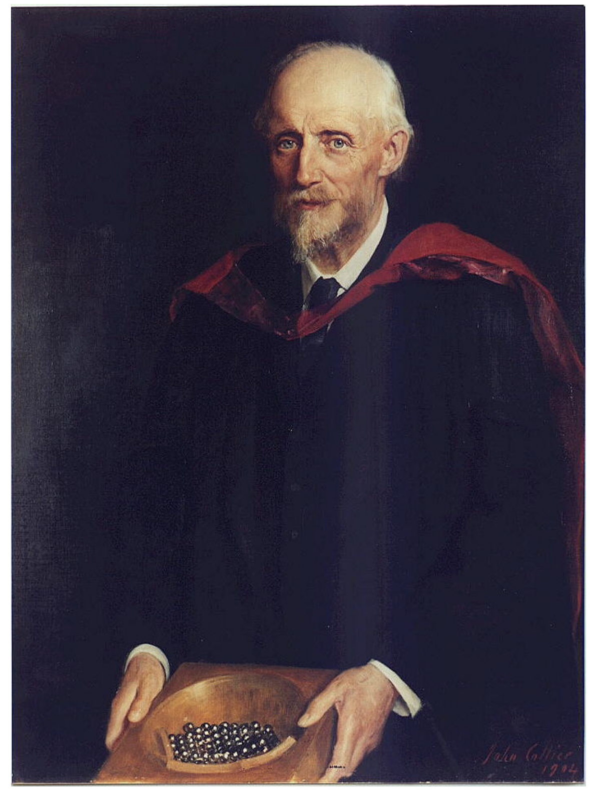
- Tensor de Reynolds
- Aproximação de Boussinesq
- Viscosidade turbulenta
- Modelos RANS
- Conclusões

RANS - Matemática

- Reynolds (1886)

- Equações médias para escoamentos turbulentos

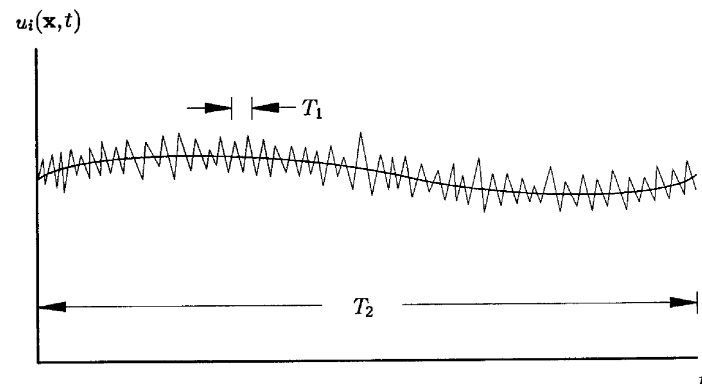
$$\Phi = \overline{\Phi} + \Phi'$$



RANS - Matemática

- Média+ flutuação

$$u_i = \overline{u}_i + u'_i$$



RANS - Matemática

Médias

Temporal

Espacial

RANS - Matemática

Médias

- Temporal $$F(\mathbf{x}) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} f(\mathbf{x}, t)\, dt$$

- Espacial

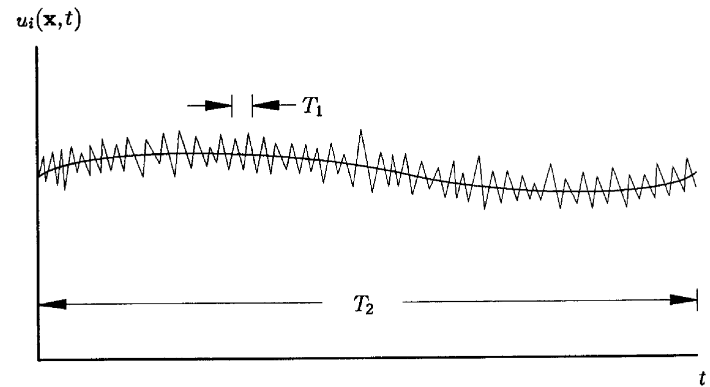
RANS - Matemática

Médias

- Temporal
- Espacial $$F(t)=\lim_{X\to\infty}\frac{1}{2X}\int_{x-X}^{x+X} f(x,t)dx$$

RANS - Matemática

$$u_i(\mathbf{x},t) = U_i(\mathbf{x}) + u_i'(\mathbf{x},t)$$



$$U_i(\mathbf{x}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_i(\mathbf{x},t)\,dt$$

$$u_i'(\mathbf{x}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_i'(\mathbf{x},t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} [u_i(\mathbf{x},t) - U_i(\mathbf{x})]\,dt =$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} [u_i(\mathbf{x},t)]\,dt - \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} [U_i(\mathbf{x})]\,dt = 0$$

RANS - Matemática

- Propriedades da média

$$\overline{c_1 a + c_2 b} = \overline{c_1 a} + \overline{c_2 b} = c_1 A + c_2 B$$

$$\overline{A + a'} = A = \overline{a}$$

$$\overline{Aa'} = A\overline{a'} = 0$$

$$\overline{ab} = \left(\overline{(A + a')(B + b')}\right) = \overline{AB} + \overline{Ab'} + \overline{a'B} + \overline{a'b'} = AB + \overline{a'b'}$$

RANS - Matemática

- Inserir essas formas nas equações fundamentais;

- Quais?

RANS - Matemática

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left[\nabla \cdot \left(\rho \vec{v}\right)\right]$$

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} = -\nabla.(\rho\vec{v}\vec{v}) - \nabla p - \nabla.\tau + \rho\,\vec{g}$$

$$\rho\,C_P\left[\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\nabla T\right)\right] = \left(\nabla\cdot k\,\nabla T\right) + Q$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\,\rho\,v^2\right)}{\partial t} = -\left(\nabla\cdot\frac{1}{2}\,\rho\,v^2\vec{v}\right) - (\nabla\cdot p\vec{v}) - p(-\nabla\cdot\vec{v}) - \left(\nabla\cdot(\tau\cdot\vec{v})\right) - (-\tau:\nabla\vec{v}) + \rho(\vec{v}\cdot\vec{g})$$

RANS - Matemática

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right)$$

RANS - Matemática

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j}\right)$$

Tensor tensão de Reynolds

RANS - Matemática

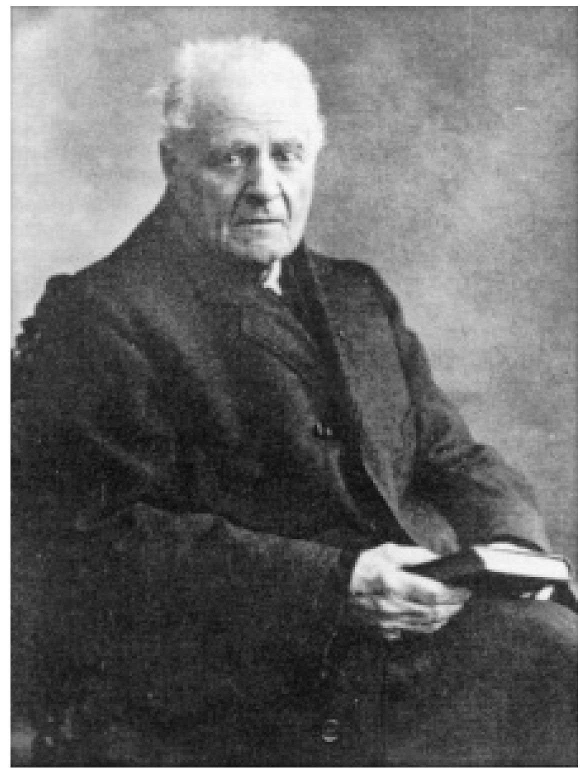
Tensor tensão de Reynolds

- Tem origem na não linearidade;
- É simétrico e consequentemente seis componentes independentes do tensor devem ser determinadas;
- Problema de fechamento!

RANS

- Boussinesq (1877)
- tensões turbulentas são proporcionais às taxas de deformação

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$



RANS - Matemática

Aproximação de Bossinesq, viscosidade turbulenta:

- Proporcionalidade entre as tensões turbulentas e os gradientes de velocidade;
- A quantidade de movimento é transmitida pela interação a nível turbilhonar;
- A viscosidade turbulenta não é uma propriedade do fluido, mas do fluxo.

RANS - Matemática

Aproximação de Bossinesq, nova formulação geral:

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\bar{P} + \frac{2}{3}\rho\kappa\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \mu_t)\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \mu_t)\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right]$$

RANS - Matemática

Viscosidade turbulenta:

- Modelos algébricos ou a zero equação;
- Modelos a uma equação;
- Modelos a duas equações.

RANS - Matemática

Viscosidade turbulenta:

- Análoga à tensão viscosa, analogia com a viscosidade molecular, para definir a viscosidade adicional μ_t.
- Proporcional à massa específica (ρ), à flutuação de velocidade (V_L) e ao comprimento de escala característico da turbulência (L):

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} [=] cm^2 / s = L.vel$$

$$\mu_t \approx \rho V_L L$$

RANS - Matemática

Comprimento de mistura:

- Analogia com a teoria cinética dos gases: teoria cinética dos gases é que a viscosidade do fluido é proporcional a densidade, o caminho livre médio e uma velocidade randômica;

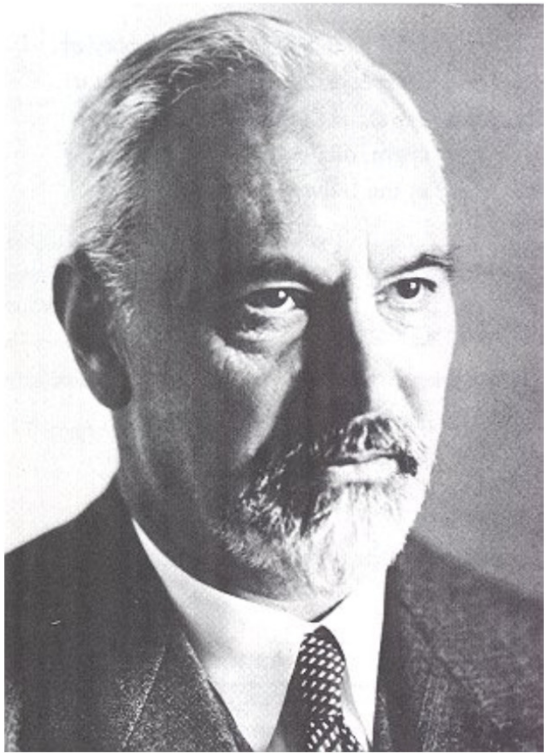
$$\mu \cong \frac{1}{3}\rho l_{livre} v_{molecular}$$

RANS - Matemática

- Prandtl (1875-1953)

- Conceito de comprimento de mistura

$$\mu^{(t)} = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right|$$



RANS - Matemática

- Especificar um comprimento característico e uma velocidade característica:

$$l_t = l_m$$

$$\nu_t = l_m \left| \frac{dU}{dy} \right|$$

- Viscosidade turbulenta:

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|$$

- Basta determinar o l_m, para a camada limite, Prandtl propôs:
- y – dist. sólido

$$l_m = ky$$

RANS - Matemática

Modelos algébricos

- l_m é obtido experimentalmente, faltam dados;
- Quando é possível, o modelo reproduz os dados experimentais.
- Patankar e Spalding (1970), Cebeci e Smith (1974) e Crawford e Kays (1975).

RANS - Matemática

Modelos a uma equação

- Uma equação diferencial de transporte é resolvida: L ou V;
- Fórmula de Kolmogorov-Prandtl: a velocidade característica é proporcional à raiz quadrada da energia cinética turbulenta ($k^{1/2}$):

$$\mu_t = C'_\mu \, \rho \, \sqrt{\kappa} \, L$$

$$k = \frac{1}{2}\left(u'^2 + v'^2 + w'^2\right)$$

RANS - Matemática

- De onde vem a energia cinética turbulenta? Fen. tran.

$$k = \frac{1}{2}\left(u'^2 + v'^2 + w'^2\right)$$

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\rho \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\rho \overline{u_i' u_i' u_j'} - \overline{p' u_j'}\right]$$

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\rho \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]$$

RANS - Matemática

- Modelo a uma equação

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\rho \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]$$

- não está completo sem definir os coeficientes de fechamento σ_k e C_D e os comprimentos característicos *l*

RANS - Matemática

- Modelo a duas equações

$$\rho\frac{\partial k}{\partial t}+\rho U_j\frac{\partial k}{\partial x_j}=-\rho\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\rho\varepsilon+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]$$

$$\rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\rho U_j\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right]-C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}\rho\overline{u'_i u'_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-C_{\varepsilon 2}\rho\frac{\varepsilon^2}{k}$$

Conclusões

- Tensor de Reynolds
- Aproximação de Boussinesq
- Viscosidade turbulenta
- Modelos RANS

Referências

- Wilcox, D.C., *Turbulence Modeling for CFD*, 3rd ed., 2006;
- Hinze, J.O., 1975, *Turbulence*, McGraw-Hill;
- TENNEKES, H., and, LUMLEY, J. L., *A first course in turbulence*, 1972, The MIT Press;