PQI-5884 - Programação Inteira Mista aplicada à Otimização de Processos
3º Período 2023

Data	Atividade	Conteúdo
14/set	Aula 1	Introdução, formulação, classes, representação
21/set	Aula 2	Condições de otimalidade
28/set	Aula 3	Condições KKT, multiplicadores
06/out*	Aula 4	Otimização irrestrita
19/out	Aula 5	LP
26/out	**Aula 6**	**NLP**
09/out	Aula 7	MILP
17/nov*	Aula 8	MILP, problemas clássicos
23/nov	Aula 9	MILP, problema de scheduling
30/nov	Aula 10	MINLP, problema de síntese
07/dez	-	Apresentações

OTIMIZAÇÃO MULTIVARIÁEL COM RESTRIÇÕES

I) PROGRAMAÇÃO LINEAR (LP)

- Simplex
- Ponto-Interior

II) PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR (NLP)

- Multiplicadores de Lagrange
- Programação Linear Sucessiva (SLP)
- Gradiente Reduzido Generalizado (GRG)
- Programação Quadrática Sucessiva (SQP)

LP: Dualidade

Primal
n vars
m ineqs

max $z = \underline{c}^T.\underline{x}$
s.a $\underline{A}.\underline{x} \leq \underline{b}$
$\underline{x} \geq \underline{0}$
$\underline{x} \in \Re^n$

Dual
m vars
n ineqs

min $w = \underline{b}^T.\underline{u}$
s.a $\underline{A}^T.\underline{u} \geq \underline{c}$
$\underline{u} \geq \underline{0}$
$\underline{u} \in \Re^m$

Se tiver igualdade? $h(\underline{x}) = b$
$h \leq b$ → $h \leq b$
$h \geq b$ → $-h \leq -b$

OBS: O Dual do Dual é o Primal

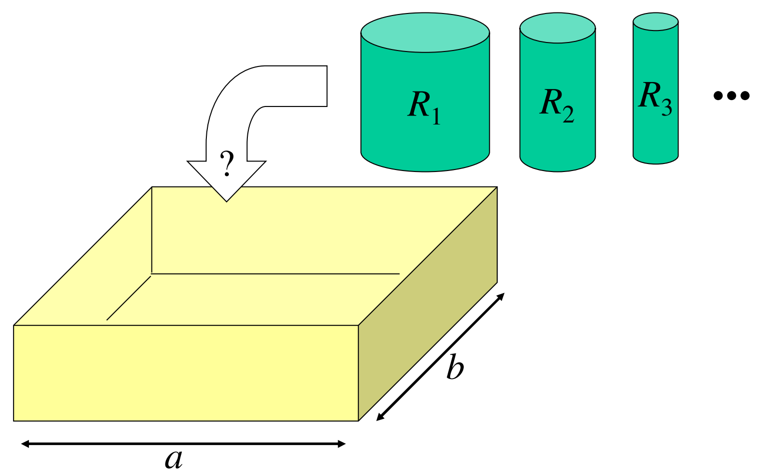
Método Simplex Dual

Se existir, o máximo de z é igual ao mínimo de w.

Análise de sensibilidade + re-otimização

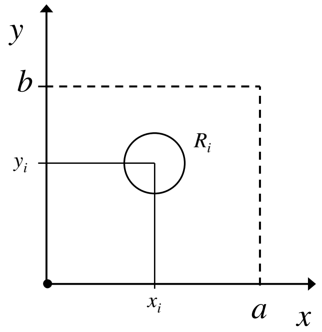
Programação Não-Linear (NLP: Non-Linear Programming)
EXEMPLO

Quais as dimensões ótimas de uma caixa retangular para guardar N cilindros com raios R_i ($i = 1... N$)? Como ordenar os cilindros na caixa?



Variáveis:

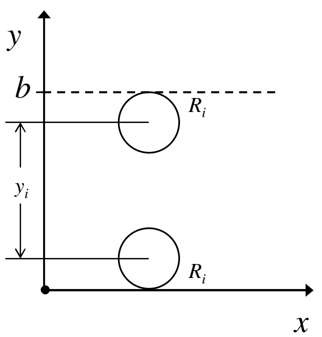
a = dimensão x da caixa (m)
b = dimensão y da caixa (m)
x_i = posição x do centro do cilindro i (m)
y_i = posição y do centro do cilindro i (m)
d_{ij} = distância entre os centros dos cilindros i e j (m)

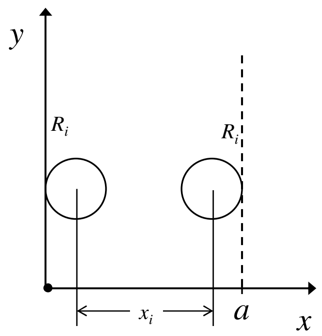


Restrições:

$$y_i \geq R_i$$
$$y_i \leq b - R_i$$

$$x_i \geq R_i$$
$$x_i \leq a - R_i$$

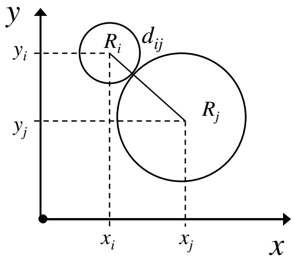




Restrições:

$$d_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

$$d_{ij} \geq (R_i + R_j)$$



Formulação NLP:

min $\quad f = a.b$

s.a.: $\quad d_{ij}^2 - (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2 = 0 \quad \forall\ (i,j)_{i<j}$

$R_i - x_i \leq 0 \quad \forall\ i$

$x_i - a + R_i \leq 0 \quad \forall\ i$

$R_i - y_i \leq 0 \quad \forall\ i$

$y_i - b + R_i \leq 0 \quad \forall\ i$

$R_i + R_j - d_{ij} \leq 0 \quad \forall\ (i,j)_{i<j}$

$a, b, x_i, y_i, d_{ij} \geq 0, \in \Re^1$

Parâmetros: raios R_i

Caso: Cinco cilindros com raios R_i = 3, 4, 5, 6 e 7 cm

```
*******************  Parametros  ********************
scalar R3 / 3 / ;
scalar R4 / 4 / ;
scalar R5 / 5 / ;
scalar R6 / 6 / ;
scalar R7 / 7 / ;

********************  Variaveis  ********************
FREE VARIABLES     f;
POSITIVE VARIABLES X3, X4, X5, X6, X7, a, b,
                   Y3, Y4, Y5, Y6, Y7,
                   d34, d35, d36, d37, d45, d46, d47, d56, d57, d67;

******************** Equações ***********************
EQUATIONS  OBJ,
           RX3i, RX4i, RX5i, RX6i, RX7i, RX3s, RX4s, RX5s, RX6s, RX7s,
           RY3i, RY4i, RY5i, RY6i, RY7i, RY3s, RY4s, RY5s, RY6s, RY7s,
           RD34, RD35, RD36, RD37, RD45, RD46, RD47, RD56, RD57, RD67,
           DD34, DD35, DD36, DD37, DD45, DD46, DD47, DD56, DD57, DD67;
```



```
OBJ.. f =E= a*b  ;

RX3i..  R3 - X3 =L= 0  ;
RX4i..  R4 - X4 =L= 0  ;
RX5i..  R5 - X5 =L= 0  ;
RX6i..  R6 - X6 =L= 0  ;
RX7i..  R7 - X7 =L= 0  ;
RX3s..  X3 - a + R3 =L= 0 ;
RX4s..  X4 - a + R4 =L= 0 ;
RX5s..  X5 - a + R5 =L= 0 ;
RX6s..  X6 - a + R6 =L= 0 ;
RX7s..  X7 - a + R7 =L= 0 ;

RY3i..  R3 - Y3 =L= 0  ;
RY4i..  R4 - Y4 =L= 0  ;
RY5i..  R5 - Y5 =L= 0  ;
RY6i..  R6 - Y6 =L= 0  ;
RY7i..  R7 - Y7 =L= 0  ;
RY3s..  Y3 - b + R3 =L= 0 ;
RY4s..  Y4 - b + R4 =L= 0 ;
RY5s..  Y5 - b + R5 =L= 0 ;
RY6s..  Y6 - b + R6 =L= 0 ;
RY7s..  Y7 - b + R7 =L= 0 ;
```

```
RD34..  R3 + R4 - d34 =L= 0 ;
RD35..  R3 + R5 - d35 =L= 0 ;
RD36..  R3 + R6 - d36 =L= 0 ;
RD37..  R3 + R7 - d37 =L= 0 ;
RD45..  R4 + R5 - d45 =L= 0 ;
RD46..  R4 + R6 - d46 =L= 0 ;
RD47..  R4 + R7 - d47 =L= 0 ;
RD56..  R5 + R6 - d56 =L= 0 ;
RD57..  R5 + R7 - d57 =L= 0 ;
RD67..  R6 + R7 - d67 =L= 0 ;

DD34.. power(d34,2) - power(X3-X4,2) - power(Y3-Y4,2) =E= 0 ;
DD35.. power(d35,2) - power(X3-X5,2) - power(Y3-Y5,2) =E= 0 ;
DD36.. power(d36,2) - power(X3-X6,2) - power(Y3-Y6,2) =E= 0 ;
DD37.. power(d37,2) - power(X3-X7,2) - power(Y3-Y7,2) =E= 0 ;
DD45.. power(d45,2) - power(X4-X5,2) - power(Y4-Y5,2) =E= 0 ;
DD46.. power(d46,2) - power(X4-X6,2) - power(Y4-Y6,2) =E= 0 ;
DD47.. power(d47,2) - power(X4-X7,2) - power(Y4-Y7,2) =E= 0 ;
DD56.. power(d56,2) - power(X5-X6,2) - power(Y5-Y6,2) =E= 0 ;
DD57.. power(d57,2) - power(X5-X7,2) - power(Y5-Y7,2) =E= 0 ;
DD67.. power(d67,2) - power(X6-X7,2) - power(Y6-Y7,2) =E= 0 ;

*******************  Solução  ************************
MODEL Problema / ALL / ;
SOLVE Problema USING NLP MINIMIZING f;

*****************************************************
```



```
 S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   Problema              OBJECTIVE  f
     TYPE    NLP                   DIRECTION  MINIMIZE
     SOLVER  LINDOGLOBAL           FROM LINE  69

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      2 Locally Optimal
**** OBJECTIVE VALUE              612.6904

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.094      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT       313     2000000000
 EVALUATION ERRORS             NA              0

LINDO            24.2.1 r43572 Released Dec  9, 2013 WEI
x86_64/MS Windows

   LINDO Driver
   Lindo Systems Inc, www.lindo.com
```

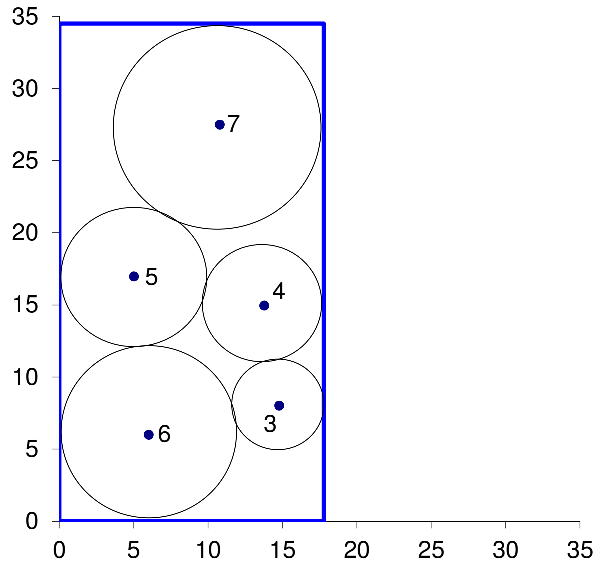
```
                        LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL
---- EQU OBJ              .         .         .        1.000
---- EQU RX3i           -INF    -14.772    -3.000        .
---- EQU RX4i           -INF    -13.772    -4.000        .
---- EQU RX5i           -INF     -5.000    -5.000    -23.476
---- EQU RX6i           -INF     -6.000    -6.000    -10.999
---- EQU RX7i           -INF    -10.772    -7.000        .
---- EQU RX3s           -INF     -3.000    -3.000    -12.772
---- EQU RX4s           -INF     -4.000    -4.000    -11.953
---- EQU RX5s           -INF    -12.772    -5.000        .
---- EQU RX6s           -INF    -11.772    -6.000        .
---- EQU RX7s           -INF     -7.000    -7.000     -9.750
---- EQU RY3i           -INF     -8.013    -3.000        .
---- EQU RY4i           -INF    -14.941    -4.000        .
---- EQU RY5i           -INF    -16.954    -5.000        .
---- EQU RY6i           -INF     -6.000    -6.000    -17.772
---- EQU RY7i           -INF    -27.475    -7.000        .
---- EQU RY3s           -INF    -26.462    -3.000        .
---- EQU RY4s           -INF    -19.534    -4.000        .
---- EQU RY5s           -INF    -17.521    -5.000        .
---- EQU RY6s           -INF    -28.475    -6.000        .
---- EQU RY7s           -INF     -7.000    -7.000    -17.772
---- EQU RD34           -INF     -7.000    -7.000     -2.867
---- EQU RD35           -INF    -13.245    -8.000        .
---- EQU RD36           -INF     -9.000    -9.000    -12.684
---- EQU RD37           -INF    -19.869   -10.000        .
---- EQU RD45           -INF     -9.000    -9.000    -12.684
---- EQU RD46           -INF    -11.847   -10.000        .
---- EQU RD47           -INF    -12.888   -11.000        .
---- EQU RD56           -INF    -11.000   -11.000    -14.997
---- EQU RD57           -INF    -12.000   -12.000    -20.271
---- EQU RD67           -INF    -21.999   -13.000        .
---- EQU DD34             .         .         .       -0.205
---- EQU DD35             .         .         .         EPS
---- EQU DD36             .         .         .       -0.705
---- EQU DD37             .         .         .         EPS
---- EQU DD45             .         .         .       -0.705
---- EQU DD46             .         .         .         EPS
---- EQU DD47             .    -3.062E-5      .          .
---- EQU DD56             .         .         .       -0.682
---- EQU DD57             .         .         .       -0.845
---- EQU DD67             .         .         .         EPS
```



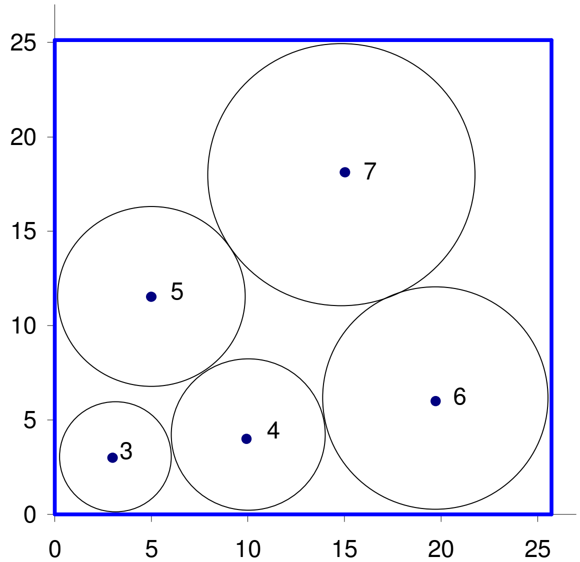
```
                        LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR f              -INF    612.690     +INF         .
---- VAR X3               .      14.772     +INF         .
---- VAR X4               .      13.772     +INF         .
---- VAR X5               .       5.000     +INF         .
---- VAR X6               .       6.000     +INF         .
---- VAR X7               .      10.772     +INF         .
---- VAR a                .      17.772     +INF         .
---- VAR b                .      34.475     +INF         .
---- VAR Y3               .       8.013     +INF         .
---- VAR Y4               .      14.941     +INF         .
---- VAR Y5               .      16.954     +INF         .
---- VAR Y6               .       6.000     +INF         .
---- VAR Y7               .      27.475     +INF         .
---- VAR d34              .       7.000     +INF         .
---- VAR d35              .      13.245     +INF         .
---- VAR d36              .       9.000     +INF         .
---- VAR d37              .      19.869     +INF         .
---- VAR d45              .       9.000     +INF         .
---- VAR d46              .      11.847     +INF         .
---- VAR d47              .      12.888     +INF         .
---- VAR d56              .      11.000     +INF         .
---- VAR d57              .      12.000     +INF         .
---- VAR d67              .      21.999     +INF         .
```

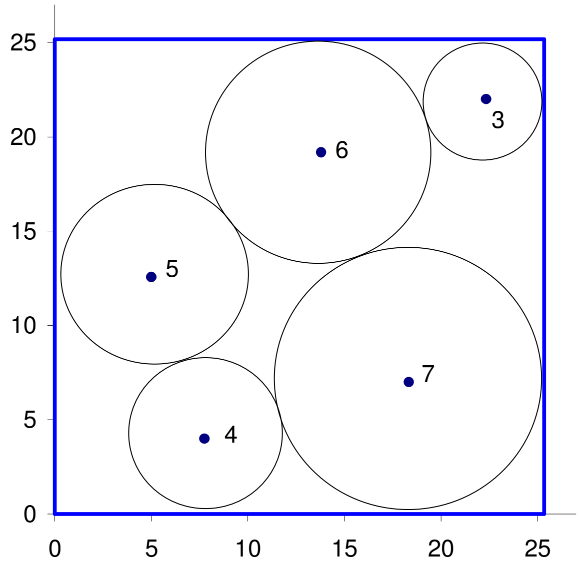
Solução f^* = 612,7 cm² (ótimo global?)



Solução f^* = 646,3 cm² (ótimo local)



Solução f^* = 638,0 cm² (ótimo local)



Algoritmos NLP

- Multiplicadores de Lagrange
- Programação Linear Sucessiva (SLP)
- Programação Quadrática Sucessiva (SQP)
- Gradiente Reduzido Generalizado (GRG)

-Multiplicadores de Lagrange λ

$g(x) \le 0 \longrightarrow g(x) + s^2 = 0 \longrightarrow h(x) = 0$

min $\quad f(\underline{x})$

sujeito a: $\quad \underline{h}(\underline{x}) = 0 \qquad$ *m* equações

$\underline{x} \in \Re^n \qquad$ *n* variáveis

Condições necessárias para um mínimo local $\underline{x}^*$

$\nabla f(\underline{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j . \nabla h_j(\underline{x}^*) = 0 \qquad$ *dependência linear de gradientes*

$\underline{h}(\underline{x}^*) = 0 \qquad$ *viabilidade*

Condição suficiente para um mínimo local $\underline{x}^*$

$\underline{H}_{xx}(L(\underline{x}^*,\underline{\lambda}))$ deve ser positiva definida $\qquad$ *convexidade*

sendo $L(\underline{x},\underline{\lambda}) = f(\underline{x}) + \Sigma\, \lambda_j . h_j(\underline{x})$ a função Lagrangeano

-Programação Linear Sucessiva (SLP)

Aproximações lineares das funções em um ponto $\underline{x}^{(k)}$

$$f(\underline{x}) \cong f(\underline{x}^{(k)}) + \nabla f(\underline{x}^{(k)})^T.(\underline{x} - \underline{x}^{(k)})$$

$$h_j(\underline{x}) \cong h_j(\underline{x}^{(k)}) + \nabla h_j(\underline{x}^{(k)})^T.(\underline{x} - \underline{x}^{(k)}) \qquad \text{NLP} \rightarrow \text{LP}$$

$$g_j(\underline{x}) \cong g_j(\underline{x}^{(k)}) + \nabla g_j(\underline{x}^{(k)})^T.(\underline{x} - \underline{x}^{(k)})$$

Resolve o LP por Simplex com restrição de passo:

$$\underline{d}^{(k)} = \underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)}$$

$$-\underline{p} \le \underline{d}^{(k)} \le +\underline{p}$$

Verifica viabilidade e convergência.

Método sensível ao chute inicial.

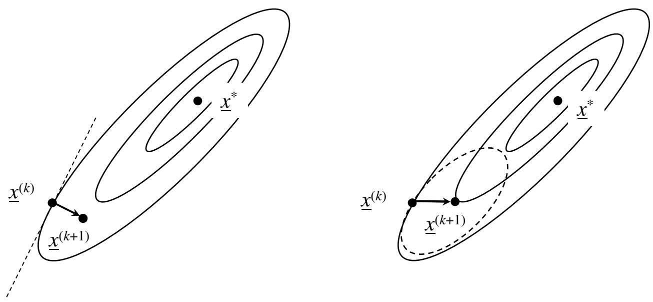
Melhor para problemas com poucas não linearidades.

-Programação Quadrática Sucessiva (SQP)

-Gradiente Reduzido Generalizado (GRG)

Melhoria: aproximação quadrática da função objetivo

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^{(k)}) + \nabla f(\underline{x}^{(k)})^T.\Delta\underline{x} + ½.\Delta\underline{x}^T.\nabla^2 f(\underline{x}^{(k)}).\Delta\underline{x}$$



-Programação Quadrática Sucessiva (SQP)

Em $\underline{x}^{(k)}$:

a) Aproxima o NLP por um QP $\begin{cases} f \text{ quadrática} \\ h \text{ e } g \text{ lineares} \end{cases}$

b) Resolve QP para ter direção

$$\underline{d}^{(k)} = \underline{x}^* - \underline{x}^{(k)}$$

c) Line Search com restrição de passo

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \alpha.\underline{d}^{(k)}$$

-Gradiente Reduzido Generalizado (GRG)

Em $\underline{x}^{(k)}$:

a) Aproximação quadrática de $f(\underline{x})$

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^{(k)}) + \nabla f(\underline{x}^{(k)})^T.\Delta\underline{x} + ½.\Delta\underline{x}^T.\nabla^2 f(\underline{x}^{(k)}).\Delta\underline{x}$$

b) Converte $g \leq 0$ em $h=0$ com variáveis de folga

c) Lineariza as restrições

$$h_j(\underline{x}) \cong h_j(\underline{x}^{(k)}) + \nabla h_j(\underline{x}^{(k)})^T.(\underline{x} - \underline{x}^{(k)})$$

d) Organiza matricialmente as restrições, como no Simplex:

$$\boldsymbol{A}.\underline{x} = \underline{b}$$

e) Separa variáveis básicas $\underline{x}_B$ e não básicas $\underline{x}_N$. Deixa básicas (dependentes) em função de não básicas (independentes). Substitui na função objetivo.

f) Resolve problema irrestrito

$$\min f(\underline{x}_N) \quad \rightarrow \quad \nabla f = 0$$

c) Line Search com restrição de passo na direção obtida

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \alpha.\underline{d}^{(k)}$$

Avaliação de Algoritmos de Otimização

PROBLEMA 6.1:

min. $f(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2$

s.a: $x_1^2 + x_2^2 \leq 4$

$x_1^2 + x_2^2 \geq 1$

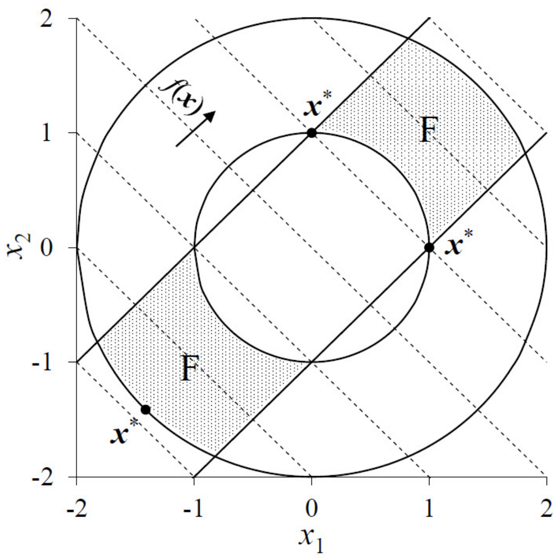
$x_1 - x_2 \leq 1$

$x_2 - x_1 \leq 1$

$-2 \leq x_1 \leq 2$

$-2 \leq x_2 \leq 2$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$



DIRETRIZES PARA FORMULAÇÃO DE MODELOS NLP

$$\begin{array}{ll} \min & f(\underline{x}) \\ \text{s.a.:} & h(\underline{x}) = \underline{0} \\ & g(\underline{x}) \leq \underline{0} \\ & \underline{x} \in \Re^n \end{array}$$

1) Formular restrições lineares, sempre que possível.

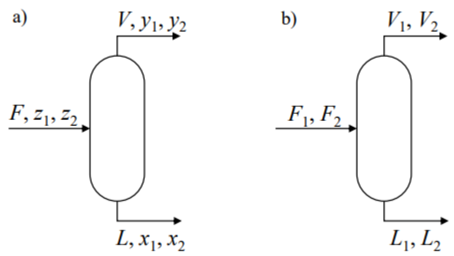
$$\frac{x_1}{x_1 + x_2} \leq 0{,}2 \quad \longrightarrow \quad 0{,}8\,x_1 - 0{,}2\,x_2 \leq 0$$

1) Formular restrições lineares, sempre que possível.

$$F_1 = L_1 + V_1,$$
$$F_2 = L_2 + V_2,$$

em vez de

$$F z_1 = L x_1 + V y_1,$$
$$F z_2 = L x_2 + V y_2.$$



2) Forneça uma boa estimativa inicial

$\underline{x}^{(0)}$

3) Especificar limites numéricos para as variáveis

Lower bound / Upper bound

4) Evitar descontinuidades, limitando as variáveis.

$\log(x)$ para $x \leq 0$,

$1/x$ para $x = 0$,

$\sqrt{x}$ para $x \leq 0$.

$x \geq 0{,}01$

$$x_1/x_2 - 3x_1 = 0 \longrightarrow x_1 - 3x_1 x_2 = 0.$$

$$x_1 - x_2 + \underbrace{\ln(x_1 + 4)}_{u} \leq 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + u \leq 0 \\ \exp(u) - (x_1 + 4) = 0 \end{cases}$$

5) Não declare parâmetros como variáveis.

$y = ax + b$,

$a = 2$,

$b = 6$,

6) Evitar funções não diferenciáveis (derivada não contínua).

$$|x| \Rightarrow \sqrt{x^2 + \varepsilon^2} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}}$$

$$\text{min.} \quad f = \max\{x_1, x_2, x_3\} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{min.} & f = y \\ \text{s.a:} & y \geq x_1 \\ & y \geq x_2 \\ & y \geq x_3 \end{array}$$

7) Normalizar os escalonar as variáveis e as expressões algébricas (f, h e g) para evitar ordens de grandeza extremas

$$\begin{array}{l} x^2 + x + 2\,000 \leq 0, \\ 0 \leq x \leq 1\,000. \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 10^6 y^2 + 10^3 y + 2\,000 \leq 0, \\ 0 \leq y \leq 1. \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 10y^2 + 0{,}01y + 0{,}02 \leq 0, \\ 0 \leq y \leq 1. \end{array}$$

8) Eliminar variáveis por substituição de equações apenas:
- Se não houver aumento de não-linearidades nas restrições.
- Se as não linearidades puderem ser colocadas na função objetivo.

$$\begin{aligned} \text{min. } & f = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a: } & x_1 x_2 = 2 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 1 \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \quad \xrightarrow{x_2 = 2/x_1} \quad \begin{aligned} \text{min. } & f = x_1 + 4/x_1 \\ \text{s.a: } & x_1 \geq 1 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1 \in \mathbb{R}^1 \end{aligned}$$

9) Discretize equações diferenciais por diferenças finitas.

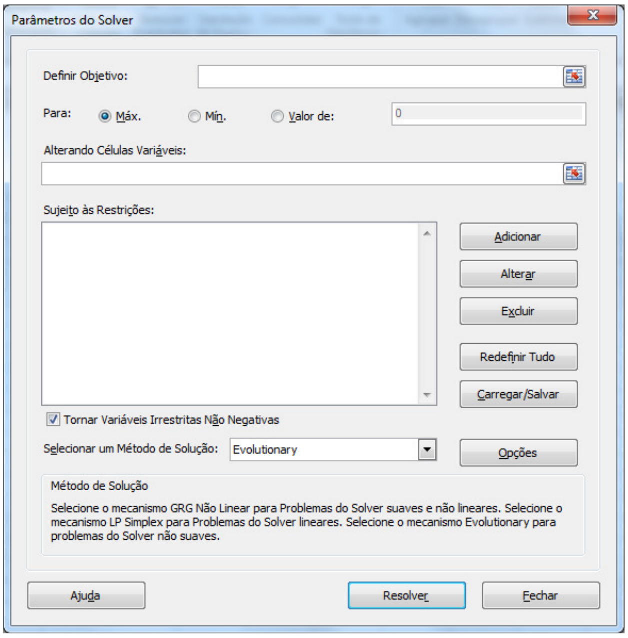
10) Explorar a estrutura do problema se possível.

$$\begin{aligned} \text{min. } & f(\boldsymbol{x}) = -x_1 x_3 - 3x_2 x_3 \\ \text{s.a: } & h_1(\boldsymbol{x}) \colon x_1 x_3 + x_2 + x_2 x_3^2 - 5 = 0 \\ & g_1(\boldsymbol{x}) \colon 4x_1 + 5x_2 x_3 + x_1 x_3 - 7 \leq 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

11) Testar diferentes solvers, quando disponíveis.

12) Ler o manual do solver em uso.

Solver do Excel



FrontlineSolvers
Developers of the Excel Solver

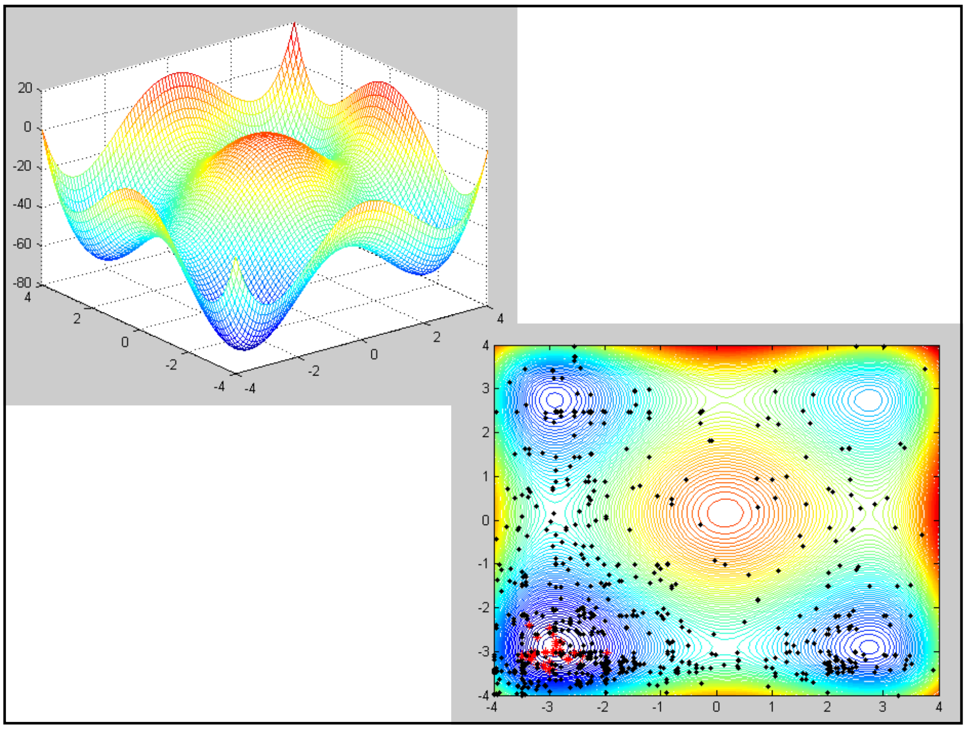
http://www.solver.com/excel-solver-help

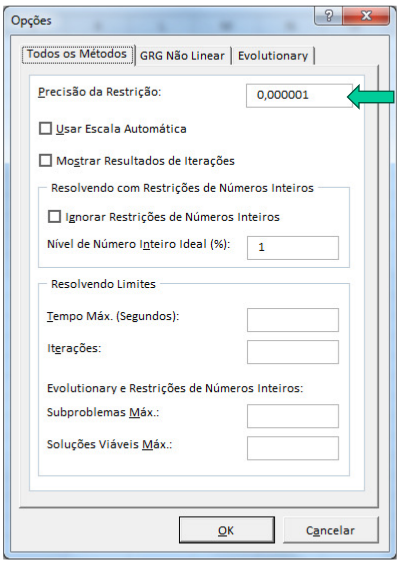
Algorithms and Methods Used
The Microsoft Office Excel Solver tool uses several algorithms to find optimal solutions.

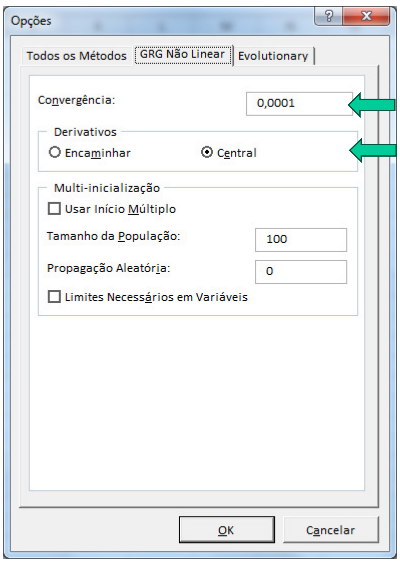
The GRG Nonlinear Solving Method for **nonlinear optimization** uses the **Generalized Reduced Gradient (GRG2)** code, which was developed by Leon Lasdon, University of Texas at Austin, and Alan Waren, Cleveland State University, and enhanced by Frontline Systems, Inc.

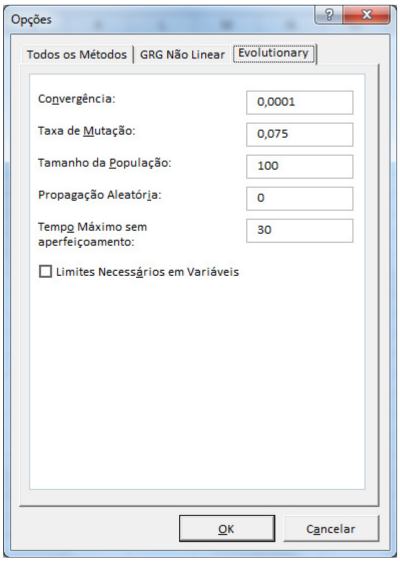
The Simplex LP Solving Method for **linear programming** uses the **Simplex and dual Simplex method** with bounds on the variables, and problems with integer constraints use the **branch and bound** method, as implemented by John Watson and Daniel Fylstra, Frontline Systems, Inc.

The Evolutionary Solving Method for **non-smooth optimization** uses a variety of **genetic algorithm** and local search methods, implemented by several individuals at Frontline Systems, Inc.




Opções
Todos os Métodos
GRG Não Linear
Evolutionary
Precisão da Restrição: 0,000001
Usar Escala Automática
Mostrar Resultados de Iterações
Resolvendo com Restrições de Números Inteiros
Ignorar Restrições de Números Inteiros
Nível de Número Inteiro Ideal (%): 1
Resolvendo Limites
Tempo Máx. (Segundos):
Iterações:
Evolutionary e Restrições de Números Inteiros:
Subproblemas Máx.:
Soluções Viáveis Máx.:
OK
Cancelar


Opções
Todos os Métodos
GRG Não Linear
Evolutionary
Convergência: 0,0001
Derivativos
Encaminhar
Central
Multi-inicialização
Usar Início Múltiplo
Tamanho da População: 100
Propagação Aleatória: 0
Limites Necessários em Variáveis
OK
Cancelar


Opções
Todos os Métodos
GRG Não Linear
Evolutionary
Convergência:
0,0001
Taxa de Mutação:
0,075
Tamanho da População:
100
Propagação Aleatória:
0
Tempo Máximo sem aperfeiçoamento:
30
Limites Necessários em Variáveis
OK
Cancelar