P2, Cálculo II (2023), **Biossistemas**
Prof. Juan López Linares

1 A14: Testes de Comparação

Exercício 1. *Determinar se a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n3^n}$$

converge ou diverge. Justifique.

1.1 Resolução do Exercício 1

Seja a sequência a_n:

$$a_n = \frac{n-1}{n3^n} = \left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right).$$

Nota-se que:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n-1}{n}\right] = 1.$$

Quer-se simplificar a sequência a_n, porem mantendo a parte mais importante quando $n \to \infty$. Defina-se uma segunda sequência b_n como:

$$b_n = \frac{1}{3^n}.$$

Segue que:

$$b_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}}.$$

Adicionalmente, a fração a seguir é constante (não depende de n):

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} = r.$$

Ou seja, a sequência b_n é uma progressão geométrica (PG). Como $|r| < 1$ pode ser escrita uma série geométrica convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Para demonstrar que a série do enunciado é convergente podem ser utilizados: i) Teste da Comparação e ii) Teste da Comparação no Limite.

i) Teste da Comparação. Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale:

$$n - 1 < n,$$

$$\frac{n-1}{n} < 1,$$

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right) < \frac{1}{3^n} = b_n.$$

Como a série $\sum b_n$ (maior) converge, então a série $\sum a_n$ (menor) também converge.

ii) Teste da Comparação no Limite. Verifica-se a existência do limite:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{a_n}{b_n}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\frac{n-1}{n3^n}}{\frac{1}{3^n}}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n-1}{n}\right] = 1.$$

Logo, as duas série $\sum b_n$ e $\sum a_n$ convergem.

2 A18-Representação de Funções como Séries de Potências

Exercício 2. *Encontrar uma representação em séries de potência da função*

$$f(x) = \ln(2+x)$$

e para quais valores de x a série converge? Lembra-se que:

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(2+x)\right] = \frac{1}{2+x}.$$

2.1 Resolução do Exercício 2

O plano será escrever primeiro a função

$$f(x) = \frac{1}{2+x}. \tag{1}$$

como série de potências.

Segundo, calcula-se a integral:

$$\int \frac{dx}{2+x} = \ln(2+x) + C. \tag{2}$$

Terceiro, encontra-se a constante de integração C colocando $x = 0$.

A série geométrica é convergente quando $|q| < 1$ e neste caso é possível calcular a soma:

$$a + aq + aq^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Colocando $a = 1$ e trocando q por x escreve-se:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1. \tag{3}$$

Nota-se que:

$$f(x) = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\left(1-\left(-\frac{x}{2}\right)\right)}. \tag{4}$$

Utilizando (3) e (4) e trocando x por $-\frac{x}{2}$ a função $f(x)$ reescreve-se como:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n, \quad \left|-\frac{x}{2}\right| < 1,$$

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n x^n, \quad |x| < 2.$$

Integrando nos dois lados da equação anterior:

$$\int \frac{1}{2+x}dx = \frac{1}{2}\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n x^n\right]dx, \quad |x| < 2.$$

Como a série é convergente quando $|x| < 2$ pode-se trocar a ordem entre os símbolos de integração e somatória:

$$\int \frac{1}{2+x}dx = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{-1}{2}\right)^n \int x^n dx\right], \quad |x| < 2,$$

$$\int \frac{1}{2+x}dx = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < 2.$$

Por (2) encontra-se:

$$\ln(2+x) + C = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < 2.$$

Quando $x = 0$ todos os termos dentro da somatória anulam-se. Logo,

$$\ln(2+0) + C = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{0^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < 2,$$

$$C = -\ln(2).$$

Ou seja,

$$\ln(2+x) = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right] - \ln(2), \quad |x| < 2.$$

O raio de convergência da série de potência é $R = 2$ e o intervalo de convergência é $x \in (-2, 2)$. Uma resolução em vídeo de um problema análogo encontra-se aqui.