P2, Cálculo II (2023), **EAN**
Prof. Juan López Linares

1 Aula 11: Sequências

Exercício 1. *A figura a seguir mostra castelos de cartas de* 1, 2 *e* 3 *andares. Para montar eles foram usadas* 2, 7 *e* 15 *cartas, respectivamente. Quantas cartas serão necessárias para montar um castelo de* n *andares?*

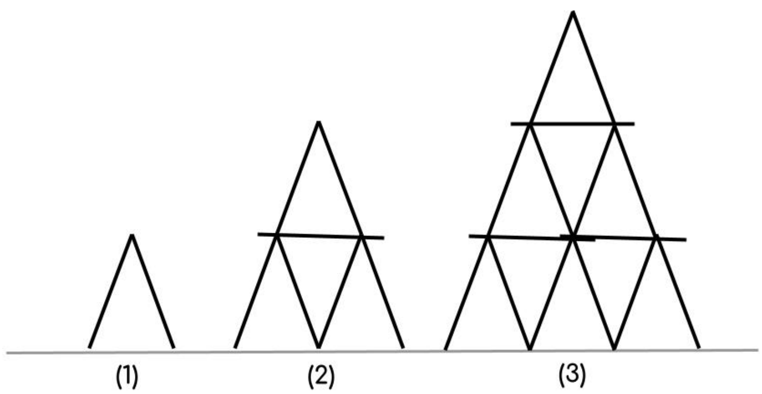

Figura 1: Castelos de cartas de 1, 2 e 3 andares.

1.1 Resolução do Exercício 1

Seja C_n o número de cartas requeridas para montar o castelo. Pode ser escrito:

$$n = 1,\ C_1 = 2 = 2,$$

$$n = 2,\ C_2 = 7 = 2 + (2 + 3),$$

$$n = 3,\ C_3 = 15 = 2 + (2 + 3) + (2 + 3 + 3).$$

Conjetura-se que, sendo n o número de andares, o último somando (cartas do andar mais baixo) pode ser escrito como:

$$a_n = 2 + 3(n - 1).$$

Em outras palavras, o último somando segue uma progressão aritmética de passo 3 e valor inicial 2. Logo, para n andares o número C_n de cartas será:

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} [2 + 3(i - 1)],$$

$$C_n = 2n + 3\sum_{i=1}^{n}[i-1],$$

$$C_n = 2n + 3\sum_{i=1}^{n}[i] - 3n,$$

$$C_n = \frac{3n(n+1)}{2} - n.$$

Um vídeo relativo a progressão aritmética está disponível aqui.

2 A15-Séries alternadas

Exercício 2. *Determinar se a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

converge ou diverge e explicar o porquê.

2.1 Resolução do Exercício 2

Nota-se que a série dada pode ser escrita como:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n.$$

Isto é, tem-se uma série alternada com:

$$b_n = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right);\ \forall n \in \mathbb{N},$$

$$a_n = (-1)^n b_n;\ \forall n \in \mathbb{N},$$

Porém,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] = \cos\left(\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\pi}{n}\right]\right) = \cos(0) = 1 \neq 0.$$

Isto é, uma das hipóteses do “Teste da Série Alternada” não é satisfeita e deve-se procurar outro teste. O limite da sequência a_n não existe. De fato, seja $m \in \mathbb{N}$. Quando $m \to \infty$ para $n = 2m - 1$ ímpar a subsequência a_{2m-1} tende a -1 e para $n = 2m$ par a subsequência a_{2m} tende a 1. Pelo “Teste da Divergência” a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Está disponível a discussão em vídeo do Teste da Série Alternada e do Teste da Divergência.