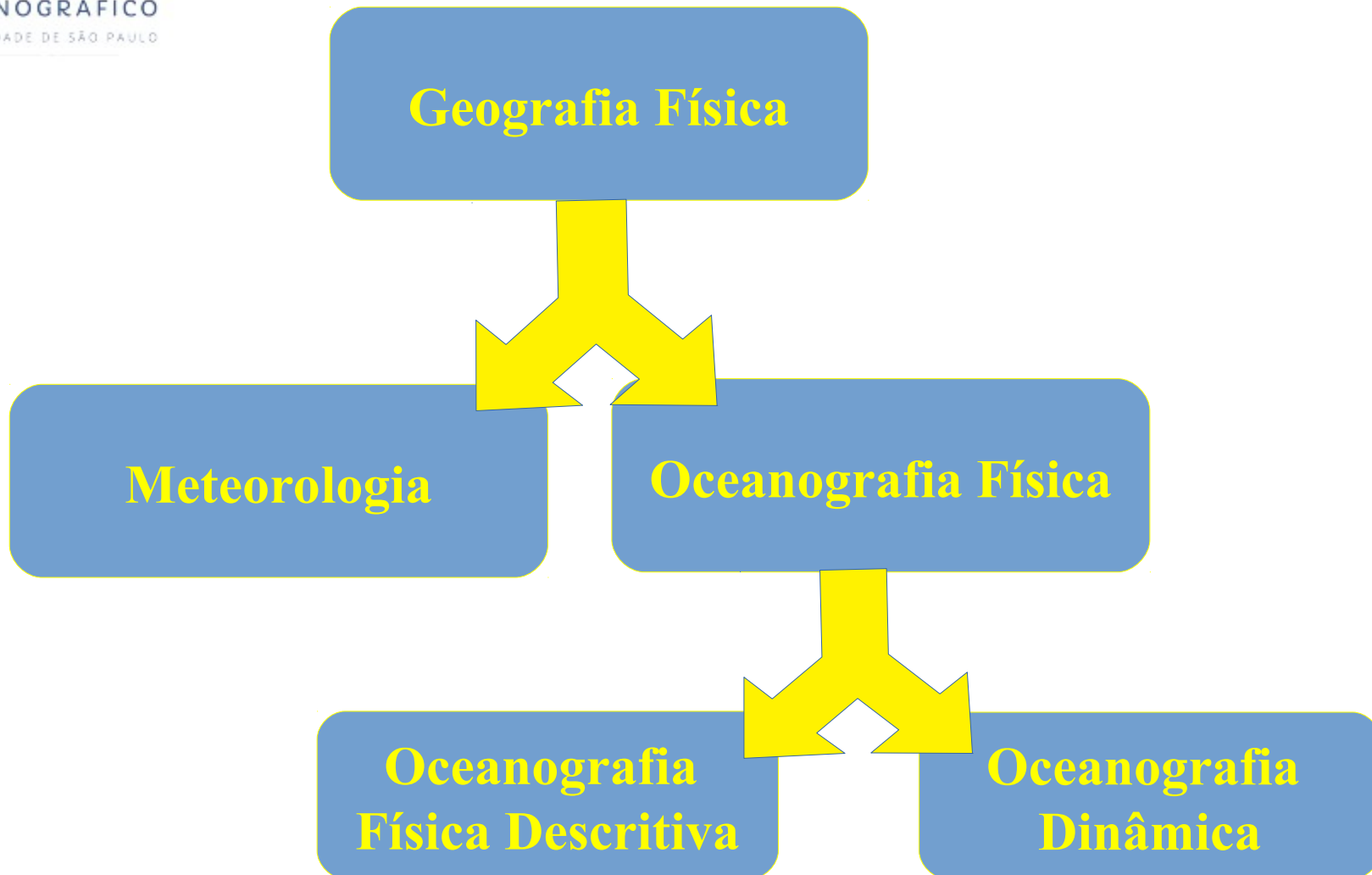


Oceanografia Física II

Ilson C. A. da Silveira

**Departamento de Oceanografia Física, Química e
Geológica do IOUSP**

A Oceanografia Física



A Oceanografia Dinâmica

- Oceanografia Dinâmica Analítica
- Oceanografia Dinâmica Numérica



O que é um “*modelo*” do oceano?

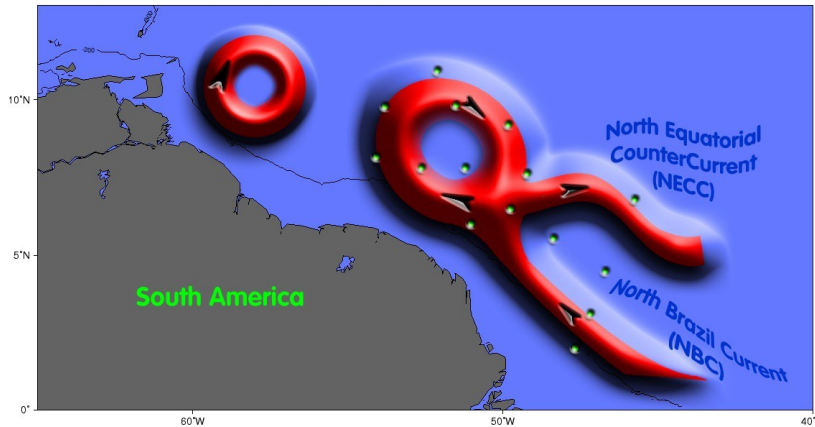
- **Modelo Conceitual** – uma interpretação das suas observações segundo preceitos físicos;
- **Modelo Teórico** – uso de simplificações e equações para representar e provar o modelo conceitual;
- **Modelo Numérico** – resolução das equações numericamente tentando chegar o mais próximo da realidade o quanto possível.

Dinâmica de Fluidos Geofísicos

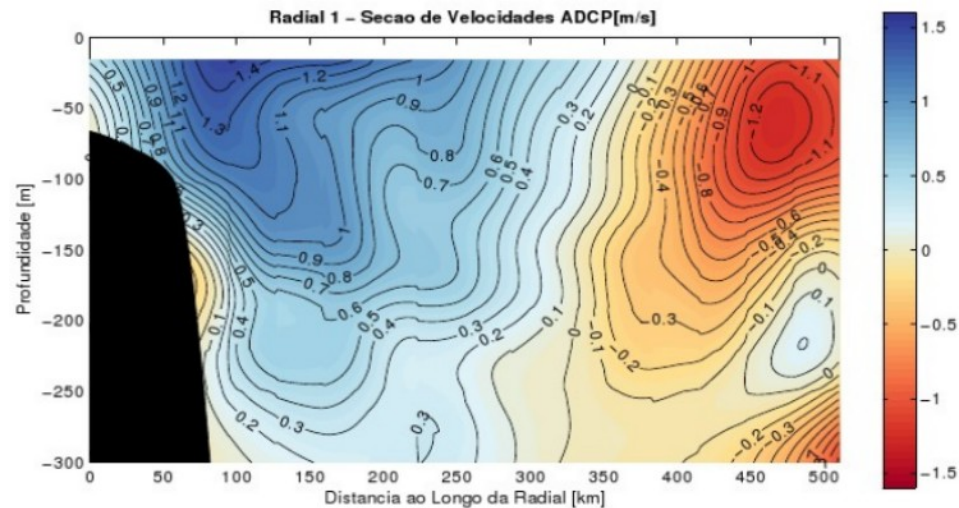
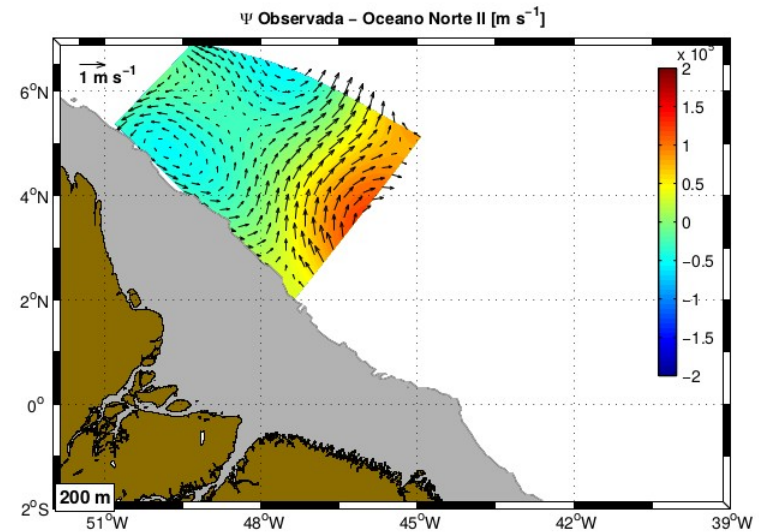
- É o ramo da mecânica de fluidos aplicado a fenômenos geofísicos, ou seja, **fenômenos físicos intrinsecamente ligados ao planeta Terra.**
- São estes fenômenos: movimentos do magma abaixo da crosta terrestre, escoamentos de lava, movimentos atmosféricos planetários, a circulação oceânica, etc.
- **“DFG” engloba portanto toda a Oceanografia Dinâmica!!**
- Na presente forma, a “DFG” foi organizada no final dos anos 50 do séc. XX entre Harvard Univ., MIT e Princeton Univ. Prof. Allan Robinson (HU) cunhou o nome.

Fenômenos de Estudo da DFG

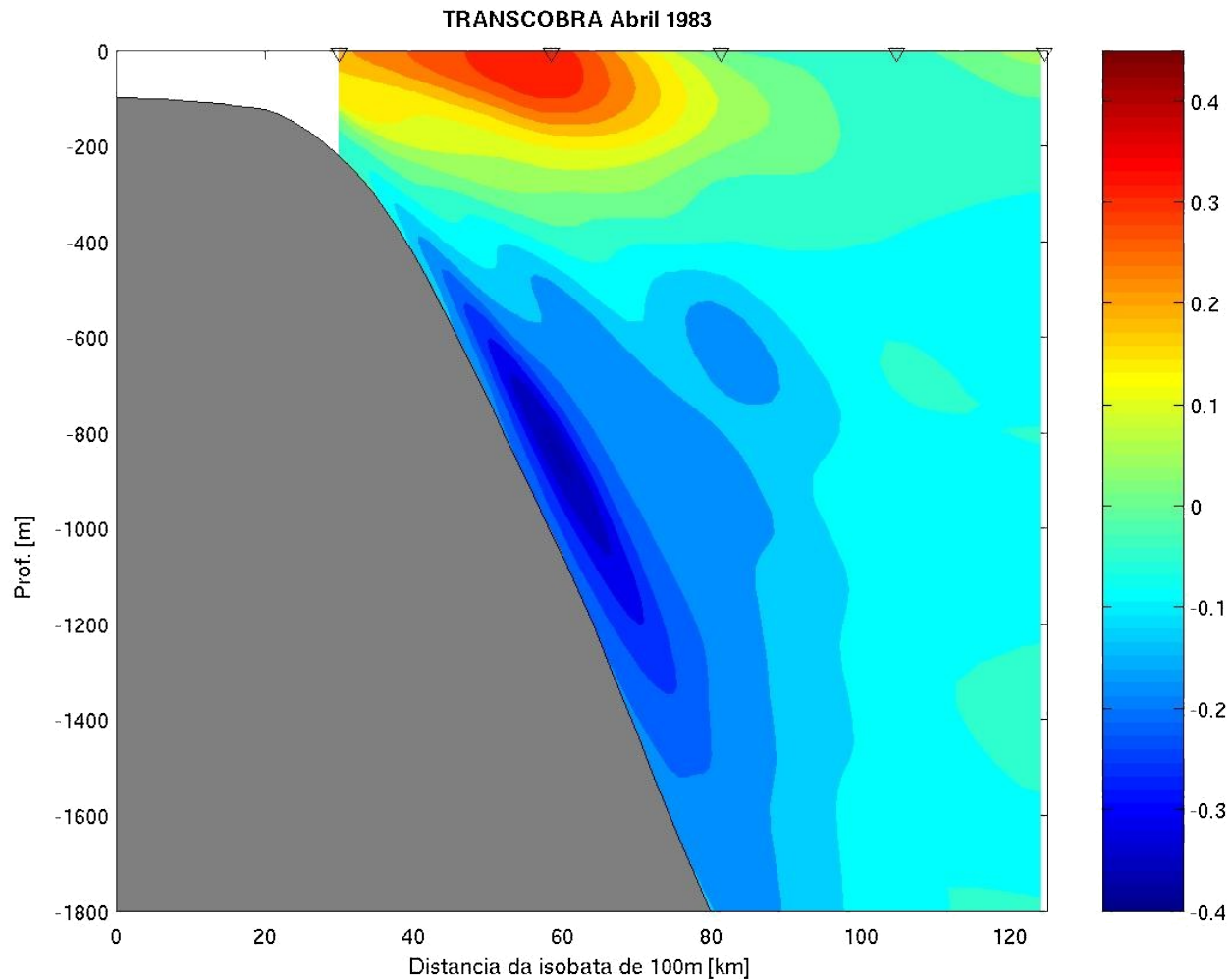
Vórtices da Corrente Norte do Brasil



Fonte: Garzoli et al. (2000)

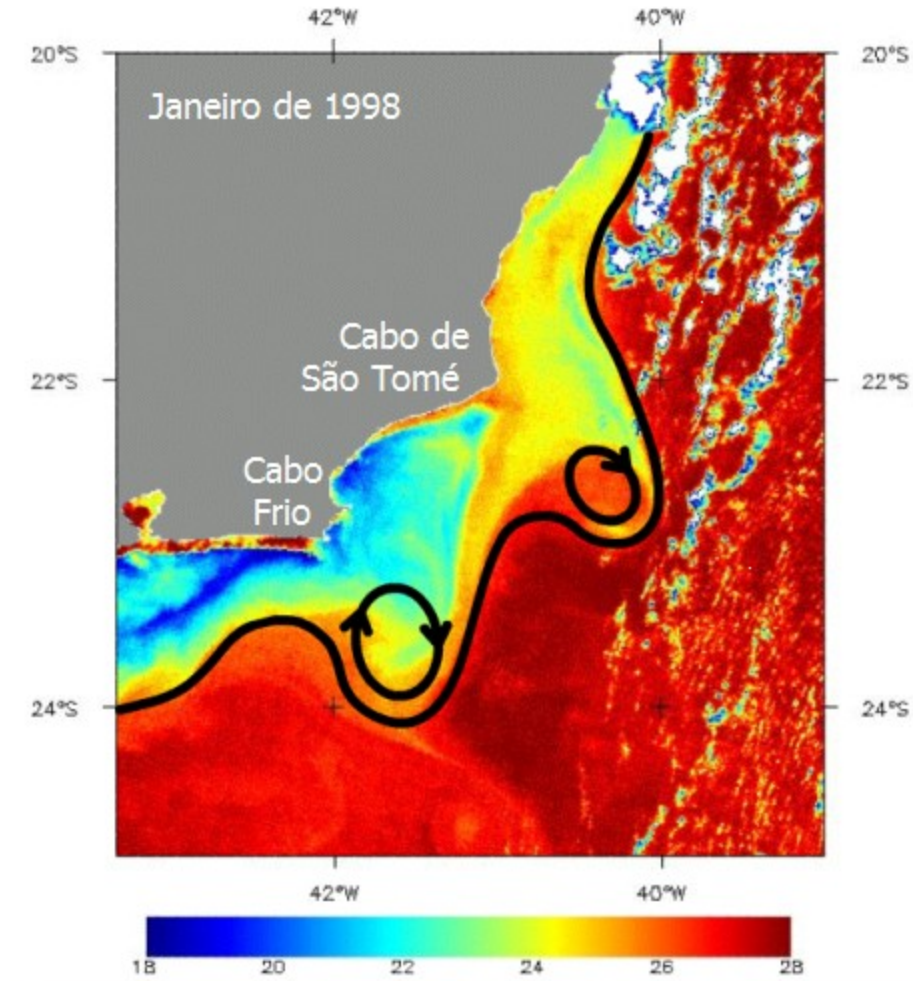


Seção Vertical -Corrente do Brasil em 22° S



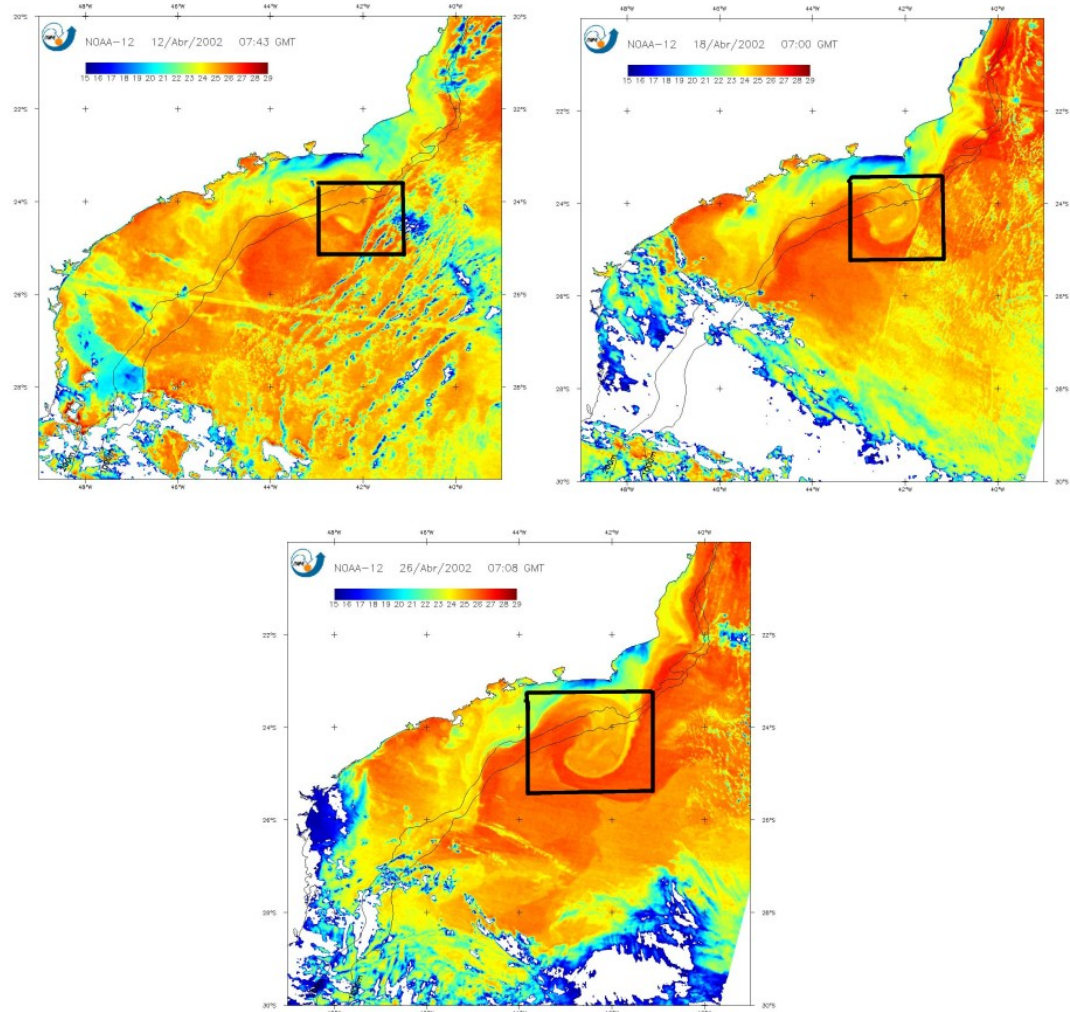
Fonte: Silveira et al. (2004)

Meandros da Corrente do Brasil



Fonte: Mahiques et al. (2005)

Meandros da Corrente do Brasil - Instabilidade



Fonte: Silveira (2007)

O Oceano como Fluido Geofísico

- **Geofísica** pode ser definida como a ciência que estuda a física das esferas que compõem o planeta terra (litosfera, atmosfera e hidrosfera) e, portanto, fortemente influenciadas por seu movimento de rotação, translação e inclinação de seu eixo, assim como as variações deste.
- O oceano compõe a quase totalidade da hidrosfera, ocupando cerca de 72% da superfície do planeta, apresenta-se com uma espessura média de 3,6 km (contra 6.400 km do raio da Terra), é aquecido de forma diferencial devido à inclinação do eixo face à irradiação solar e é “arrastado” junto com a Terra em seu movimento de rotação.
- Lema do nosso curso:
- **O oceano é um fluido raso, estratificado e em rotação**

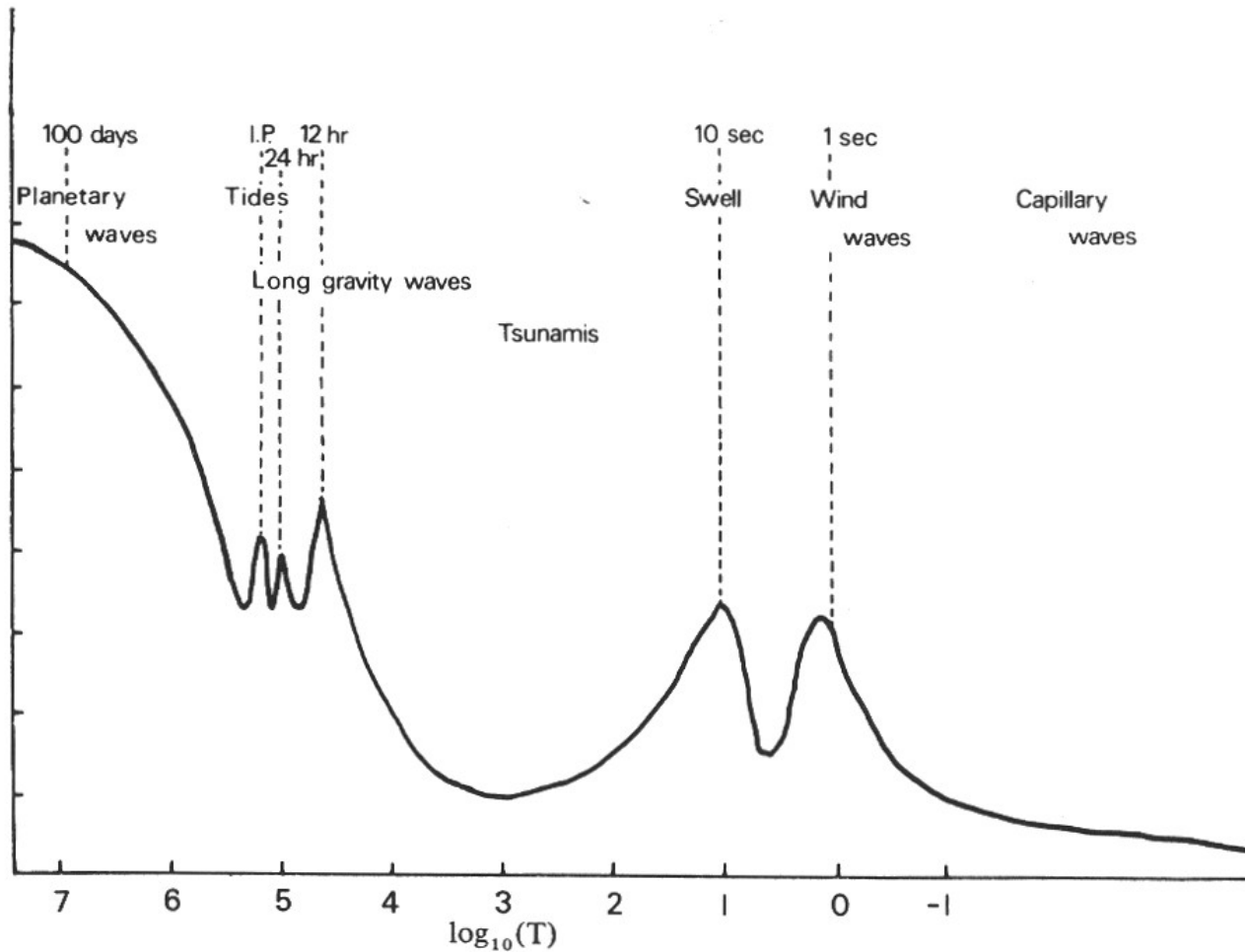
Para entendermos o que o lema significa, é necessário descrever o oceano como uma composição de fenômenos ocorrentes em diversas escalas de tempo e movimento.

Escalas de Tempo e Movimento

Dimensões Físicas e Unidades

- As leis fundamentais que governam os movimentos nos oceanos satisfazem ao princípio da homogeneidade dimensional.
- Todos os termos em equações que expressam as leis físicas têm de ter a mesma dimensão.
- Essas dimensões podem ser expressas em termos múltiplos e razões de três propriedades dimensionalmente independentes da Oc. Dinâmica:
comprimento (L), tempo (T) e massa (M).
- A análise de escalas permite a estimativa de cada termo que compõem as equações hidrodinâmicas, que são equações diferenciais parciais sem soluções gerais conhecidas. E, eliminando os termos pequenos nos balanços dinâmicos, conseguimos simplificá-las!

Espectro de Energia no Oceano



Escalas de Tempo e Movimento

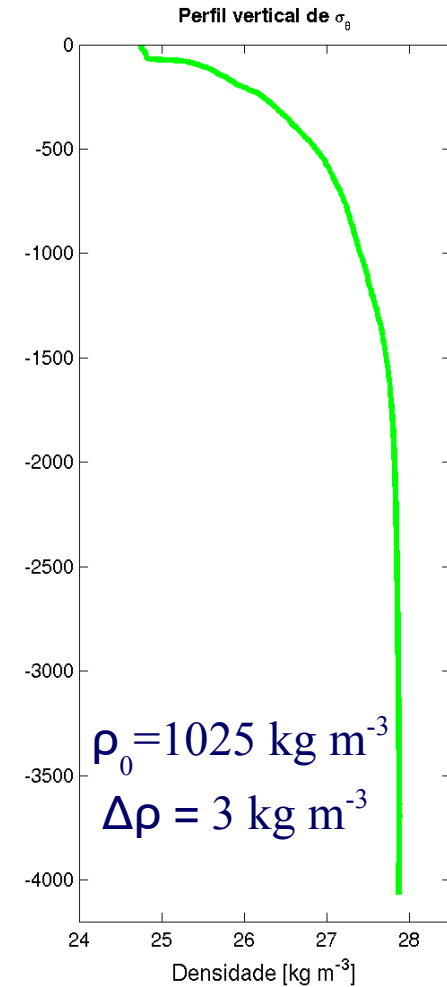
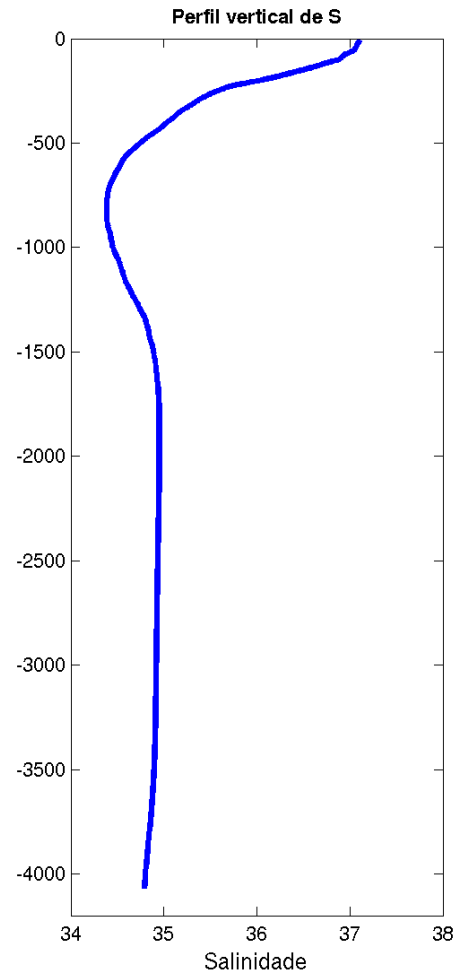
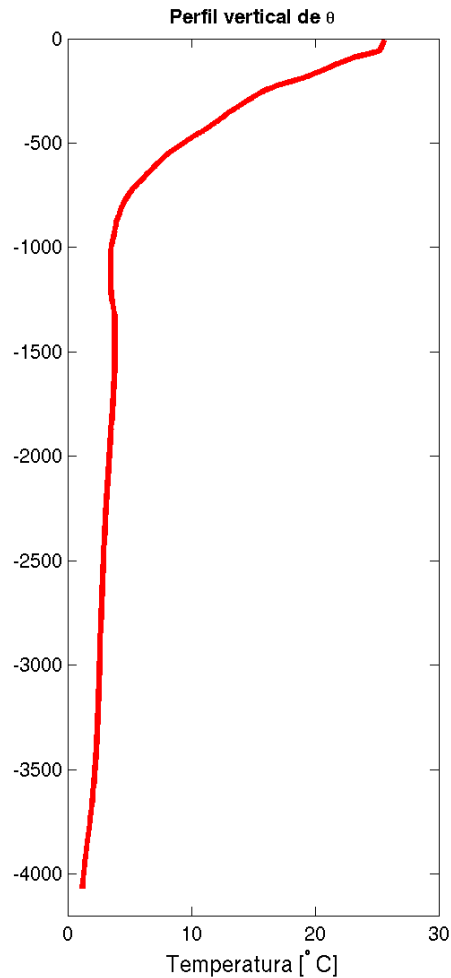
- Como no oceano é mais “fácil” estimar uma escala de velocidade que de tempo, as escalas-chave são geralmente **L**, **U** e **M**.
- A escala de tempo pode ser medida ou estimada a partir da definição de velocidade:

$$T = L U^{-1},$$

a chamada **escala advectiva do tempo**.

- Outras três escalas importantes são:
- **Escala da profundidade do movimento H**, visto que existe forte anisotropia entre as escalas horizontais e verticais de movimento no oceano.
- Obviamente por se tratar de um fluido, é apropriado representarmos a massa normalizada pelo volume da parcela de fluido oceânico, ou seja, pela densidade ρ .
- Mas, por ser a água do mar um fluido quase-incompressível, é usual utilizarmos duas escalas de densidade:
- **Escala da densidade média ρ_0** , e
- **Escala da variação de densidade $\Delta\rho$** .

Perfis Verticais – 23,25° S



Escalas de Movimento

<i>Fenômeno</i>	<i>L</i>	<i>U</i>	<i>T</i>
Ondas Internas	1-20 km	0,05-0,5 m s ⁻¹	minutos a horas
Ressurgência Costeira	1-10 km	0,1-1,0 m s ⁻¹	alguns dias
Vórtices	1-200 km	0,1-1,0 m s ⁻¹	dias-semanas
Correntes de Contorno	50-200 km	0,5 –2,0 m s ⁻¹	semanas-meses
Giros Oceânicos	milhares de km	0,01-0,1 m s ⁻¹	anos-décadas

Adaptado de: **Cushman-Roisin (1996)**

Valores Numéricos das Escalas do Oceano

<i>Escalas</i>	<i>L</i>	<i>U</i>	<i>T</i>
Pequena	<1 km	1 m s ⁻¹	até 10 ³ s
Submeso	1-10 km	1 m s ⁻¹	10 ³ -10 ⁴ s
Meso	100 km	0,1 m s ⁻¹	10 ⁶ s
Grande	1000 km	0,01 m s ⁻¹	10 ⁸ s

$$H=10^3 \text{ m}, \rho_0= 10^3 \text{ kg m}^{-3}, \Delta\rho= 1 \text{ kg m}^{-3}$$

A Importância da Geometria do Movimento

Numa banheira:

H_B = profundidade da banheira $\sim 0,5$ m

L_B = largura ou comprimento da banheira $\sim 1,5$ m

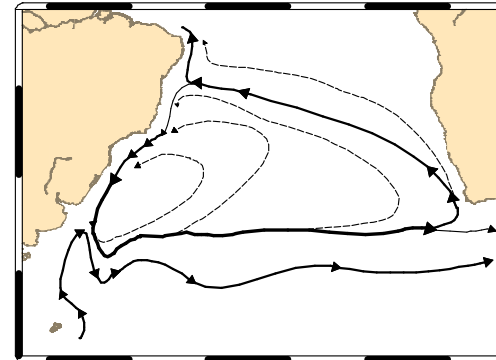
$$\delta_B = H_B / L_B \sim 0,33$$

No Giro Subtropical do Atlântico Sul:

H = profundidade média (3000 m)

L = dimensão horizontal (3000 km ou 3×10^6 m)

$$\delta = H/L \sim 10^{-3}$$



Se L fosse do tamanho de L_B , $H = 1.5$ mm!

O modelo para o oceano seria uma folha de papel, e não uma banheira!

Outra razão Importante:

$$\epsilon = H/a \sim 4,7 \times 10^{-4}$$

onde $a = 6400$ km é o raio médio da terra

A Importância da Geometria

O Número adimensional definido como:

$$\delta = H/L$$

é conhecido na DFG como “**razão de aspecto**”.

Relaciona-se com a **aproximação hidrostática** para os movimentos oceânicos, e portanto, condiciona o tamanho da aceleração vertical e da própria velocidade vertical cuja escala **W** será estudada mais à frente na disciplina

A Importância da Geometria

Podemos assim estabelecer que:

$\delta \gg 1$, a geometria não restringe movimentos verticais (águas profundas)

$\delta \sim 1$, a geometria apresenta restrições aos movimentos verticais

$\delta \ll 1$, a geometria restringe fortemente os movimentos verticais (águas rasas)

[O último caso se refere aos movimentos hidrostáticos]

A Importância da Rotação

A rotação da Terra e o efeito de Coriolis

- O período de rotação do planeta é $T_e \sim 24 \text{ h} \sim 86.400 \text{ s}$.
- A frequência de rotação ou velocidade angular da Terra é definida como

$$\Omega = 2\pi/T_e$$

- O valor numérico de Ω é $7,29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.
- A rotação da Terra em torno do seu eixo conduz ao chamado “efeito de Coriolis”
- No hemisfério Norte, objetos em movimento tendem a ser defletidos para a direita da direção de sua trajetória. No hemisfério Sul, é para a esquerda.
- O efeito é mais forte nos pólos, e decai na direção do equador para zero.
- O chamado **parâmetro de Coriolis** f se relaciona com Ω por:

$$f = 2\Omega \sin\theta$$

A Importância da Rotação

O Número de Rossby (Ro)

- É um dos números adimensionais mais importantes da DFG.
- Em sua versão “local”, pode ser entendido como a razão entre o período de rotação da Terra e a escala de tempo do movimento de interesse:

$$Ro_T = T_e / T \approx (\Omega T)^{-1} \\ \approx (f T)^{-1}$$

- Mas, como dissemos antes, é mais fácil observacionalmente medirmos a velocidade do que o período de movimentos, principalmente se forem muito longos. Assim, usando a escala advectiva do tempo obtemos:

$$Ro = U (f L)^{-1}$$

A Importância da Rotação

Podemos assim estabelecer que:

$Ro \gg 1$, a rotação não influencia nos movimentos. O efeito de Coriolis pode ser desconsiderado

$Ro \sim 1$, a rotação já influencia marcadamente os movimentos. O efeito de Coriolis precisa ser considerado no balanço.

$Ro \ll 1$, a rotação da Terra domina o escoamento e as acelerações devido são predominantemente ao efeito de Coriolis.

A Importância da Estratificação

- O oceano tipicamente consiste de camadas de fluido de diferentes densidades, que sob a ação da gravidade tendem a se arranjar em pilhas verticais correspondentes a um estado de energia potencial mínima.
- O movimento dos fluidos tendem a perturbar esse estado de equilíbrio soerguendo fluido mais denso e afundando fluido mais leve.
- Por conservação de energia, aumento de energia potencial tem de ocorrer às custas de decréscimos de energia cinética.
- Logo, **a importância da estratificação deve ser avaliada comparando energia cinética e potencial**
- Mas, antes disso, recordemos e exploremos como medimos a estratificação no oceano...

A Importância da Estratificação

- Sejam e_K e Δe_P as energia cinética e variação de energia potencial, respectivamente, expressas por unidade de volume e dadas por:

$$e_K = \rho_0 U^2 ; \quad \Delta e_P = \Delta \rho gH.$$

- E consideremos agora um número adimensional formado pela razão entre as duas:

$$Fr^2 = (\rho_0 U^2) / (\Delta \rho gH),$$

- e que é conhecido como o quadrado do número de Froude interno.

O (quadrado do) número de Froude interno

Podemos assim estabelecer que:

$Fr^2 \gg 1$, mudanças de energia potencial ocorrem às custas de pouca energia cinética; o efeito da estratificação pode ser ignorado.

$Fr^2 \sim 1$, um acréscimo de energia potencial consome significativamente energia cinética; a estratificação causa modificação substancial no escoamento.

$Fr^2 \ll 1$, existe insuficiente energia cinética para perturbar a estratificação, e esta limita severamente o escoamento.

O Raio de deformação de Rossby interno

- Um dos casos mais interessantes e importantes da DFG é quando os efeitos de rotação e estratificação são simultaneamente relevantes à dinâmica do escoamento oceânico, mas nenhum dos dois é dominante.
- Matematicamente, podemos escrever essa condição como:

$$Ro \sim \mathcal{O}(1); Fr^2 \sim \mathcal{O}(1)$$

- E podemos nos perguntar qual seria a escala de comprimento a partir da qual tanto a estratificação e a rotação não podem ser desconsideradas no estudo da DFG...
- Para tanto, obtenhamos a escala horizontal de comprimento Rd_i a partir da primeira condição acima:

$$Rd_i = U f^{-1}$$

- E usemos a segunda condição para encontrar a escala de velocidade:

$$U = (\Delta\rho/\rho_0 gH)^{1/2}$$

O Raio de deformação de Rossby interno

- Combinando as duas expressões, chegamos a uma definição dessa escala de comprimento independente da escala da velocidade horizontal e que só depende da latitude e do empuxo característico (ou da estratificação):

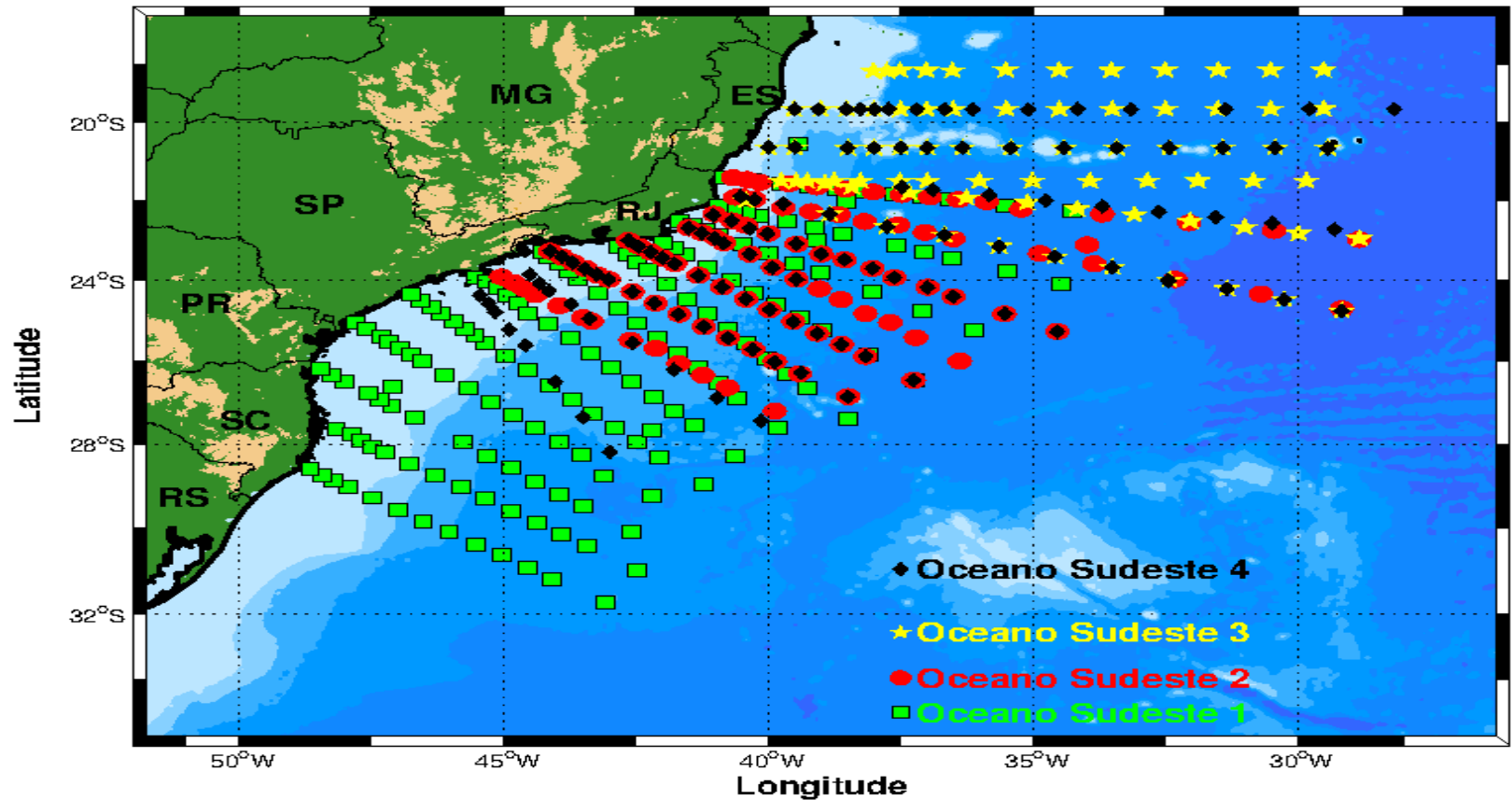
$$Rd_i = (\Delta\rho/\rho_o gH)^{1/2}/f$$

- **Significado físico:**

É a distância horizontal na qual a tendência gravitacional de manter as isopicnais planas é equilibrada pelo o efeito de rotação da Terra, que as impedem de retornar ao estado de energia potencial mínima.

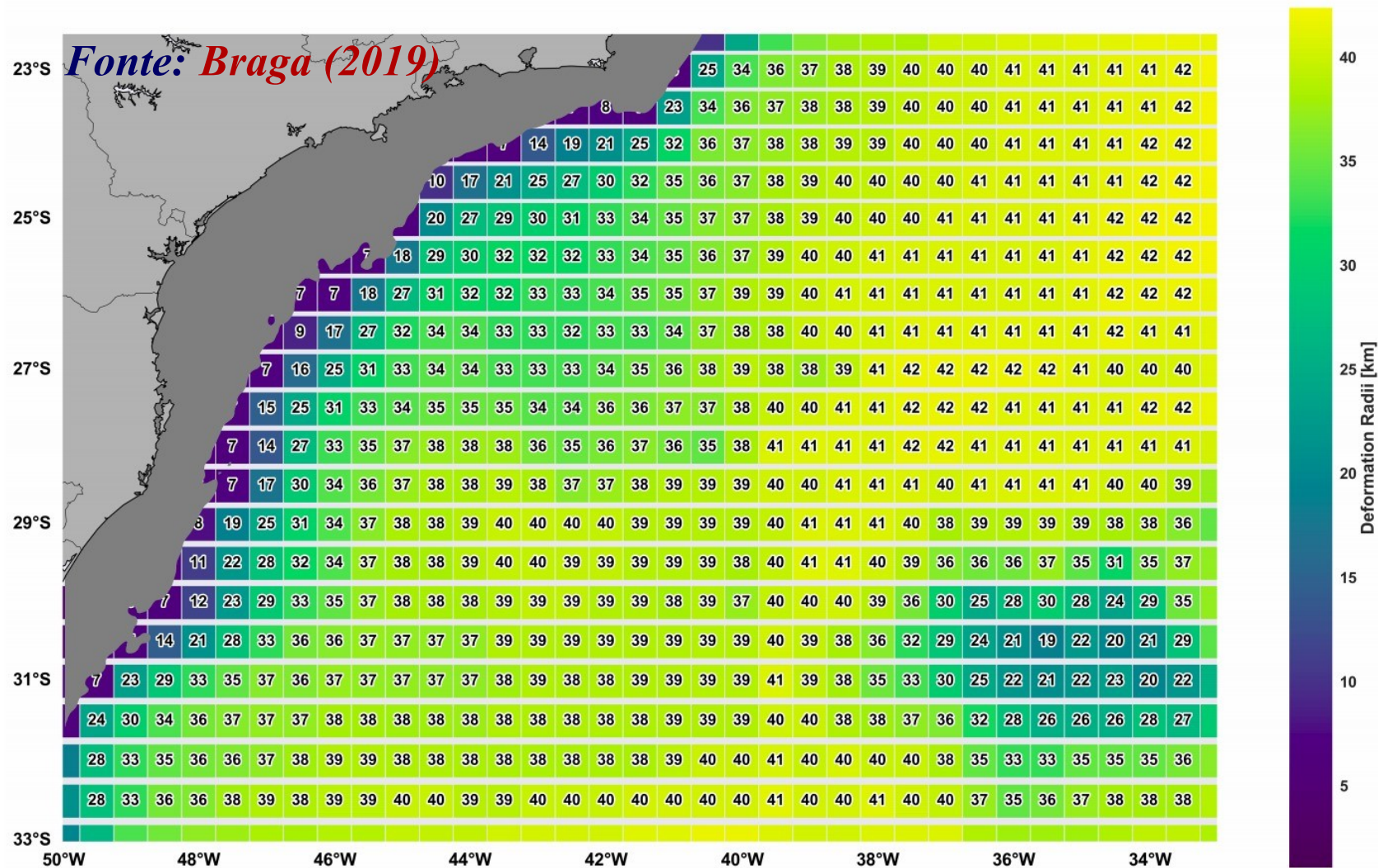
- Assim, em **pequena escala**, $L \ll Rd_i$, em **submesoescala**, $L \sim (0,1-1)Rd_i$; em **mesoescala** $L \geq Rd_i$ e, em **grande escala**, $L \gg Rd_i$.

Exemplo importante de aplicação



Em cruzeiros quase-sinóticos, o espaçamento entre as estações deve ser no **máximo** de um raio de deformação interno.

O Raio de Deformação Interno em nosso quintal oceânico



Existe um Raio de Deformação Externo?

Claro que sim!

- Consideremos agora que não estamos olhando para as variações de densidade no interior da coluna de água, mas sim examinando-as na interface ar-mar. Assim,

$$\Delta\rho = \rho_0 - \rho_{\text{ar}} \approx \rho_0$$

- Assim, a expressão do raio de deformação se torna

$$Rd_e = (gH)^{1/2} / f.$$

- Notem que o raio de deformação externo é muito (muito mesmo) maior que o raio de deformação interno. E, por conseguinte, não é tão relevante em oceanografia dinâmica.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO



Sistemas de Referência

Sistemas de Referência

- Antes de iniciarmos o estudo dos fenômenos oceânicos, cabe-nos estabelecer sistemas de orientação sobre os quais nossas medidas serão realizadas.
- Como vimos na primeira aula, a DFG se dedica à investigação de fenômenos físicos intrinsecamente ligados ao **planeta Terra**.
- Logo, o sistema natural de referência é aquele esférico, que acompanha a orientação sobre a superfície de nosso planeta.
- Mas, **será que para todas as escalas de movimento é necessário levarmos em consideração a superfície da esfera terrestre?**
- Esse é o assunto que iremos discutir a seguir.

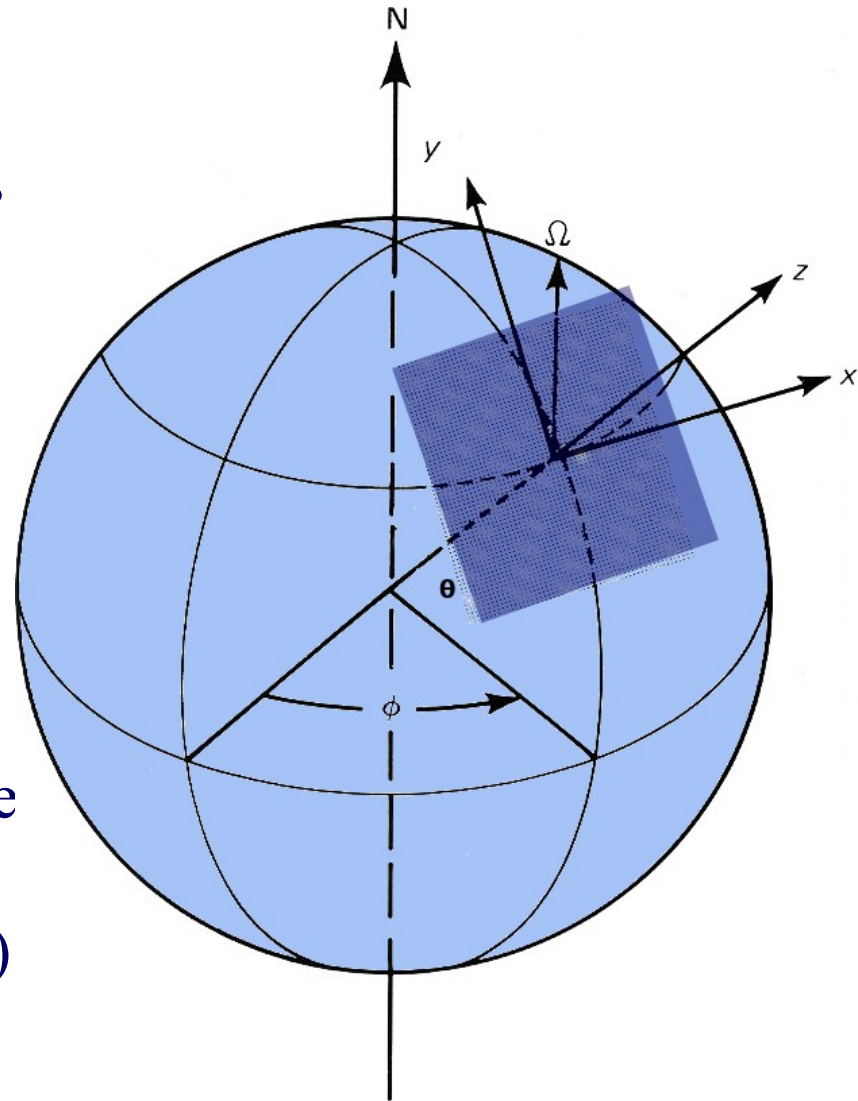
Coordenadas Esféricas

- Neste referencial, as coordenadas um ponto são identificadas por

$$(\phi, \theta, r)$$

- Φ é a longitude (medida na direção leste-oeste)
- θ é a latitude (medida na direção norte-sul)
- r é distância do ponto de interesse ao centro da Terra.
- Os versores (ou vetores unitários) correspondentes são:

$$(\vec{m}, \vec{l}, \vec{n})$$



Coordenadas Esféricas

- Como exemplo de aplicação das coord. esféricas, consideremos o gradiente de uma propriedade escalar qualquer Ψ , que é dado por

$$\nabla\psi = \frac{1}{r\cos\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \vec{m} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \vec{l} + \frac{\partial\psi}{\partial r} \vec{n}.$$

Notem que existem coeficientes não constantes associado às derivadas dos versores.

- Mas, a maioria dos problemas em DFG em oceanografia podem ser investigados utilizando um plano tangente à superfície da esfera na latitude central $\theta = \theta_0$: **o plano β** .

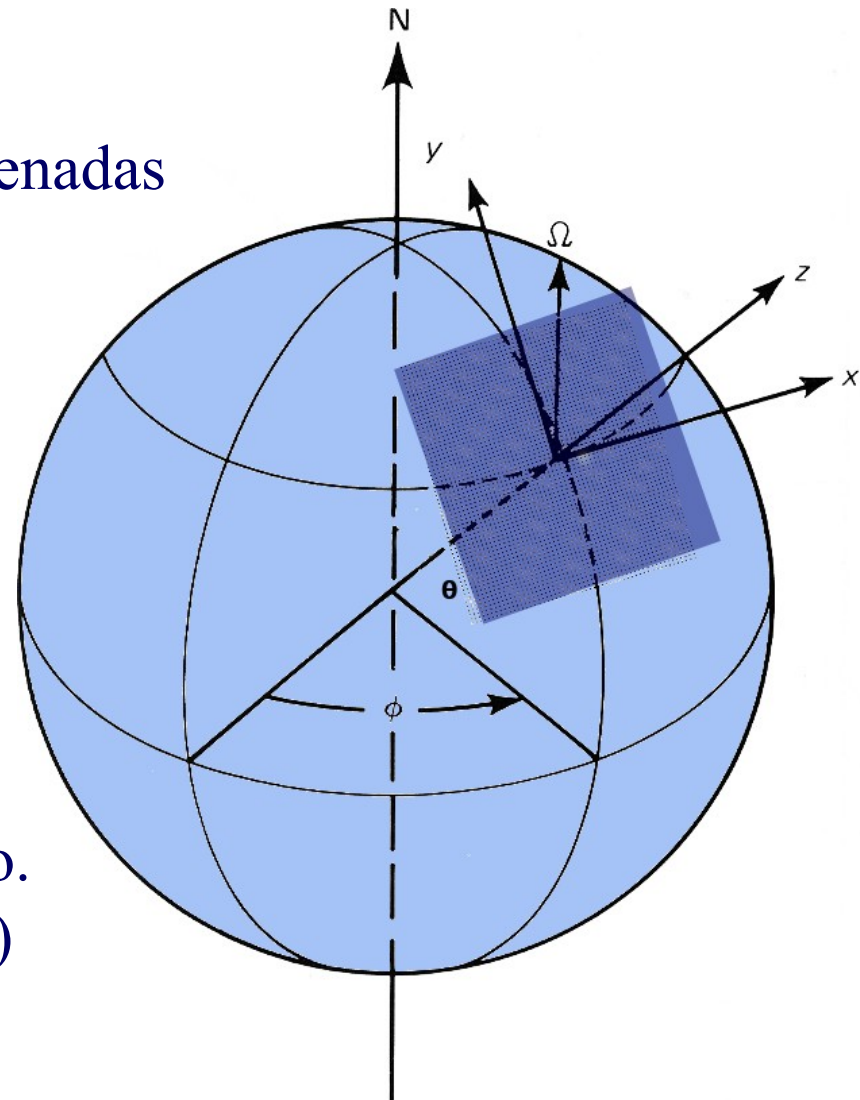
O plano β

- Neste novo referencial, as coordenadas de um ponto são identificadas por

$$(x, y, z)$$

- x é a distância zonal (medida na direção leste-oeste)
- y é a distância meridional (medida na direção norte-sul)
- z é distância vertical do ponto de interesse até a superfície do oceano.
- Os versores (ou vetores unitários) correspondentes são:

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$



O plano β

- Formalmente, a transformação de coordenadas esféricas as do plano tangente local envolve expansões trigonométricas usando séries tipo Taylor e considerações sobre as escalas de movimento L e H . Como base nestas, estabelecemos:

$$x = (a \cos \theta_0) (\phi - \phi_0)$$

$$y = a (\theta - \theta_0)$$

$$z = r - a.$$

onde $a=6370 \text{ km}$ é o raio médio da Terra, $\phi_0 = 0^\circ$ é a longitude do meridiano de Greenwich, e θ_0 é a latitude central (ou de tangência do plano)

O plano β

- Para a transformação de coordenadas, usamos a regra da cadeia. Exemplificando com a transformação de Φ para x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \phi} &= \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial x} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (a \cos \theta_0 \phi) \right] \frac{\partial}{\partial x} \\ &= a \cos \theta_0 \frac{\partial}{\partial x}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{a \cos \theta_0} \frac{\partial}{\partial \phi} .$$

O plano β

- Analogamente para y e z , obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}$$

- Assim, com essas correspondências, reescrevemos o gradiente de Ψ como

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{k}.$$

Condições para o plano β

- Obviamente, há limites para o uso deste plano. E tais limites são dados, como previamente dito, por argumentos de análise de escalas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{H}{a} \ll 1 \\ \left(\frac{L}{a}\right)^2 \ll 1 \\ \left(\frac{L}{a} \tan \theta_0\right) \ll 1. \end{array} \right.$$

Mas por que “plano β ”?

- A decomposição do vetor velocidade angular nos eixos do sistema cartesiano local é dada por:

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k}$$

onde:

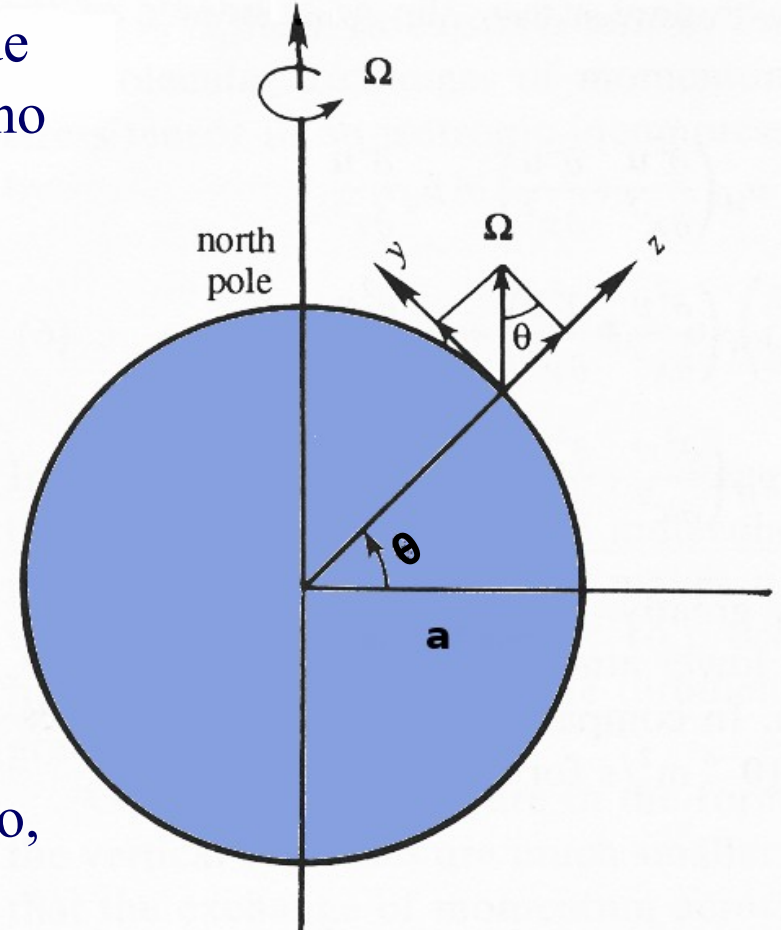
$$\Omega_x = 0$$

$$\Omega_y = \Omega \cos\theta$$

$$\Omega_z = \Omega \sin\theta$$

e considerando a definição de rotação,

$$\vec{\Omega} \cong \Omega \sin\theta \vec{k}$$



Mas por que “plano β ”?

- Rossby (1939) ponderou como fazer a velocidade angular variar no plano tangente local. Sua solução foi expandir a função seno da latitude em série de Taylor **em torno da latitude central θ_0** e colecionar a aproximação linear desta.
- Seu argumento de escala foi que, pela definição de y , temos que

$$\Delta\theta = (\theta - \theta_0) = \frac{y}{a} .$$

- Como $\left(\frac{L}{a}\right)^2 \ll 1 \Leftrightarrow \left(\frac{L}{a}\right) < 1,$

a diferença entre θ e θ_0 é pequena ao longo da escala do movimento no plano, ou seja, o argumento $\Delta\theta$ é pequeno, justificando a expansão.

Mas por que “plano β ”?

- Como sabemos a série de Taylor é dada por

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n f}{\partial \theta^n} \frac{(\theta - \theta_0)^n}{n!}$$

- Considerando a série expandida em torno da latitude central,

$$f(\theta) = f(\theta_0) \frac{(\theta - \theta_0)^0}{0!} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{(\theta - \theta_0)}{1!} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2!} + \dots$$

e aplicando-a à função seno, obtemos

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &= \text{sen } \theta_0 + \text{cos } \theta_0 (\theta - \theta_0) - \frac{\text{sen } \theta_0}{2!} (\theta - \theta_0)^2 + \dots \\ \text{sen } \theta &= \text{sen } \theta_0 + \text{cos } \theta_0 \frac{y}{a} - \frac{\text{sen } \theta_0}{2} \frac{y^2}{a^2} + \dots \end{aligned}$$

Mas por que “plano β ”?

- Vamos agora estabelecer a relação entre a **velocidade angular** do plano tangente local e o **parâmetro de Coriolis**.
- Para tanto, usemos a expressão da velocidade de uma parcela de fluido girar num círculo de latitude qualquer dada por

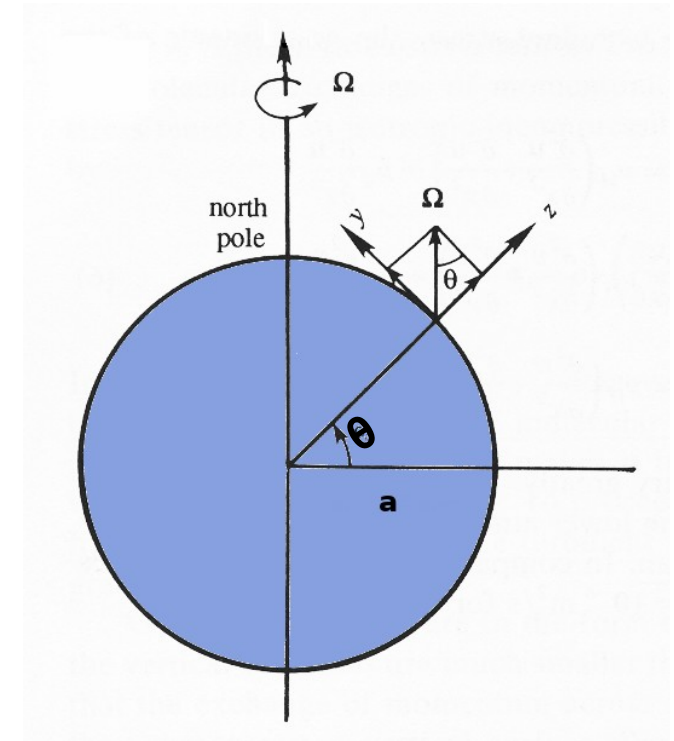
onde

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{\Omega} \times \vec{x} \\ &= (\Omega \sin\theta \vec{k}) \times \vec{x}, \\ \text{e } \vec{x} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.\end{aligned}$$

- Apliquemos agora a definição de vorticidade

$$\begin{aligned}\vec{\zeta} &= \nabla \times (\Omega \sin\theta \vec{k} \times \vec{x}) \\ &= 2\Omega \sin\theta \vec{k} \\ &= f \vec{k},\end{aligned}$$

que corresponde à vorticidade de um fluido em rotação de corpo sólido e é igual ao **dobro** de sua velocidade angular.



Mas por que “plano β ”?

- Finalmente, expressamos o parâmetro de Coriolis por sua aproximação linear via série de Taylor:

$$f = \underbrace{2\Omega \operatorname{sen}\theta_0}_{f_0} + \underbrace{\frac{2\Omega \cos\theta_0}{a}}_{\beta} y$$

- O parâmetro de Coriolis representa também a **vorticidade planetária**.
- β é chamado de parâmetro de Rossby tem $O(10^{-11}) \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ e representa o **gradiente (meridional) da vorticidade planetária**.
- A razão entre os dois termos que compõem f é chamado número planetário, dado por

$$\hat{\beta} = \frac{\beta L}{f_0},$$

com valores de $O(10^{-2})$ em mesoescala e $O(10^{-1})$ em grande escala.

O plano f

- Ponderemos agora sobre dimensões de um plano que coincida aproximadamente com o superfície da Terra. Seriam movimentos de menor escala que aqueles do plano β .
- Para esses movimentos, podemos aproximar o parâmetro de Coriolis por seu termo médio apenas, ou seja,

$$f = f_0 = 2\Omega \operatorname{sen}\theta_0 .$$

- Esse é o chamado plano f , onde uma hipótese de escala mais restritiva (relativamente às do plano β) é imposta pelo número planetário pequeno:

$$\frac{L}{a} \operatorname{cotg}\theta_0 \ll 1 .$$

Especificações de Estudo de Dinâmica de Fluidos:

Lagrangiana e Euleriana

Especificação Lagrangiana

- A especificação Lagrangiana consiste em seguir a história de parcelas individualmente.
- Existem duas variáveis independentes: o tempo e a identificação da parcela de fluido a ser seguida.
- A identificação da parcela pode ser convenientemente escolhida como a posição desta no instante inicial $t=0$. Assim, qualquer propriedade do escoamento é expressa como

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\vec{x}_0, t).$$

- Em particular, a posição desta parcela é descrita como

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_0, t).$$

- Nessa especificação, velocidade e aceleração são simplesmente derivadas temporais:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad \text{e} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}.$$

Especificação Euleriana

- Na especificação Euleriana, concentramo-nos em o que acontece ao fluido num determinado ponto do espaço físico, ou seja,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\vec{x}, t) = \mathcal{P}(x, y, z, t).$$

- Logo, espaço e tempo são variáveis independentes, embora resguardem suas relações Lagrangianas através das relações de velocidade:

$$d\vec{x} = \vec{v} dt \left\{ \begin{array}{l} dx = u dt \\ dy = v dt \\ dz = w dt \end{array} \right.$$

- A derivada temporal não representa mais a taxa de variação total de uma propriedade qualquer do fluido. Outros termos são necessários para “simular” a especificação Lagrangiana na Euleriana.

Especificação Euleriana

- Para arbitrários e independentes incrementos de espaço e tempo, o diferencial da propriedade P é dado por

$$d\mathcal{P} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} dz .$$

- Dividindo a expressão acima por dt e utilizando as definições Lagrangianas de velocidade, obtemos

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z}$$

- Note que o membro direito da equação acima é a representação da variação Lagrangiana na especificação Euleriana.

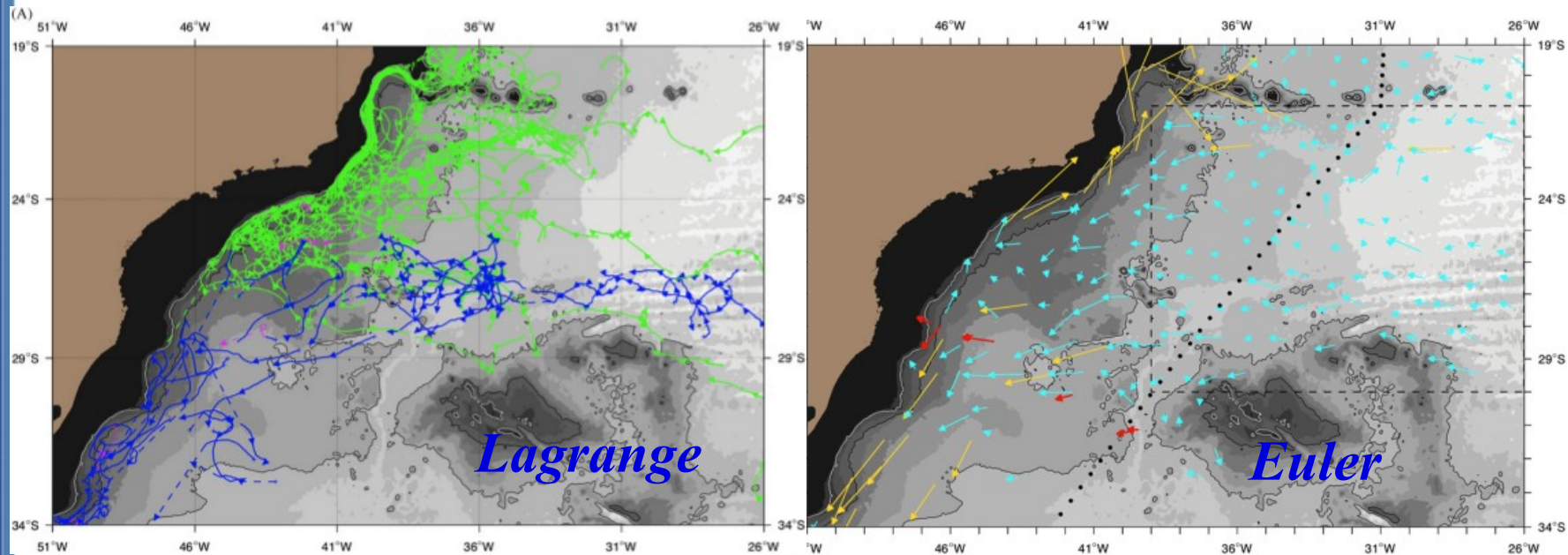
Especificação Euleriana

- Assim,

$$\underbrace{\frac{d\mathcal{P}}{dt}}_{\text{Lagrange}} = \underbrace{\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\mathcal{P}}_{\text{Euler } \left(\frac{D\mathcal{P}}{Dt}\right)}$$

- A expressão para a taxa de variação total na especificação Euleriana é conhecida justamente como derivada material ou Lagrangiana.
- O primeiro termo no lado direito se refere à taxa de variação local.
- O segundo termo do lado direito representa as mudanças na propriedade \mathcal{P} como resultado da advecção da parcela de fluido de uma localidade para outra onde o valor de \mathcal{P} é diferente.

Exemplo oceanográfico: Lagrange vs. Euler



Fonte: Legeais et al. (2012)

Equações de Conservação no Oceano

O que são equações de conservação?

- “**Equação de conservação**” rigorosamente significa que a taxa de variação total de uma propriedade P é nula. Se existirem fontes e sorvedouros que alterem P , a taxa de variação será diferente de zero, ou seja,

$$\frac{DP}{Dt} = \mathcal{F}_P,$$

$\mathcal{F}_P \equiv$ fontes e/ou sorvedouros.

- **Exemplos:** massa, volume, densidade, , calor, temperatura, sal, momentum linear, momentum angular, e energia mecânica.

Conservação da Massa

- Fazemos uso da chamada “**derivação lagrangiana ou material**” da equação da conservação da massa, apresentada originalmente por Kundu (1990) devido à sua simplicidade e elegância.
- Para tanto, consideremos um pequeno volume de fluido retangular com dimensões $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ e que possui massa Δm e densidade ρ .
- Se massa é conservada no elemento de volume, temos que

ou,

$$\frac{D}{Dt} \Delta m = 0$$

$$\frac{D}{Dt} (\rho \Delta V) = 0.$$

Conservação da Massa

- Utilizando a regra de derivação do produto e isolando os termos com densidade no lado esquerdo e o com volume no lado direito, obtemos

$$\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}}_{\text{taxa de variação fracional de densidade}} = \underbrace{-\frac{1}{\Delta V} \frac{D(\Delta V)}{Dt}}_{\text{taxa de variação fracional de volume}}$$

- Agora expandemos o membro esquerdo da equação em termos de $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ e usamos novamente a regra de derivação do produto, que é triplo desta vez.



Conservação da Massa

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta V} \frac{D}{Dt}(\Delta V) &= \frac{1}{(\Delta x \Delta y \Delta z)} \frac{D}{Dt}(\Delta x \Delta y \Delta z) \\ &= \frac{1}{(\Delta V)} \left[\Delta y \Delta z \underbrace{\frac{D}{Dt}(\Delta x)}_{\Delta u} + \Delta x \Delta z \underbrace{\frac{D}{Dt}(\Delta y)}_{\Delta v} + \Delta x \Delta y \underbrace{\frac{D}{Dt}(\Delta z)}_{\Delta w} \right] \\ &= \frac{1}{(\Delta x \Delta y \Delta z)} [\Delta y \Delta z (\Delta u) + \Delta x \Delta z (\Delta v) + \Delta x \Delta y (\Delta w)] \\ &= \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta y} + \frac{\Delta w}{\Delta z}\end{aligned}$$

Levando o volume ao limite infinitesimal,

$$\approx \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Conservação da Massa

- Reescrevendo a equação da conservação da massa com a nova forma da variação fracional do volume, chegamos a

$$\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}}_{\mathcal{O}\left(\frac{\Delta\rho U}{\rho_0 L}\right)} = - \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{\mathcal{O}\left(\frac{U}{L}\right)}$$

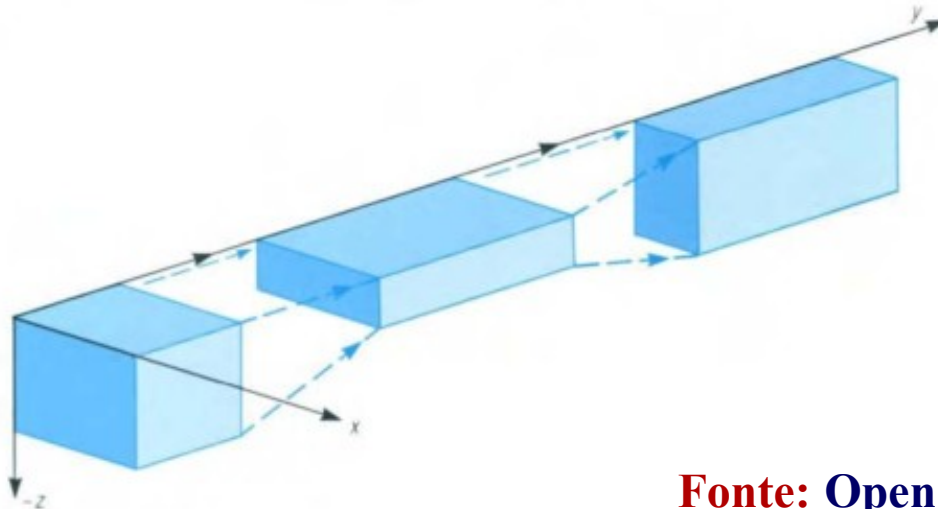
- Como a razão $\Delta\rho/\rho_0 = \mathcal{O}(10^{-3})$, o termo envolvendo a taxa de variação fracional de densidade é 1000 vezes menor do que a de volume.
- Isso é uma consequência da água do mar ser quase-incompressível.
- Com isso, podemos desprezar o termo do lado direito em comparação com o esquerdo.
- A consequência é que **conservação de massa no oceano é de fato conservação de volume!**

A Equação da Continuidade

- A equação da conservação do volume então pode ser escrita como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

- Esta equação é apelidada de **equação da continuidade** pois a interpretação física é que o volume pode se deformar, mas continua constante ao longo da trajetória da parcela de fluido.



Uma escala para w

- Temos, com a eq. da continuidade, uma lei física que nos permite inferir uma escala para a velocidade vertical.
- Já comentamos o quanto difícil é esta estimativa. A escala a ser apresentada aqui é a primeira, mas nem sempre a mais adequada para a maioria dos fenômenos de meso e grande escala no oceano.
- A escala de w é obtida requerendo que a divergência vertical tenha a mesma ordem de grandeza da horizontal. Isto quer dizer que assumiremos (por hora) que os três termos da continuidade têm a mesma ordem!

$$\underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{O\left(\frac{W}{H}\right)} = - \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{O\left(\frac{U}{L}\right)}$$

Assim, a escala é dada por:

$$W = \frac{H}{L} U$$

ou

$$W = \delta U.$$

A Aproximação de Boussinesq

- É aproximação de Boussinesq que está por trás da condição de incompressibilidade.
- A hipótese de escala decorre de

$$\rho(x, y, z, t) = \bar{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t)$$

$$\bar{\rho} = \mathcal{O}(\rho_0); \quad \rho' = \mathcal{O}(\Delta\rho) .$$

- Caso definamos um parâmetro adimensional pequeno como ϵ , conhecido como **salto de densidade normalizado** ou **parâmetro de Boussinesq**:

$$\epsilon = \mathcal{O} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \right) ,$$

$$\epsilon = \mathcal{O}(10^{-3}) .$$

Aproximação de Boussinesq

- Assim, o desmembramento da Eq. da conservação da massa é feito colecionando os termos de ordem ϵ^0 e ordem ϵ^1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\epsilon)^0 &\implies \nabla \cdot \vec{v} = 0, \\ \mathcal{O}(\epsilon)^1 &\implies \frac{1}{\rho_0} \frac{D\rho}{Dt} = 0. \end{aligned}$$

- O balanço de mais baixa ordem é a **equação da continuidade**. O balanço de ordem mais alta é a **Eq. da conservação de densidade**:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{D\rho}{Dt} = 0 \implies \frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

Conservação de densidade

- É mais comum escrevermos a advecção da densidade média em termos da frequência de estratificação (ou de Brunt-Väisällä):

- $$\frac{D}{Dt}\rho' + w\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z} = 0$$
ou
$$\frac{D}{Dt}\rho' - w\frac{\rho_0}{g}N^2(z) = 0.$$

- Notem que também podemos obter uma escala para a velocidade vertical a partir da conservação da densidade:

$$W = g\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\frac{1}{N^2}\frac{U}{L}; \quad N^2 = \frac{g}{\rho_0}\frac{\Delta\rho}{H}$$

$$W = \frac{H}{L}U = \delta U$$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO



A Equação Geral do Movimento no Oceano

O que é a equação geral do movimento?

- A equação geral do movimento é o apelido das *equação vetorial de Navier-Stokes* aplicada a um fluido em rotação, ou seja, as ditas “*forças fictícias*” de *Coriolis e centrífuga estão presentes na formulação*. São, como veremos, adaptações necessárias para aplicar a segunda lei de Newton a um referencial não-inercial.
- Por sua vez, este conjunto de três equações tem origem nas *equações de Euler* para um fluido não-viscoso (ou invíscido), que foram formuladas pelo brilhante *Leonhard Euler em 1738* como aplicação de sua especificação de estudo de fluidos.
- A inclusão dos termos de atrito nas equações de Euler deve-se a *Claude-Louis Navier e George Gabriel Stokes* para aplicações em engenharia.

Conservação do Momentum Linear

- Fazemos uso de nossa formulação básica para uma equação de conservação e apliquemo-a à grandeza vetorial conhecida por **momentum linear**.

$$\frac{D}{Dt}(m \vec{v}) = \vec{\mathcal{F}},$$
$$\vec{v} \underbrace{\frac{Dm}{Dt}}_{=0} + m \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{\mathcal{F}},$$
$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\vec{\mathcal{F}}}{m}.$$

- Note que a última equação é a **segunda lei de Newton** expressa em termos de que a aceleração da parcela de fluido no oceano ocorre em função de uma resultante de forças específicas atuando sobre esta.

Forças Atuantes no Oceano

- As forças atuantes no oceano são:

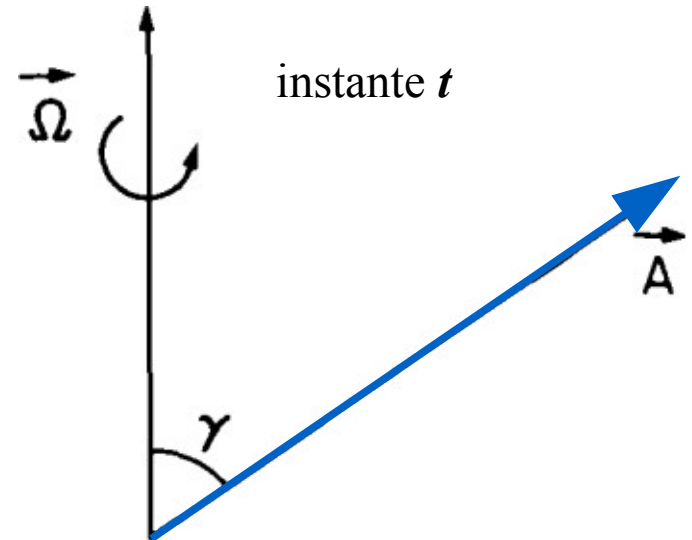
$$\frac{\vec{\mathcal{F}}}{m} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \check{\mathcal{T}} + \vec{g} + \vec{g}_T.$$

onde:

- $-\frac{1}{\rho_0} \nabla p \equiv$ força do gradiente de pressão
- $\frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \check{\mathcal{T}} \equiv$ forças de viscosidade
[$\check{\mathcal{T}}$ é o tensor (de 2ª ordem) dos estresses]
- $\vec{g} = -g\vec{k} \equiv$ força gravitacional da Terra
 $\approx 9,81 \text{ m s}^{-2}$
- $\vec{g}_T \equiv$ forças gravitacionais do sistema
Terra-Sol-Lua (forças geradoras de maré)

Referencial Não-Inercial

- Sabemos nós que as leis de Newton só valem num referencial inercial. Urge então “corrigi-las e expressá-las em termos de quantidades que giram junto com nosso planeta. Para tanto, consideremos a situação a seguir.
- Em primeiro lugar, devemos mencionar que uma **grandeza escalar independe do referencial**. Apenas grandes vetoriais são afetadas, pois dependem da direção que se altera mediante à rotação.
- Consideremos o vetor \vec{A} de magnitude constante e que faz um ângulo γ com o eixo de rotação do sistema. Na figura ao lado, o vetor se encontra no instante t .
- Este sistema gira com velocidade angular $\vec{\Omega}$.



Fonte: Pedlosky (1997)

Referencial Não-Inercial

- Tendo o tempo elapsado Δt desde o instante inicial t , o vetor \vec{A} girou $\Delta\theta$. A percepção de mudança no vetor é sentida por

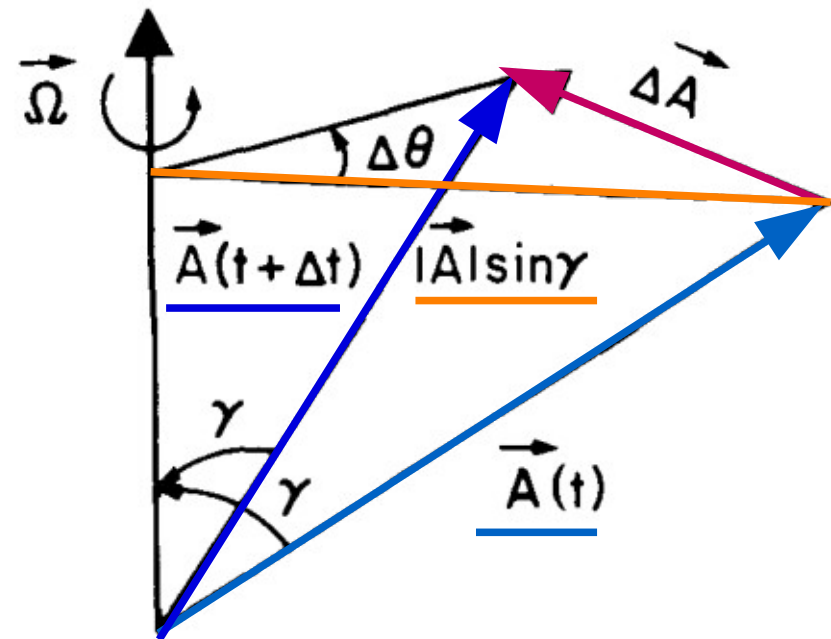
$$\underbrace{\vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t)}_{\Delta\vec{A}} = (R \Delta\theta) \vec{n},$$

$$= (|\vec{A}| \text{sen} \gamma \Delta\theta) \vec{n}$$

onde o versor na direção das mudanças de \vec{A} é dado por

$$\vec{n} = \frac{\vec{\Omega} \times \vec{A}}{|\vec{\Omega} \times \vec{A}|} = \frac{\vec{\Omega} \times \vec{A}}{|\vec{\Omega}| |\vec{A}| \text{sen} \gamma}.$$

Fonte: Pedlosky (1997)



Referencial Não-Inercial

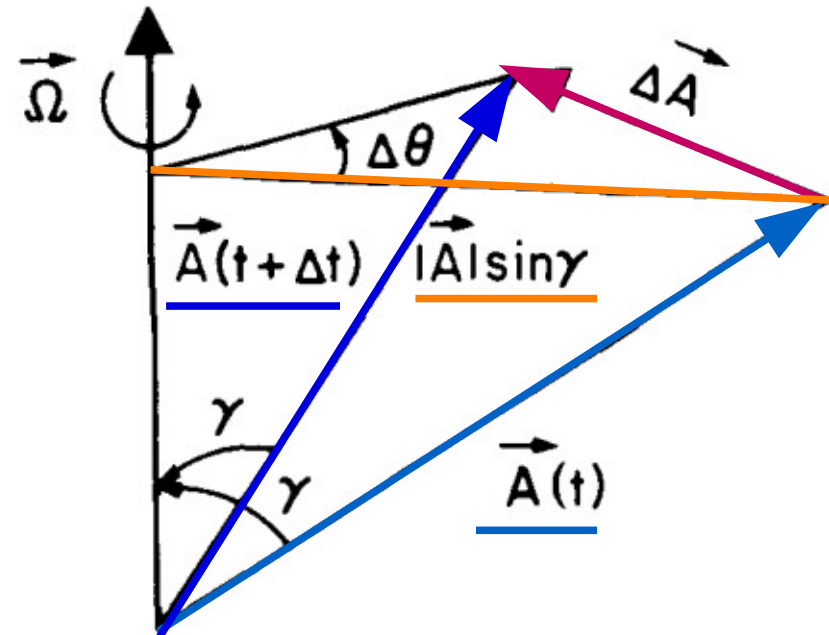
- Dividindo por Δt , obtemos a taxa de variação total do vetor \vec{A} , que pode ser escrita como

$$\frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \left(|\vec{A}| \sin \gamma \right) \underbrace{\frac{\Delta \theta}{\Delta t}}_{|\vec{\Omega}|} \frac{\vec{\Omega} \times \vec{A}}{|\vec{\Omega}| |\vec{A}| \sin \gamma}$$

Fonte: Pedlosky (1997)

- No limite infinitesimal ($\Delta t \rightarrow 0$), chegamos à seguinte expressão

$$\frac{D\vec{A}}{Dt} = \vec{\Omega} \times \vec{A}$$



- Ou seja, a taxa de variação do vetor observada de um referencial inercial num sistema físico em rotação é igual ao produto vetorial entre o vetor velocidade angular e o próprio vetor.

Referencial Não-Inercial

- Assim, demonstramos, que para um vetor com magnitude de velocidade constante, sua percepção de variação nos sistemas girante e inercial são

$$\left[\frac{D\vec{A}}{Dt} \right]_R = 0 \quad \text{e} \quad \left[\frac{D\vec{A}}{Dt} \right]_I = \vec{\Omega} \times \vec{A}.$$

- Se relaxarmos essa restrição e permitir variações na magnitude do vetor \vec{A} , a taxa de variação no sistema inercial será aquela percebida no sistema girante somada à variação percebida devido à rotação:

$$\left[\frac{D\vec{A}}{Dt} \right]_I = \left[\frac{D\vec{A}}{Dt} \right]_R + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

O Vetor Velocidade

- Considerando a relação derivada e o vetor posição \vec{x} de uma parcela de fluido oceânico que se move relativamente à Terra, temos que um observador no sistema inercial descreverá a variação de \vec{x} como

$$\left[\frac{D\vec{x}}{Dt} \right]_I = \left[\frac{D\vec{x}}{Dt} \right]_R + \vec{\Omega} \times \vec{x},$$

ou usando a definição de velocidade,

$$\vec{v}_I = \vec{v}_R + \Omega \times \vec{x}.$$

- Notem que enquanto a primeira parte é a velocidade relativamente à Terra, a segunda que tem módulo $\Omega |\vec{x}|$ e corresponde à velocidade tangencial (ou azimutal) devido à rotação do planeta.

O Vetor Aceleração

- Derivamos a expressão da velocidade Lagrangianamente para obter a expressão do vetor aceleração para obter

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{D\vec{v}_I}{Dt} \right]_I &= \left[\frac{D\vec{v}_R}{Dt} \right]_R + \underbrace{\left[\frac{D\vec{\Omega}}{Dt} \right]_R}_{\approx 0} \times \vec{x} \\
 &+ \underbrace{2\vec{\Omega} \times \vec{v}_R}_{ac. \text{ Coriolis}} + \underbrace{\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{x})}_{ac. \text{ centrípeta}} .
 \end{aligned}$$

- O segundo termo do lado direito é associado à precessão dos equinócios e pode ser desconsiderado em termos das escalas mais comuns de DFG. O terceiro depende do movimento. O quarto tem módulo $\Omega^2 R$, onde R é distância da parcela ao eixo de rotação.

De volta à Eq. Geral do Movimento

- Originalmente, escrevemos a Eq. Geral do Movimento utilizando quantidades do sistema inercial tal qual previsto pelas leis da mecânica clássica:

$$\left[\frac{D\vec{v}_I}{Dt} \right]_I = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \check{\mathcal{T}} + \vec{g}.$$

- Agora, reescrevemos o termo do vetor aceleração para considerar sua descrição em termos de quantidades do sistema girante:

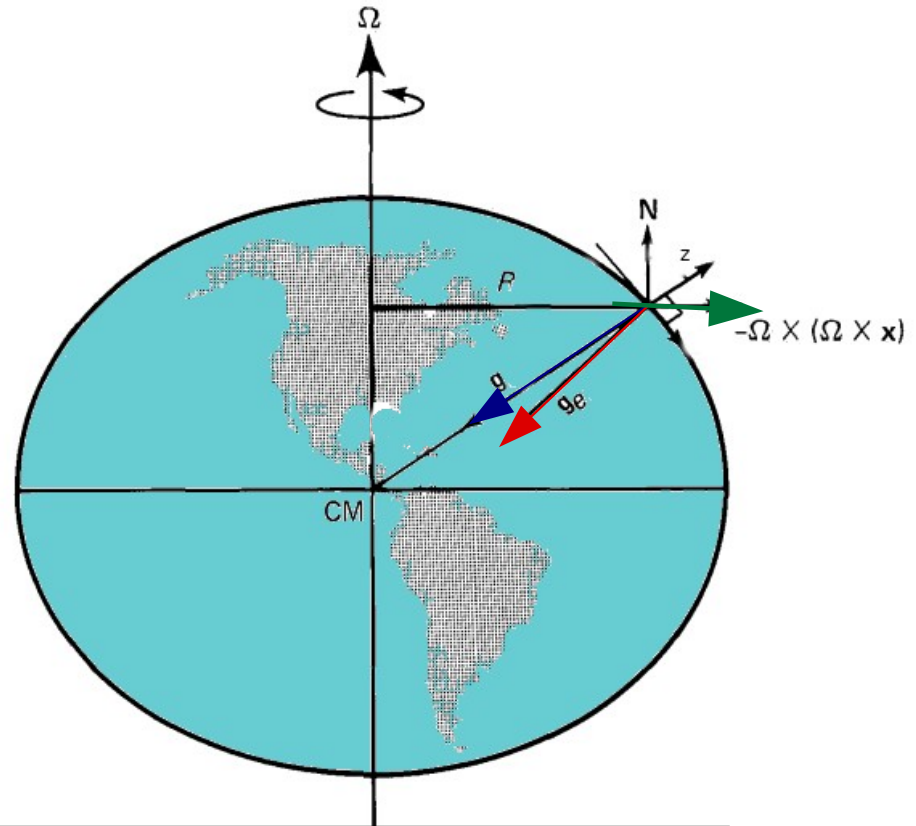
$$\left[\frac{D\vec{v}_R}{Dt} \right]_R + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_R = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \check{\mathcal{T}} + \vec{g} - \Omega \times (\vec{\Omega} \times \vec{x})$$



INSTITUTO
OCEANOGRÁFICO
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Força Gravitacional Efetiva

- A força centrífuga é somada à aceleração da gravidade Newtoniana para formar a gravidade efetiva. As diferenças entre \mathbf{g} e \mathbf{g}_e , como ilustra a figura são ínfimas. A força centrífuga é dinamicamente irrelevante.
- Assim, omitindo os índices \mathbf{R} podemos reescreva a eq. geral do movimento como



$$\frac{D\vec{v}}{Dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \check{\mathcal{T}} + \underbrace{\vec{g} - \Omega \times (\vec{\Omega} \times \vec{x})}_{\vec{g}_e}$$

A Equação Geral do Movimento no plano β

- Por fim reescrevamos a força de Coriolis usando a aproximação do plano β para obtermos

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} + f\vec{k} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \frac{1}{\rho_0}\nabla \cdot \check{\mathcal{T}} + \vec{g}_e.$$

- Recordamos aqui que f sobre a aproximação linear no plano tangente local é dado por

$$f = f_0 + \beta y.$$

- A seguir, exploraremos a forma que as forças do gradiente de pressão e de viscosidade tomam no oceano (e também na atmosfera).

A Força do Gradiente de Pressão no Oceano

- A força do gradiente de pressão é uma das mais importantes forças atuantes nas parcelas de fluido no oceano.
- A **força do gradiente vertical de pressão** é parte do **balanço hidrostático** na componente vertical da EGM.
- Já a **força do gradiente horizontal de pressão** participa do estado básico de equilíbrio dinâmico dos oceanos, o chamado **movimento geostrófico**.
- A força do gradiente de pressão horizontal atua de duas formas no oceano:
 - **Barotropicamente** – por **variações de altura da superfície do mar**, quase sempre causada pelo vento e pela presença de barreiras continentais ou topográficas. É um processo 2D.
 - **Baroclinicamente** – por **variações laterais de densidade interiores à coluna de água** e que variam podem variar demarcadamente na vertical. É um processo totalmente 3D.
- *Mas como identificar estas duas importantes porções na expressão da força do gradiente de pressão?*

A Força do Gradiente de Pressão no Oceano

- Para identificá-las, partamos do **balanço hidrostático**, que sabemos ser o balanço dominante na componente vertical da EGM:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

- Agora, integremos esta equação entre um profundidade z qualquer e a superfície livre do oceano $\eta(x,y,t)$ e tomemos o gradiente horizontal:

$$\nabla_H \int_{p(x,y,z,t)}^{p_a(x,y,t)} d\tilde{p} = -\nabla_H \int_z^{\eta(x,y,t)} \rho(x,y,z,t) g dz$$

- Assim,

$$\nabla_H p = \nabla_H p_a + \underbrace{[\rho g]_{z=\eta}}_{\approx \rho_0 g} \nabla_H \eta + g \int_z^{\eta(x,y,t)} \nabla_H \rho(x,y,z,t) dz$$

A Força do Gradiente de Pressão no Oceano

- Visto que queremos entender o papel dos gradientes laterais de densidade no gradiente de pressão, torna-se oportuno colocar o operador gradiente dentro da integral vertical.
- No entanto, como um dos limites da integração definida é função de x e y , urge que apliquemos a Regra de Leibniz:

No cálculo, a **regra de Leibniz** para a integral paramétrica, em homenagem a Gottfried Leibniz, afirma que para um integrante da forma

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt,$$

Fonte: Wikipedia (2020)

onde o derivado deste é expresso como integrante $-\infty < a(x), b(x) < \infty$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \right) = f(x, b(x)) \cdot \frac{d}{dx} b(x) - f(x, a(x)) \cdot \frac{d}{dx} a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt,$$

onde o **derivado parcial** indica que no interior do integrante, somente a variação de $f(x, t)$ com x é considerado em tomar a derivada.

- Aplicando-a obtemos

$$\nabla_{HP} = \nabla_{HP_a} + \underbrace{[\rho g]_{z=\eta}}_{\approx \rho_0 g} \nabla_H \eta + g \int_z^{\eta(x,y,t)} \nabla_H \rho(z, y, z, t) dz.$$

A Força do Gradiente de Pressão no Oceano

- Para sairmos da expressão do gradiente horizontal de pressão para a força do gradiente horizontal de pressão basta que multipliquemos a equação anterior por $1/\rho_0$:

$$-\frac{1}{\rho_0} \nabla_H p = \underbrace{-\frac{1}{\rho_0} \nabla_H p_a}_{(I)} \underbrace{-g \nabla_H \eta}_{(II)} \underbrace{-\frac{g}{\rho_0} \int_z^\eta \nabla_H \rho(x, y, z, t) d\tilde{z}}_{(III)}$$

onde:

- (I)** Força do gradiente de pressão do barômetro invertido;
- (II)** Força do gradiente de pressão barotrópico; e
- (III)** Força do gradiente de pressão baroclínico.
- O barômetro invertido não tem conotação dinâmica e é usual representarmos o gradiente da pressão oceanográfica (ou seja, forças atuantes na água do mar)
- A seguir, buscaremos entender o efeito das comp. barotrópica e baroclínica.

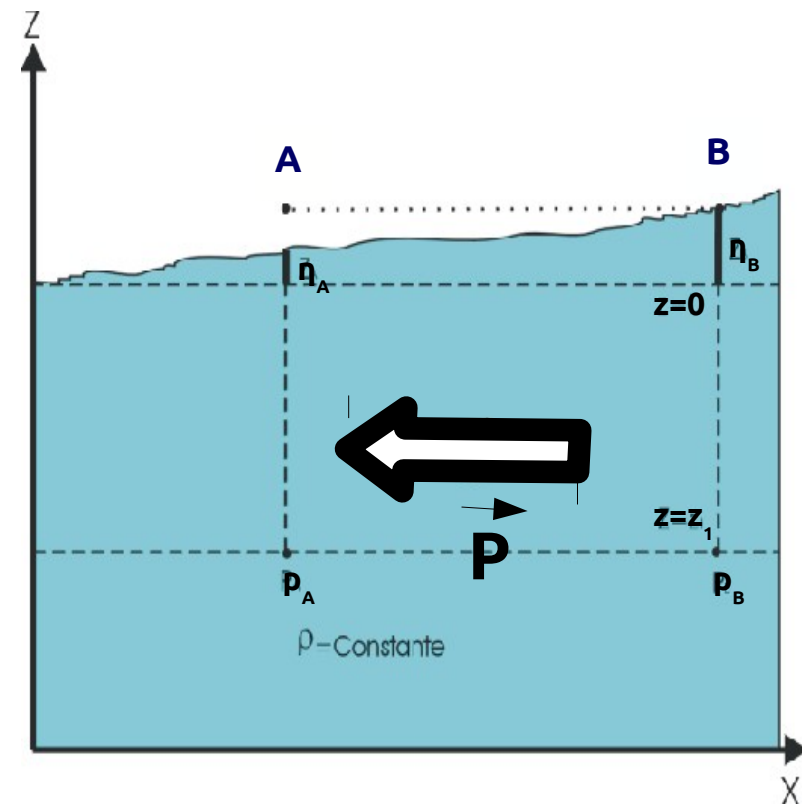
Força do Gradiente Barotrópico de Pressão

- Para exemplificarmos essa força, assumemos um exemplo simples em que $\eta = \eta(x)$ apenas e que $\rho = \text{constante}$.
- Pela equação hidrostática,
- **Estação A:** $p_A = \rho_0 g (z_I + \eta_A)$
- **Estação B:** $p_B = \rho_0 g (z_I + \eta_B)$
- **Diferença de pressão entre A e B:**

$$\Delta p = \rho_0 g (\eta_B - \eta_A)$$

$$= \rho_0 g \Delta \eta$$

- Logo, $\Delta p > 0$ (positivo para leste)
- O gradiente de pressão é **positivo**. Já força do gradiente é **negativa**, apontando para oeste.



Força do Gradiente Barotrópico de Pressão

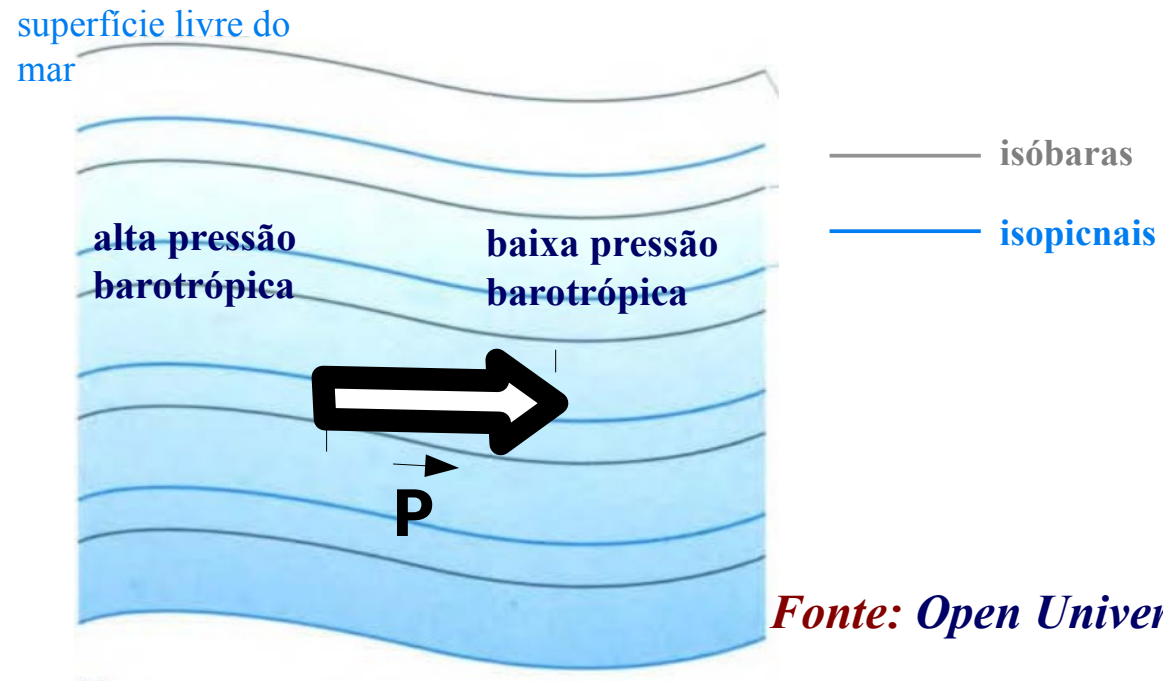
- Devemos observar que a perturbação de pressão barotrópica independe da profundidade, o que torna o problema abordando essa **dinâmica estritamente bidimensional** na ausência de atrito.
- As Equações de Euler sob essas considerações são usualmente referidas na literatura como o conjunto das “**Equações de Águas Rasas**”. São amplamente utilizadas por sua praticidade em estudos teóricos de fluidos e matemática aplicada:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} + f\vec{k} \times \vec{v} = -g\nabla_H\eta.$$

- No exemplo dado, forçamos a aproximação do oceano homogêneo ($\rho=\rho_0$), pois assim há apenas a avaliação das isóbaras com a isopicnal que demarca a interface ar-mar.
- Mas, como seriam as condições barotrópicas no oceano real, que é quase sempre bastante estratificado?

Força do Gradiente Barotrópico de Pressão

- No caso do oceano estratificado, é a situação em que as isóbaras são paralelas à superfície do oceano, assim como as isopicnais são paralelas às isóbaras:



- Essa configuração é chamada pelo genial Adrian Gill em seu livro de 1982 como configuração auto-barotrópica, onde $\rho = \rho(p)$.

Força do Gradiente Baroclínico de Pressão

- Para simplificarmos essa força, assumemos em nosso exemplo que $\eta=0$ apenas e que $\rho=\rho(x,z)$.
- Pela equação hidrostática,

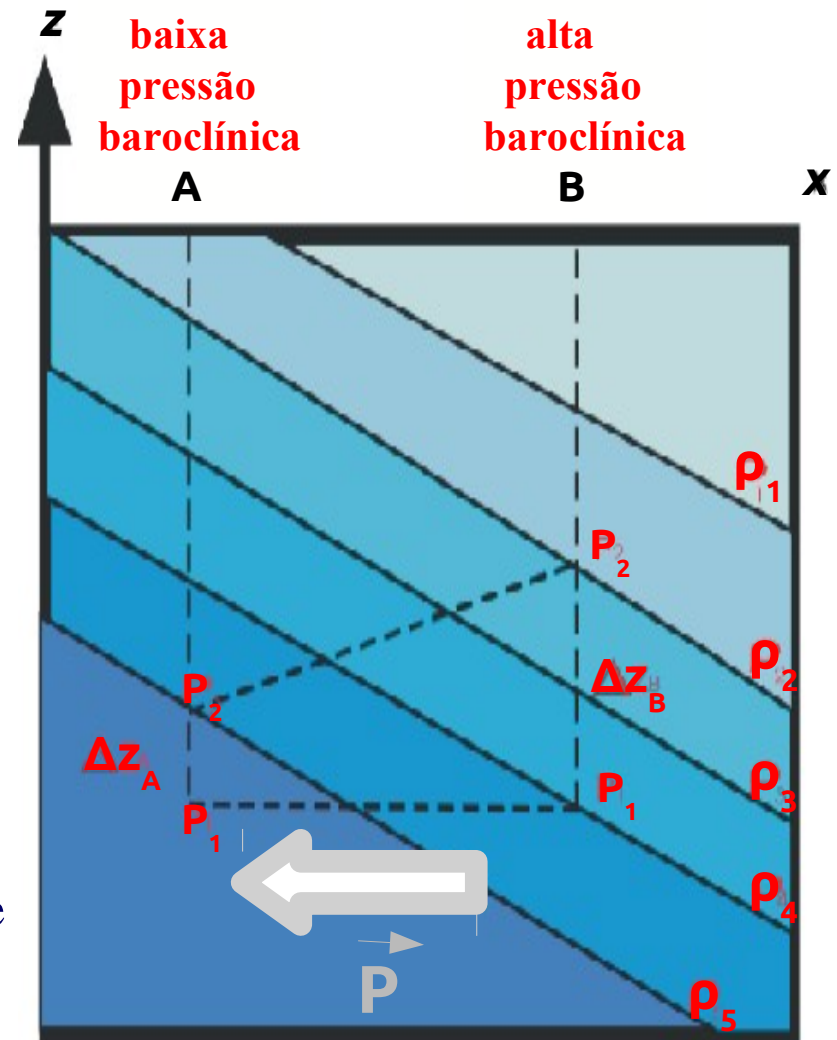
Estação A: $\Delta p_A = p_1 - p_2 = \bar{\rho}_A g \Delta z_A$

Estação B: $\Delta p_B = p_1 - p_2 = \bar{\rho}_B g \Delta z_B$

- Pela definição de isóbara, é necessário que $\Delta p_A = \Delta p_B$.

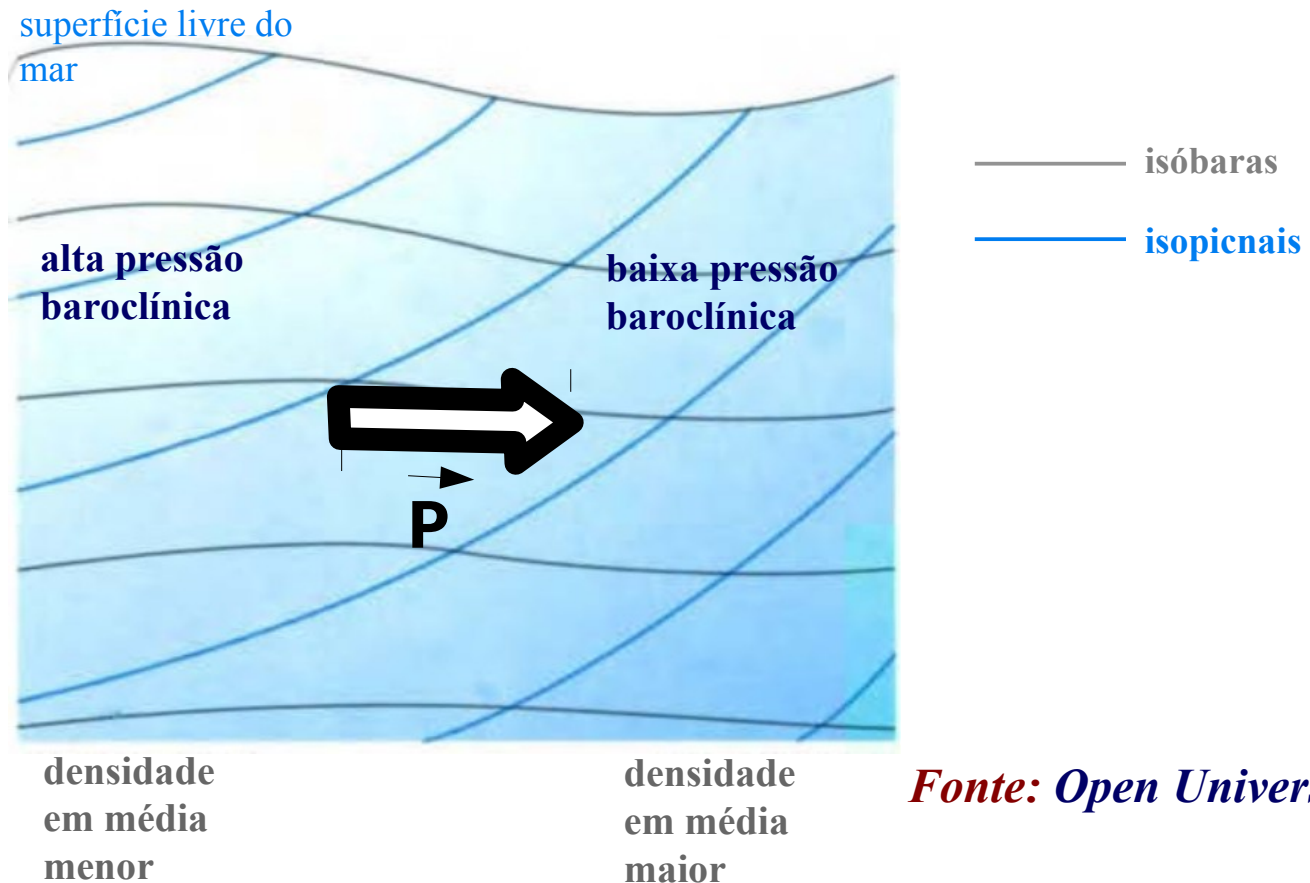
- Como consequência, $\bar{\rho}_A g \Delta z_A = \bar{\rho}_B g \Delta z_B$,

- Se temos que $\bar{\rho}_A > \bar{\rho}_B$, é necessário que $\Delta z_A < \Delta z_B$ obrigatoriamente.



Força do Gradiente Baroclínico de Pressão

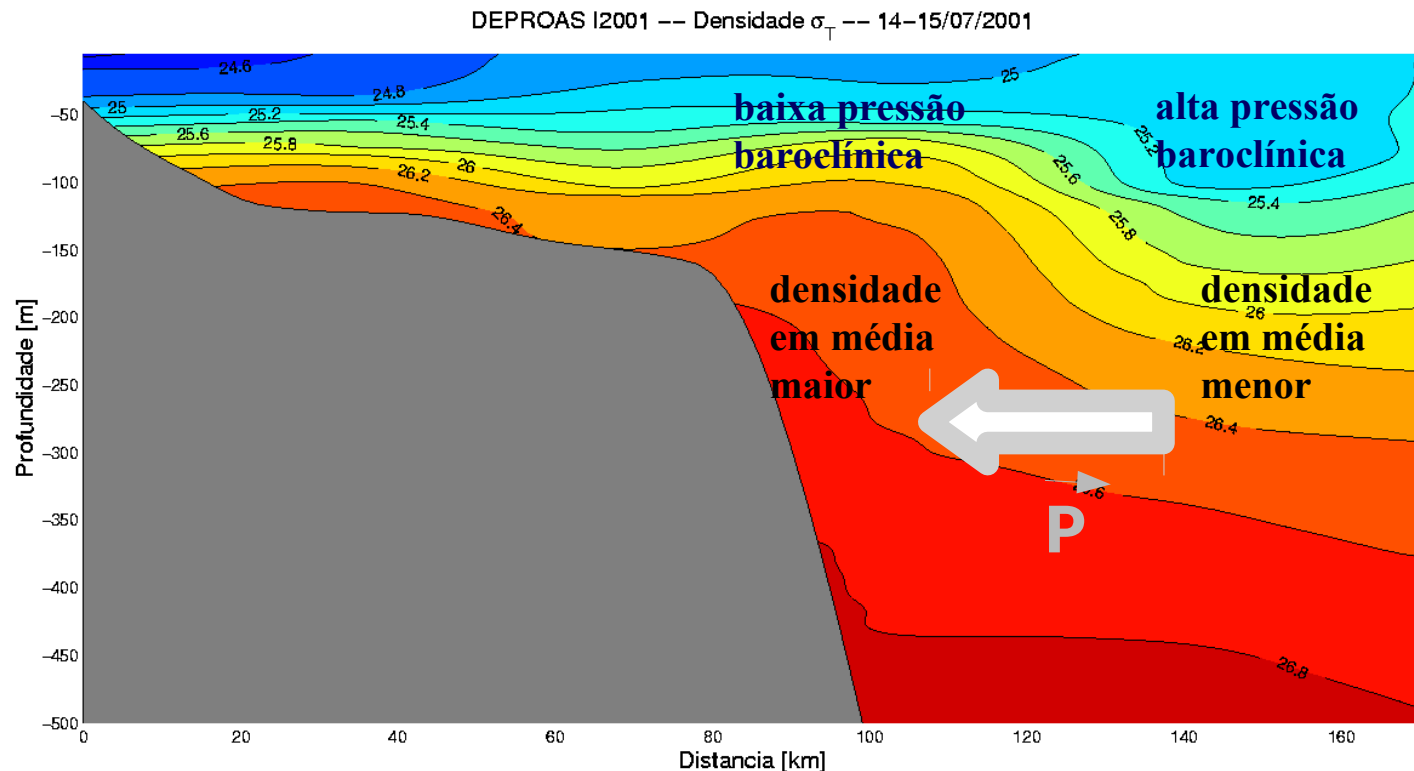
- O resultado do fenômeno descrito anteriormente é que as isóbaras se inclinam relativamente às isopicnais numa situação de baroclinidade.



Fonte: Open University (2001)

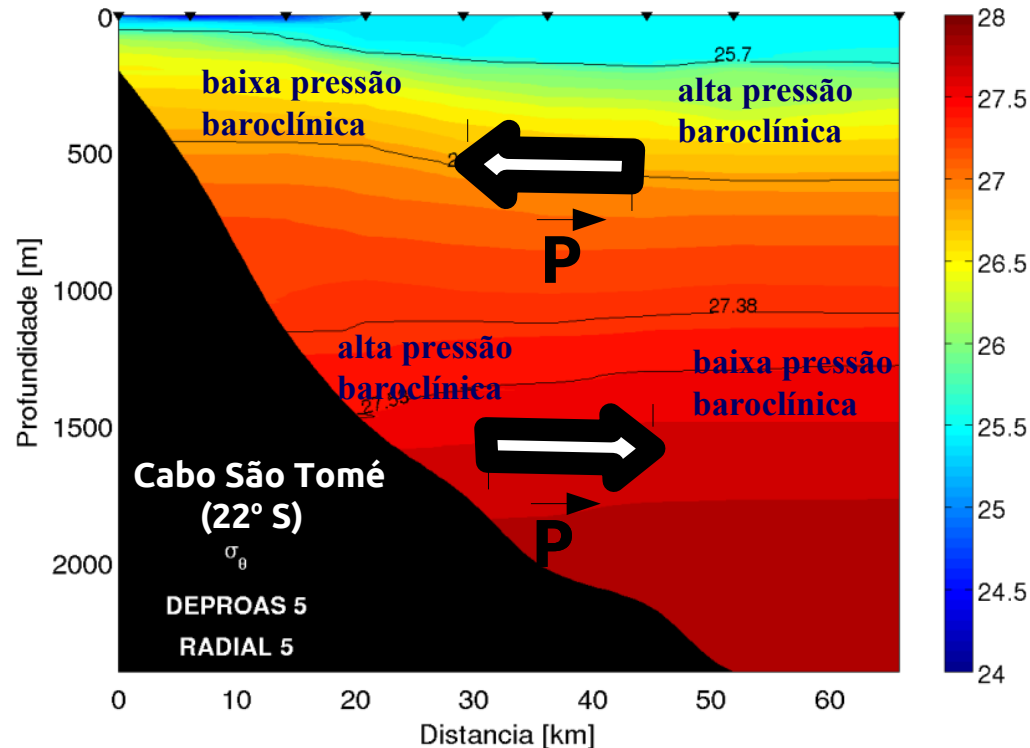
Força do Gradiente Baroclínico de Pressão

- É difícil calcular o sinal efetivo da perturbação de pressão por dados hidrográficos, mas é possível inferirmos onde estão altas e baixas baroclínicas simplesmente examinando a configuração de isopícnais numa seção de densidade.



Força do Gradiente Baroclínico de Pressão

- O gradiente horizontal baroclínico de pressão varia tridimensionalmente. É possível haver várias inversões na direção vertical, que como veremos mais tarde, implicam em reversão no sentido de escoamento das grandes correntes.
- Um exemplo clássico é a inversão do gradiente de pressão em nível intermediário que ocorre ao largo da costa sudeste do Brasil:



Semântica: Barotrópico vs. Baroclínico

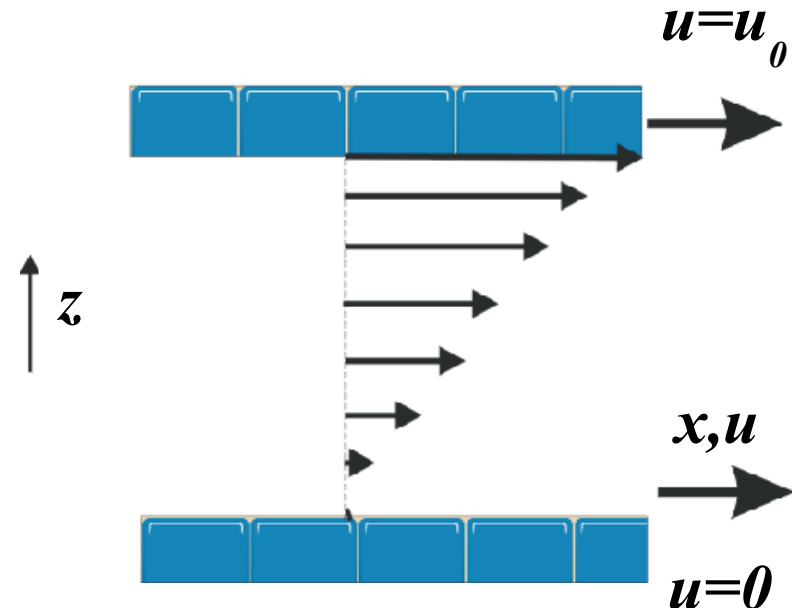
- O que significam “barotrópico” e “baroclínico” no *stricto sensu*?
- O sufixo “**trópico**” para adjetivo e “tropismo” para substantivo significa “na direção de”, vide o fototropismo das plantas. No caso de **barotrópico**, o significado é **na (mesma) direção da pressão (ou das isóbaras)**.
- Já o sufixo “**clínico**” para adjetivo e “clina” para substantivo significa inclinação, vide termoclina, termo do jargão oceanográfico associado à região inclinada do perfil de temperatura do oceano aberto. Assim, **baroclínico** significa **inclinado relativamente à pressão (ou às isóbaras)**.

Forças de Viscosidade

- Viscosidade é o termo que se aplica ao efeito de atrito nos fluidos. **Forças de viscosidade são, portanto, forças de atrito.**
- **As forças de viscosidade no fluido são de duas naturezas: molecular e turbulenta.** No oceano e na atmosfera, prevalecem as forças de viscosidade turbulenta.
- No entanto, é necessário que entendamos as duas formas.
- Também discutiremos a afirmação usual de que **a água do mar é um fluido Newtoniano** e o que isto significa.
- O fundamento das forças de viscosidade reside na lei de viscosidade de Newton, não por acaso. E é o que veremos a seguir.

A Lei da Viscosidade de Newton

- Sir Isaac Newton realizou o um experimento simples para medir a resistência do fluido a fluir na presença de contornos sólidos.
- Num tanque de fundo plano, arrastou uma placa de área A sobre sua superfície com velocidade constante u_0 até que se estabelecesse um escoamento estacionário laminar.
- Este escoamento apresentou um cisalhamento linear entre $z=0$ e $z=-H$.
- Newton testou várias velocidades na placa superior e reparou que a variação linear se dava entre a velocidade do fluido sob a placa [$u(0) \approx u_0$] e junto ao fundo [$u(-H) \approx 0$].
- Também observou que a velocidade do fluido junto aos contornos sólidos era aproximadamente a própria dos contornos sólidos!



A Lei da Viscosidade de Newton

- Newton, então, observou que a força necessária para manter o escoamento estacionário era diretamente proporcional à área da placa \mathcal{A} e à velocidade u_0 , desta, assim como era inversamente proporcional à distância entre os dois contornos sólidos do tanque. Ou seja,

$$\begin{aligned}\vec{F} &\propto \mathcal{A} \frac{u_0}{H} \vec{i} \\ &\propto \mathcal{A} \left[\frac{u_0 - 0}{0 - (-H)} \right] \vec{i} \\ &\propto \mathcal{A} \frac{\Delta u}{\Delta z} \vec{i} .\end{aligned}$$

- Que pode ser reescrita como
- ou como
- Newton propôs-se reescrever essa força por unidade de área, o que quer dizer em termos de tensão tangencial $\boldsymbol{\tau}$, que está associada ao cisalhamento vertical do escoamento estacionário laminar.

A Lei da Viscosidade de Newton

- Em termos de magnitude, chegamos à definição da força e da tensão tangencial associada, dadas pela

força

$$F \propto A \frac{\Delta u}{\Delta z}$$

e pela tensão

$$\tau \propto \frac{\Delta u}{\Delta z}$$

- Usando um coeficiente de proporcionalidade, obtemos

$$\tau = \mu \frac{\Delta u}{\Delta z}$$

- O coeficiente de proporcionalidade μ é conhecido como **coeficiente dinâmico de viscosidade molecular** e tem unidades de $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$.
- Fluidos que obedecem essa lei são chamados de **fluidos Newtonianos**. Todos os gases e a maioria dos fluidos são dessa natureza, ainda que aproximadamente. A água do mar não é exceção.

A Lei da Viscosidade de Newton

- Fazendo $\Delta z \rightarrow 0$, a expressão para a tensão pode ser reescrita como

$$\tau^{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z},$$

onde atribuímos dois índices à tensão. O primeiro índice indica a direção onde a tensão é aplicada, o segundo se relaciona com a direção do cisalhamento. Assim, trata-se de uma tensão aplicada na direção zonal devido ao cisalhamento vertical da corrente.

- Portanto, é natural presumir que podemos ter uma tensão aplicada na direção zonal devido também aos cisalhamento zonal e meridional, respectivamente:

$$\tau^{xx} = \mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

e

$$\tau^{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}.$$

O Tensor das Tensões Tangenciais

- Analogamente, é possível haver tensões aplicadas nas direções vertical e meridional devido a cisalhamento das correntes nas três direções cartesianas.
- Logo, generalizando, podemos definir o tensor das tensões tangenciais dado por

$$\check{\tau} = \begin{pmatrix} \tau^{xx} & \tau^{xy} & \tau^{xz} \\ \tau^{yx} & \tau^{yy} & \tau^{yz} \\ \tau^{zx} & \tau^{zy} & \tau^{zz} \end{pmatrix} .$$

- De uma forma mais compacta, o tensor pode ser escrito como

$$\check{\tau} = \mu \nabla \vec{v} .$$

De volta à EGM

- Mostramos as forças de viscosidade molecular na EGM como a divergência do tensor das tensões tangenciais. Agora, podemos utilizar a lei de Newton e reescrever esse termo apenas em termos de grandezas vetoriais:

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \check{\tau} = \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{v}) .$$

- Considerando o coeficiente dinâmico de viscosidade molecular μ isotrópico, podemos retirá-lo da operação divergente e chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \check{\tau} &= \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \vec{v} \\ &= \nu \nabla^2 \vec{v} . \end{aligned}$$

- Aqui, ν é o coeficiente cinemático de viscosidade.

De volta à EGM

- Reescrevemos a equação de Navier-Stokes usando a lei da viscosidade de Newton para obter

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} + f\vec{k} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{v} + \vec{g}_e.$$

- O coeficiente cinemático de viscosidade molecular depende da espécie do fluido. Este é função do espaço intermolecular e do movimento browniano. Portanto, temperatura o afeta.
- Os valores de ν para a água do mar na faixa de temperatura entre 0° e 30° C é de $0,6 \times 10^{-7}$ a $1,8 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

O Número de Reynolds

- O número de Reynolds Re é usado para determinar se o escoamento é laminar ou turbulento.
- Consiste na razão de dois termos da EGM: o advectivo e o de difusão molecular. Ou seja, é razão entre a não-linearidade e formação de vórtices e turbilhonamento e a viscosidade que pode frear e organizar estes.
- Assim, Re é dado por

$$Re = \mathcal{O} \left(\frac{\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}}{\nu \nabla^2 \vec{v}} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{UL}{\nu} \right)$$

- Em problemas de engenharia é usual utilizar a seguinte classificação:
- Escoamento **Laminar** $Re < 2000$
- Escoamento **Crítico** $2000 < Re < 4000$
- Escoamento **Turbulento** $Re > 4000$

O Número de Reynolds

- A tabela abaixo mostra que o **oceano em todas as escalas é intrinsecamente turbulento!** (Embora seja possível haver movimentos laminares de pequena escala em situações específicas)

<i>Escalas</i>	<i>L</i>	<i>U</i>	<i>Re</i>
Pequena	<1 km	1 m s ⁻¹	10 ⁹
Submeso	1-10 km	1 m s ⁻¹	10 ⁹ -10 ¹⁰
Meso	100 km	0,1 m s ⁻¹	10 ¹⁰
Grande	1000 km	0,01 m s ⁻¹	10 ¹⁰

- A pergunta que se põe é: *como estudar os escoamentos turbulentos? Como descrever as correntes oceânicas se estas são turbulentas?*
- A resposta é: ***precisamos usar uma abordagem estatística***, que foi aliás sugerida pelo próprio Osborne Reynolds. (Ah, e o número leva seu nome por ter sido o cientista que o popularizou. Quem criou ***Re*** foi George Stokes.)

As Tensões de Reynolds

- Por simplicidade, ao invés de considerarmos toda a EGM, tomemos apenas a sua **componente zonal** dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u .$$

- Para realizar a chamada **promediação de Reynolds** é usual reescrevermos as componentes da EGM com os termos advectivos na forma de fluxo.
- Ou seja, é necessário reescrevermos os termos inerciais como a divergência do fluxo de momentum zonal:

$$\nabla \cdot (\vec{v}u) \implies \text{divergência do fluxo de momentum zonal}$$

As Tensões de Reynolds

- Para tanto, basta fazermos:

$$\frac{\partial}{\partial x}(uu) = u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x}$$

+

$$\frac{\partial}{\partial y}(vu) = v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y}$$

+

$$\frac{\partial}{\partial z}(wu) = w \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(uu) + \frac{\partial}{\partial y}(vu) + \frac{\partial}{\partial z}(wu) &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ &+ u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &= 0 \text{ pela continuidade} \end{aligned}$$

As Tensões de Reynolds

- Vamos agora desenvolver a **promediação de Reynolds**, na qual decompos todas as incógnitas numa média temporal e num desvio desta média:

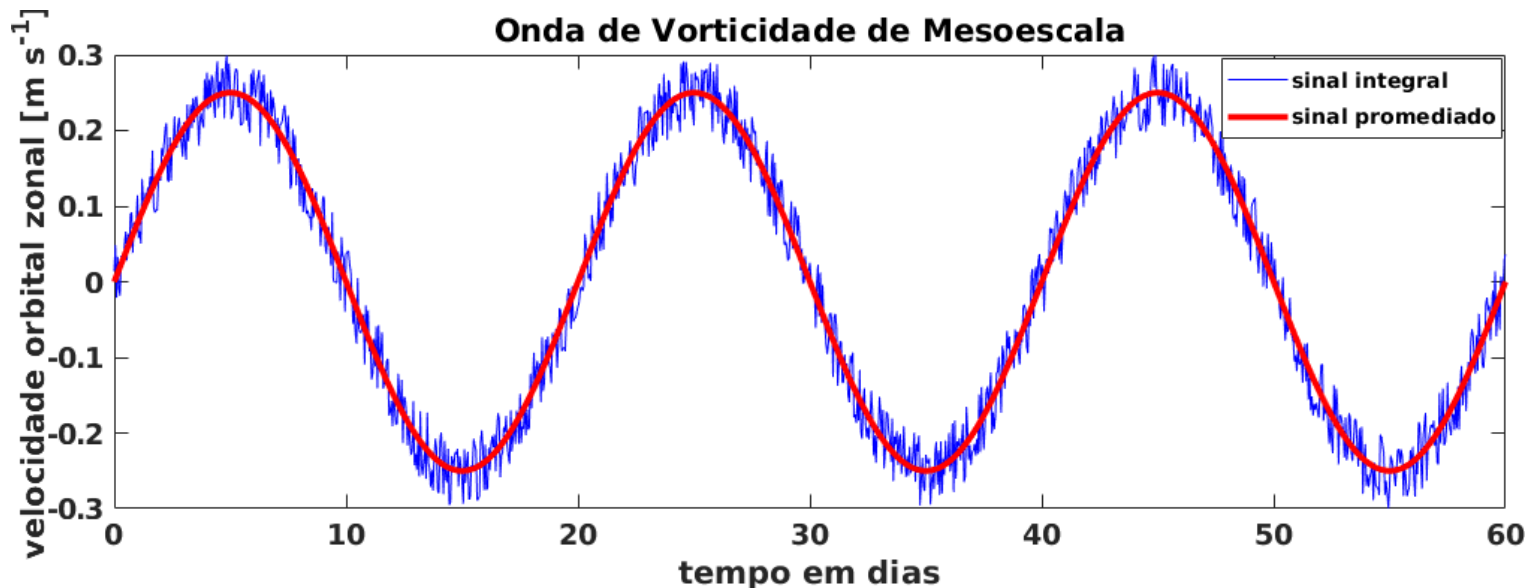
$$u = \bar{u} + u'.$$

- Mas o que seria essa média? Seria uma média temporal do escoamento para eliminar as flutuações mais rápidas. Esta média deve ser calculada num intervalo de tempo suficiente para que seja significativa estatisticamente. No entanto, a escala de tempo dessa promediação (T_{Re}) deve ser bem menor que a escala de tempo característica da evolução do escoamento (T). Logo,

$$\bar{u} = \frac{1}{T_{Re}} \int_0^{T_{Re}} u dt \quad \text{onde } T_{Re} < T.$$

As Tensões de Reynolds

- Vejamos um **exemplo oceanográfico** do que é esta promediação. Consideremos ter um fundeio correntográfico em 250 m de profundidade sobre a Elevação do Rio Grande e vimos passar **ondas de Rossby se propagando para oeste** como sinal dominante.



- Existem, no entanto, movimentos associados a menores escalas também registrado pelo correntógrafo. São como que desvios pequenos relativamente ao sinal dominante.
- Visto que nosso interesse é de mesoescala, procedemos à promediação observando que a escala de tempo T da onda de Rossby é de **22 dias** enquanto as dos desvios de menor escala T_{Re} é da ordem de de pouco mais de **18 horas**, por exemplo.

As Tensões de Reynolds

- De volta à promediação, examinemos os termos quadráticos associados à advecção, aplicando a definição da média, por exemplo:

$$\begin{aligned}(vu) &= (\bar{v} + v')(\bar{u} + u') \\ &= \bar{v}\bar{u} + \bar{v}u' + v'\bar{u} + v'u' .\end{aligned}$$

- Agora tomemos a média desse produto para obter

$$\begin{aligned}\overline{(vu)} &= \overline{\bar{v}\bar{u}} + \overline{\bar{v}u'} + \overline{v'\bar{u}} + \overline{v'u'} \\ &= \bar{v}\bar{u} + \bar{v}\underbrace{\overline{u'}}_{=0} + \underbrace{\overline{v'}}_{=0}\bar{u} + \overline{v'u'} \\ &= \bar{v}\bar{u} + \overline{v'u'} .\end{aligned}$$

- Notemos que $u' = u - \bar{u} \implies \overline{u'} = 0$ e também $\bar{\bar{u}} = \bar{u}$ e $\overline{v'u'} \neq 0$.

As Tensões de Reynolds

- Como vimos, a média do produtos dos desvios não é zero. Se promediarmos toda a componente zonal da equação do movimento, obtemos

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{w}\bar{u}) - f\bar{v} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$$

$$+ \nu \nabla^2 \bar{u} - \frac{\partial}{\partial x} \overline{u'u'} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'u'} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'u'}$$

- Os últimos 3 termos são chamados de **tensões de Reynolds**.
- Estes termos atuam de forma semelhante ao atrito molecular, no entanto, ao invés de transferirem momentum através de choque de moléculas em movimento browniano, a transferência na turbulência é macroscópica.
- Parcelas de fluido se chocam e trocam momentum, de uma forma muito mais vigorosa e eficiente que a viscosidade molecular!

Os Coeficientes de Viscosidade Turbulenta

- Stokes e Reynolds em função da troca de momentum parametrizar o efeito da turbulência em analogia ao experimento de viscosidade molecular de Newton.
- Entretanto, esses coeficientes dependem do estado do fluido (em termos de turbulência) e não da espécie deste.
- No caso da água do mar, os coeficientes tampouco podem ser isotrópicos visto que a estratificação inibe a troca de momentum na vertical. Este processo é muito mais efetivo na horizontal.

$$-\overline{u'u'} = \frac{\tau_{Re}^{xx}}{\rho_0} = A_H \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$$

$$-\overline{v'u'} = \frac{\tau_{Re}^{xy}}{\rho_0} = A_H \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

$$-\overline{w'u'} = \frac{\tau_{Re}^{xz}}{\rho_0} = A_V \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

$$10 < A_H < 10^4 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$$

$$10^{-4} < A_V < 10^{-1} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$$

Fonte: Pedlosky (1979)

A Equação Geral do Movimento Em Oceanografia

- Finalmente, estamos aptos a escrever a EGM em sua forma final para as aplicações em Oceanografia:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{w}\bar{u}) - f\bar{v} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + (\nu + A_H) \nabla_H^2 \bar{u} + (\nu + A_V) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}$$

- A partir do próximo tema, desprezaremos os barras e consideraremos que sempre realizamos a promediação de Reynolds.

Análise de Escalas da Equação Geral do Movimento

O Oceano É Sempre Turbulento

- Neste tema, abordaremos a análise de escalas e definição dos números adimensionais formalmente, bem como as principais aproximações na Equação Geral do Movimento.
- Como discutido no tema anterior, estamos cientes de que **o oceano é sempre turbulento**, faz-se necessária a promediação de Reynolds e todas as quantidades constantes da EGM são médias de Reynolds. Assim, omitiremos a partir de agora a “barra” em cima das incógnitas.

As Componentes Escalares da EGM

- As componentes zonal, meridional e vertical da EGM sob as aproximações do plano β e de Boussinesq são:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$+ (\nu + A_H) \nabla_H^2 u + (\nu + A_V) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$+ (\nu + A_H) \nabla_H^2 v + (\nu + A_V) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{g}{\rho_0} \rho$$

$$+ (\nu + A_H) \nabla_H^2 w + (\nu + A_V) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

A Insignificância das Forças de Viscosidade Molecular

- As três componentes da EGM apresentam termos ligados às forças de viscosidade molecular e turbulenta. Em particular, dada a anisotropia dos coeficientes cinemáticos, os operadores diferenciais associados a estas são

$$\underbrace{(\nu + A_H)}_{(10^{-6} + 10^2)} \nabla_H^2 \quad \text{e} \quad \underbrace{(\nu + A_V)}_{(10^{-6} + 10^{-2})} \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

- Portanto,

$$\approx A_H \nabla_H^2 \quad \text{e} \quad A_V \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

- Assim, a partir de agora, ignoraremos a participação das forças de viscosidade molecular se comparadas com as forças de viscosidade turbulenta.

Análise de Escala da Componente Zonal da EGM

- A componente zonal toma, então, a forma final de

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\frac{U}{T}} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}}_{\frac{U^2}{L}} - \underbrace{fv}_{f_0 U} = - \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}}_{\frac{P}{\rho_0 L}} + \underbrace{A_H \nabla_H^2 u}_{\frac{A_H U}{L^2}} + \underbrace{A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{\frac{A_V U}{H^2}}$$

- Em vermelho, estão a ordem de grandeza em termos das escalas típicas e valores típicos dos parâmetros.
- Para simplificar as equações é necessário comparar o “tamanho” de um termo relativamente a outro.
- A maioria dos números adimensionais em GFD advém de razões entre os termos das componentes escalares da EGM.
- Assim, definiremos e quantificaremos os termos para submesoescala, mesoescala e grande escala.

Números Adimensionais

- $$\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{fv} = (f_0 T)^{-1} = Ro_T$$

Número de Rossby local

- $$\frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{fv} = \frac{U}{(f_0 L)} = Ro$$

Número de Rossby advectivo

- $$\frac{A_H \nabla_H^2 u}{fv} = \frac{A_H}{(f_0 L^2)} = E_H$$

Número de Ekman Horizontal

- $$\frac{A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}{fv} = \frac{A_V}{(f_0 H^2)} = E_V$$

Número de Ekman Vertical

Números Adimensionais e Escalas

$$\frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{A_H \nabla_H^2 u} = \frac{UL}{A_H} = \frac{Ro}{E_H} = Re_H$$

$$\frac{w \frac{\partial u}{\partial z}}{A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} = \frac{UH}{A_V} = \delta \frac{Ro}{E_V} = Re_V$$

Número de Reynolds Turbulento Horizontal

Número de Reynolds Turbulento Vertical

<i>Escala</i>	<i>L [m]</i>	<i>U [m s⁻¹]</i>	<i>T [s]</i>	<i>H [m]</i>
<i>Pequena</i>	10^2	1	10^2	10^3
<i>Submeso</i>	10^4	1	10^3	10^3
<i>Meso</i>	10^5	10^{-1}	10^6	10^3
<i>Grande</i>	10^6	10^{-2}	10^8	10^3

Parâmetros:

$$f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

$$A_H = 10^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$A_V = 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Análise por Escalas

<i>Escala</i>	Ro_T	Ro	E_H	E_V	Re_H	Re_V
<i>Pequena</i>	10^2	10^2	10^2	10^{-4}	10	10^7
<i>Submeso</i>	1	1	10^{-2}	10^{-4}	10^2	10^4
<i>Meso</i>	10^{-2}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-4}	10^2	1
<i>Grande</i>	10^{-4}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-4}	10^2	1

- Considerando, $H=1000$ m, os termos de atrito vertical não são relevantes;
- Notemos que as meso e grande escalas são de movimentos quase-equilibrados. Isso não vale para a pequena e submeso.

Os Balanços da EGM zonal por Escalas

*Movimentos
Acelerados:*

Pequena

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + A_H \nabla_H^2 u$$

Submeso

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$

*Movimentos em
Quase-Equilíbrio:*

Meso

$$- f v = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Grande

$$- f v = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$

A Escala da Pressão Geostrófica

Vimos em aulas passadas que:

$$p(x, y, z, t) = \underbrace{\bar{p}(z)}_{\text{hidrostática}} + \underbrace{\tilde{p}(x, y, z, t)}_{\text{geostrófica}}$$

E agora,

$$-\underbrace{fv}_{f_0U} = -\frac{1}{\underbrace{\rho_0}_{\frac{\tilde{P}}{\rho_0 L}}}\frac{\partial p}{\partial x},$$

Escala da pressão geostrófica

Portanto,

$$\tilde{P} = (\rho_0 L) f_0 U$$

<i>Escala</i>	\tilde{P} (Pa)
Meso	10^3
Grande	10^3

Análise de Escala da Componente Vertical da EGM

- A componente vertical toma, então, a forma completa e final de

$$\underbrace{\frac{\partial w}{\partial t}}_{\frac{HU}{LT}} + \underbrace{u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}}_{\frac{HU^2}{L}} = - \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z}}_{\frac{P}{\rho_0 L}} - \underbrace{\frac{\rho'}{\rho_0} g}_{\frac{\Delta \rho g}{\rho_0}} + \underbrace{A_H \nabla_H^2 w}_{\frac{H A_H U}{L L^2}} + \underbrace{A_V \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}_{\frac{H A_V U}{L H^2}}$$

- Em vermelho, estão a ordem de grandeza em termos das escalas típicas e valores típicos dos parâmetros.
- Note que subtraímos da equação os termos relacionados às pressão e densidade puramente hidrostáticos, pois estes se cancelam de forma exata.
- Importante reparar que a escalas das perturbação da pressão P' e as da pressão geostrófica \tilde{P} só serão coincidentes caso o escoamento esteja em situação de quase-equilíbrio (ou quase-balanço).
- Assim, $P' = \tilde{P}$ apenas em mesoescala e grande escala.

Razões entre os termos

- As razões entre os termos da derivada material e de atrito turbulento relativamente ao de empuxo dependem do parâmetro entre parênteses, que é função da razão de aspecto δ e do número de Boussinesq ϵ :

$$\frac{\frac{\partial w}{\partial t}}{\frac{\rho' g}{\rho_0}} = \left(\frac{\delta}{\epsilon g} \right) \frac{U}{T} \quad ; \quad \frac{A_H \nabla_H^2 u}{\frac{\rho' g}{\rho_0}} = \left(\frac{\delta}{\epsilon g} \right) A_H \frac{U}{L^2} ;$$

$$\frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\rho' g}{\rho_0}} = \left(\frac{\delta}{\epsilon g} \right) \frac{U^2}{L} \quad ; \quad \frac{A_V \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}{\frac{\rho' g}{\rho_0}} = \left(\frac{\delta}{\epsilon g} \right) A_V \frac{U}{H^2}$$

- A exceção é o termo do gradiente vertical de pressão. A razão entre este e o empuxo nos permite encontrar a escala para P' de uma forma generalizada assumindo que ambos tem a mesma ordem:

$$\frac{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z}}{\frac{\rho' g}{\rho_0}} = \frac{P'}{\Delta \rho g H}$$



$$P' = 10^4 Pa.$$

Notem que a escala P' independe da escala horizontal do movimento.

A razão de aspecto e a aproximação hidrostática

- Como mostrado no slide anterior, o termo do empuxo (ou da gravidade reduzida) é aquele que é solidamente conhecido e independe da escala do movimento. Sua ordem de grandeza é tipicamente 10^{-2} .
- Portanto, podemos avaliar o coeficiente $\delta (\epsilon g)^{-1}$ para cada uma das escalas de interesse em oceanografia, com as escolhas de $L = 100$ m, 10 km, 100 km e 1000 km para pequena, submeso, meso e grande escalas, por exemplo.

	<i>Pequena</i>	<i>Submeso</i>	<i>Meso</i>	<i>Grande</i>
$\delta (\epsilon g)^{-1}$	10^3	10	1	10^{-1}
$\frac{Dw/Dt}{\text{empuxo}}$	10	10^{-3}	10^{-7}	10^{-11}
<i>Hidrostático?</i>	<i>Não</i>	<i>Sim</i>	<i>Sim</i>	<i>Sim</i>

Os Balanços da EGM vertical por Escalas

Movimentos Acelerados:

*Pequena
(L=100 m)*

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0} \rho g + A_H \nabla_H^2 w$$

*Submeso
(L=10 km)*

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0} \rho g$$

Movimentos em Quase-Equilíbrio:

Meso

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0} \rho g$$

Grande

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0} \rho g$$

Comentários Finais sobre Hidrostática ($\delta \ll 1$)

- A análise de escalas é um instrumento poderoso para identificarmos os termos da EGM relevantes para o movimento de interesse.
- Simplificações são possíveis e tornam a EGM passível de solução analítica em casos específicos.
- Os exemplos aqui apresentados dependem fortemente dos valores de escolhidos de parâmetros e de T , U e L principalmente.
- Por exemplo, para $A_H = 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, os termos de atrito seriam desprezados nas 3 componentes da EGM.
- Porcentagem significativa e relevante dos movimentos de **submesoescala** da faixa de $L=1-2 \text{ km}$ não são hidrostáticos. Mas, para $L=10 \text{ km}$, o limite superior, o balanço na vertical é sim hidrostático.
- O mesmo princípio se aplica às pequenas escalas, onde existem ondas grandes (as de água rasa) que são hidrostáticas na vertical.
- Já meso e grande escalas, por serem escoamentos em quase-equilíbrio são sempre hidrostáticos.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO



Movimento Geostrófico

Movimento Geostrófico: O Balanço

- Como visto no tema anterior, a EGM sob a consideração de δ , Ro , E_V , E_H , $\hat{\beta} \ll 1$ nos leva a um balanço dominante que consiste em

$$\begin{aligned}
 -f_0 v &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathcal{O}(Ro) \\
 f_0 u &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathcal{O}(Ro) \\
 \frac{1}{\rho_0} \rho g &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \mathcal{O}(\delta^2 Ro).
 \end{aligned}$$

- Podemos assim dizer que em ordem mais baixas [$\mathcal{O}(Ro^0)$], o balanço dominante é entre a força de Coriolis e a força do gradiente de pressão horizontal. Os demais termos, de ordem $\mathcal{O}(Ro)$, são pelo menos 100 vezes menores que estes dois. Na vertical, o balanço é aproximadamente hidrostático.

Movimento Geostrófico: Definição

- Semanticamente, o termo geostrófico significa **geo** – Terra e **trófico** – que se nutre de. Ou seja, é o movimento que “se alimenta” a rotação do planeta.
- Como vimos, o **movimento geostrófico é estritamente horizontal**. E exhibe uma situação de equilíbrio (ou quase-equilíbrio) dinâmico.
- Consideremos novamente a EGM como uma expressão nos fluidos da segunda Lei de Newton: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$. Vimos também que $\vec{a} = \mathcal{O}(Ro)$.
- Ou seja, a aceleração é diminuta, o que nos leva a uma situação de quase-equilíbrio.
- A resultante das forças atuantes na parcela de fluido é praticamente zero: $\frac{\vec{F}}{m} \approx 0$.
- Logo, $\Rightarrow \vec{F} \approx 0$, o que nos permite reescrever $\vec{C} + \vec{P} \approx 0$.
- Trata-se de um estado de quase-equilíbrio onde as forças de Coriolis e do gradiente de pressão horizontal se equilibram. No entanto, este **não é um estado de equilíbrio estático** (estado de repouso). **É um estado de movimento**, pois a força de Coriolis só atua sobre parcelas em movimento!

O Movimento Geostrófico e a Equação da Continuidade

- Escrevamos agora a EGM tomando o movimento da ordem mais baixa e eliminando o balanço hidrostático exato envolvendo \bar{p} e $\bar{\rho}$.
- As componentes zonal, meridional e vertical da EGM em termos da pressão geostrófica \tilde{p} e do desvio de densidade $\tilde{\rho}$ em balanço geostrófico aproximado, obtemos

$$-f_0 v_g = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$$

$$f_0 u_g = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}$$

$$\frac{1}{\rho_0} \tilde{\rho} g = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0$$

- A equação da continuidade foi incluída e se resume à **não-divergência horizontal**.

O Movimento Geostrófico: Função de Corrente

- A condição de não-divergência horizontal permite a definição de uma função de corrente geostrófica ψ , cujas relações com as velocidades são dadas por

$$v_g = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad e \quad u_g = - \frac{\partial \psi}{\partial y} .$$

- A mera comparação entre as eqs. do movimento geostrófico reescritas como

$$v_g = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{p}}{\rho_0 f_0} \right) \quad e \quad u_g = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tilde{p}}{\rho_0 f_0} \right)$$

- e a definição da função de corrente nos leva a concluir que

$$\psi = \frac{\tilde{p}}{\rho_0 f_0} .$$

- Ou seja, as linhas de corrente são coincidentes com as isóbaras!

Movimento Geostrófico: Escala

- Vimos em aulas passadas que:

$$p(x, y, z, t) = \underbrace{\bar{p}(z)}_{\text{hidrostática}} + \underbrace{\tilde{p}(x, y, z, t)}_{\text{geostrófica}}.$$

- E que a escala da pressão geostrófica é

$$\tilde{P} = (\rho_0 L) f_0 U.$$

- Invocando a eq. hidrostática, obtemos a escala para o desvio de densidade, que está em balanço geostrófico:

$$\tilde{\rho} = \mathcal{O} \left(\frac{\rho_0 U f_0 L}{gH} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{\rho_0 f_0 \Psi}{gH} \right).$$

O Movimento Geostrófico Barotrópico

- **O movimento geostrófico** é classificado em função do tipo de força do gradiente horizontal de pressão – **barotrópico ou baroclínico**.
- Começamos explorando o movimento geostrófico barotrópico assumindo oceano homogêneo e a pressão geostrófica dada por

$$\tilde{p}(x, y) = \rho_0 g \eta.$$

- As relações geostróficas então se tornam

$$\begin{aligned} -f_0 v_g &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ f_0 u_g &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} . \end{aligned}$$

- Notem que as velocidades geostróficas barotrópicas apenas variam bidimensionalmente em função de ser $\eta = \eta(x, y)$ somente.

O Movimento Geostrófico Barotrópico

- A função de corrente geostrófica barotrópica é dada por

$$\psi = \frac{g}{f_0} \eta$$

- Já a componente vertical da equação do mov. geostrófico barotrópico é

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} = 0$$

- Combinando as duas equações anteriores, chegamos a

$$\frac{f_0}{g} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

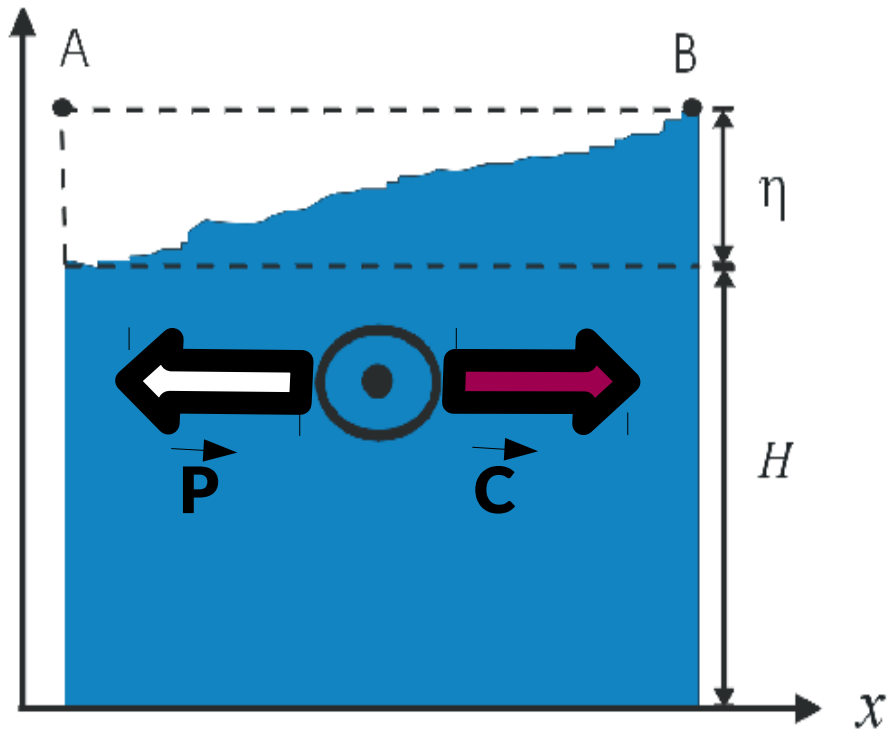
- Tomando $\left[-\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right]$ da equação acima, obtemos:

$$\left[\frac{\partial u_g}{\partial z}, \frac{\partial v_g}{\partial z} \right] = 0$$

- Este princípio que confere ao mov. geostrófico barotrópico uma rigidez vertical é denominado como **Teorema de Taylor-Proudman**.

O Movimento Geostrófico Barotrópico

- Consideremos aqui o caso simples em que $\eta = \eta(x)$.
- O nível do mar sendo mais alto na estação **B** do que na **A**, a força do gradiente horizontal de pressão aponta para oeste.
- Como há equilíbrio entre a a força do gradiente horizontal de pressão e a força de Coriolis, a última precisa ter mesma magnitude e sentido oposto à primeira.
- Por estarmos no hemisfério sul, a força de Coriolis está sempre à esquerda do movimento.
- Assim, a corrente geostrófica barotrópica, que é invariável na vertical, aponta no sentido de sair do *slide* (ou para sul, se a orientação da seção for zonal).

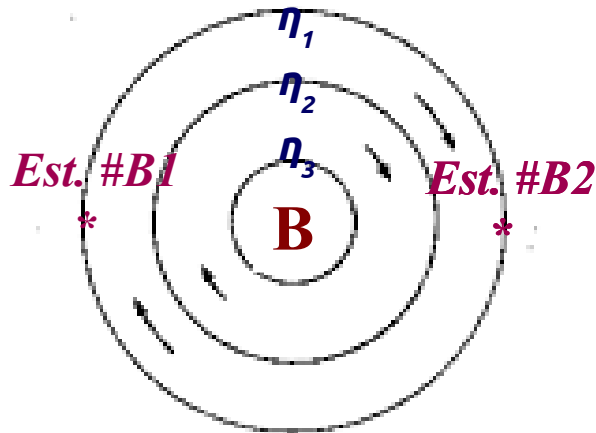


O Movimento Geostrófico

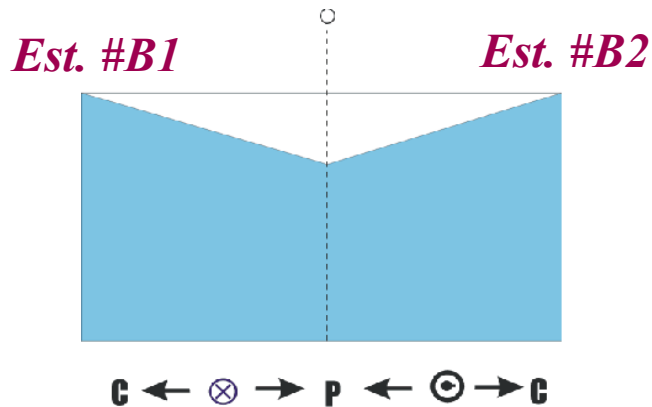
Barotrópico

ciclônico

$$\eta_1 > \eta_2 > \eta_3$$

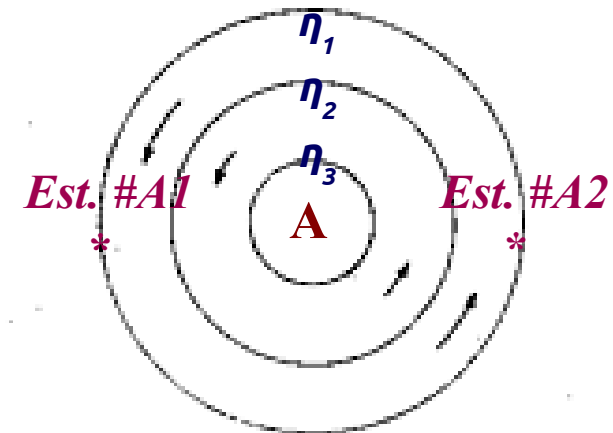


Região de baixa pressão

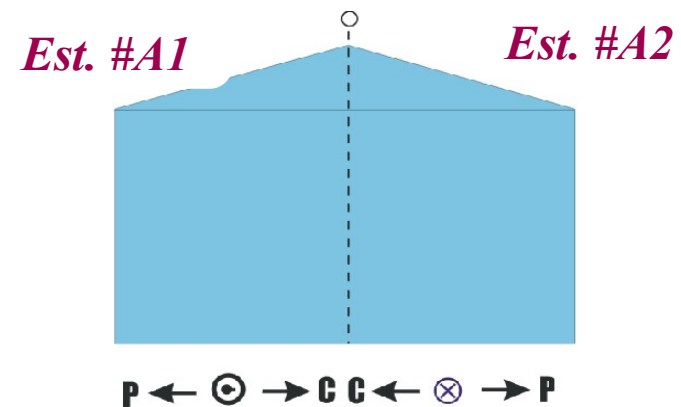


anticiclônico

$$\eta_1 < \eta_2 < \eta_3$$



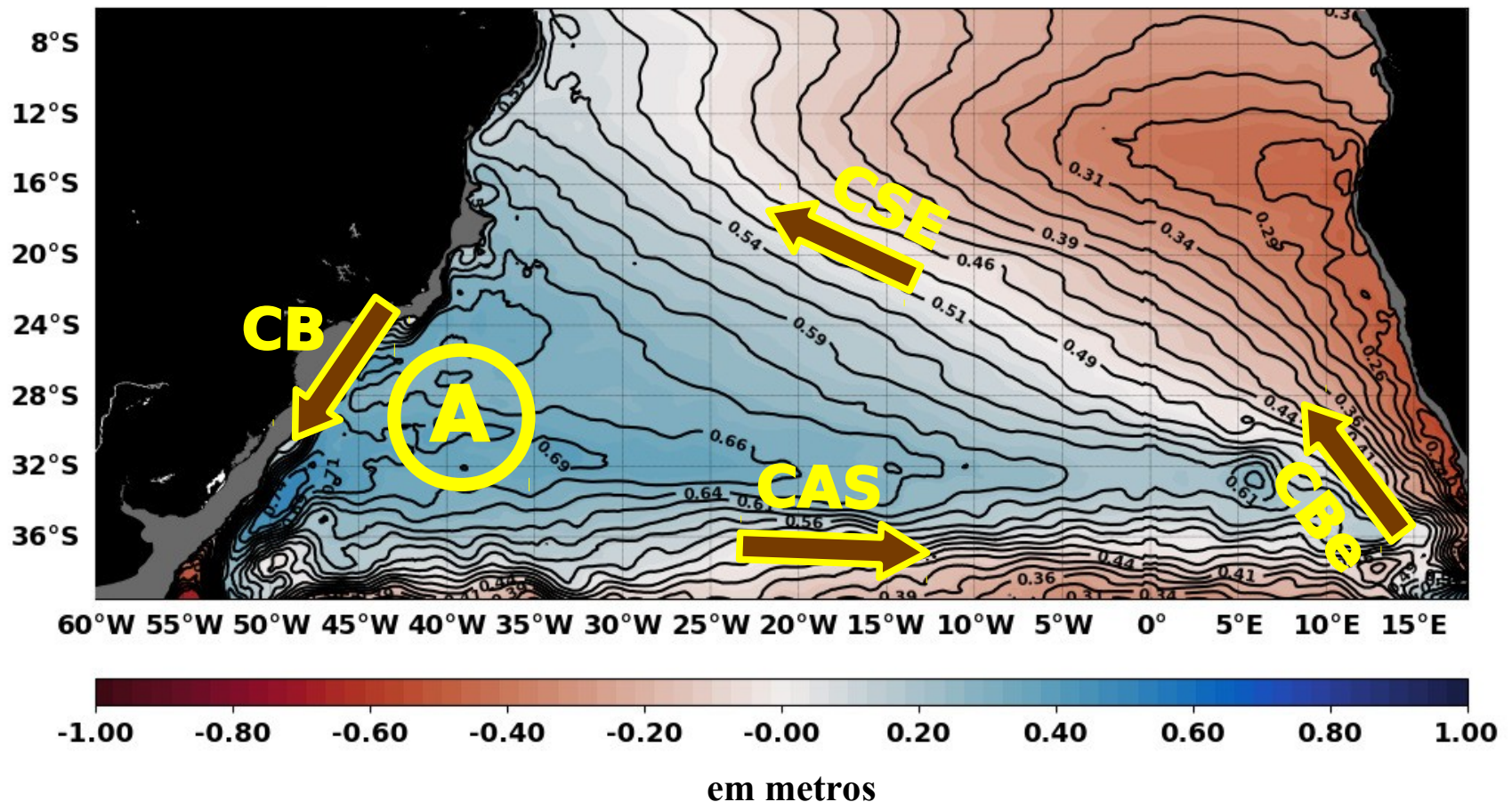
Região de alta pressão



Hemisfério
Sul

O Movimento Geostrófico Barotrópico

Altura as Superfície do Mar – AVISO (1993-2019)



CB-Corrente do Brasil, CAS-Corrente do Atlântico Sul, CBe-Corrente de Benguela, CSE-Corrente Sul Equatorial

O Movimento Geostrófico Baroclínico

- Agora, examinemos o caso em que o movimento geostrófico é baroclínico e que a topografia da superfície do oceano devido a esses movimentos são muito pequenas se comparada aos do movimento geostrófico barotrópico.
- Assim, se fizermos $\eta=0$, eliminaremos a componente barotrópica do movimento e ficaremos apenas com a baroclínica para explorar.
- As relações de pressão e densidade, no presente caso, são dadas por

$$p(x, y, z) = \underbrace{\bar{p}(z)}_{\text{hidrostática}} + \underbrace{\tilde{p}(x, y, z)}_{\text{geostrófica}}$$
$$\rho(x, y, z) = \underbrace{\bar{\rho}(z)}_{\text{hidrostática}} + \underbrace{\tilde{\rho}(x, y, z)}_{\text{geostrófica}}$$

- Os campos de pressão e densidade geostróficas variam tridimensionalmente no oceano baroclínico.

O Princípio do Vento Térmico

- Derivemos agora um outro teorema de suma importância na dinâmica geostrófica baroclínica, tal qual foi Taylor-Proudman para o barotrópico.
- Para tanto, considere as três equações do movimento geostrófico baroclínico:

$$\underbrace{v_g = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{p}}{\rho_0 f_0} \right)}_{\text{zonal}}; \underbrace{u_g = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tilde{p}}{\rho_0 f_0} \right)}_{\text{meridional}}; \underbrace{\frac{g}{\rho_0 f_0} \tilde{\rho} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tilde{p}}{\rho_0 f_0} \right)}_{\text{vertical}}.$$

- Usando o Teorema de Swartz, derivemos as componentes horizontais em relação a z e substituamos a eq. hidrostática nestas para obter

$$\frac{\partial v_g}{\partial z} = -\frac{g}{\rho_0 f_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{g}{\rho_0 f_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y}.$$

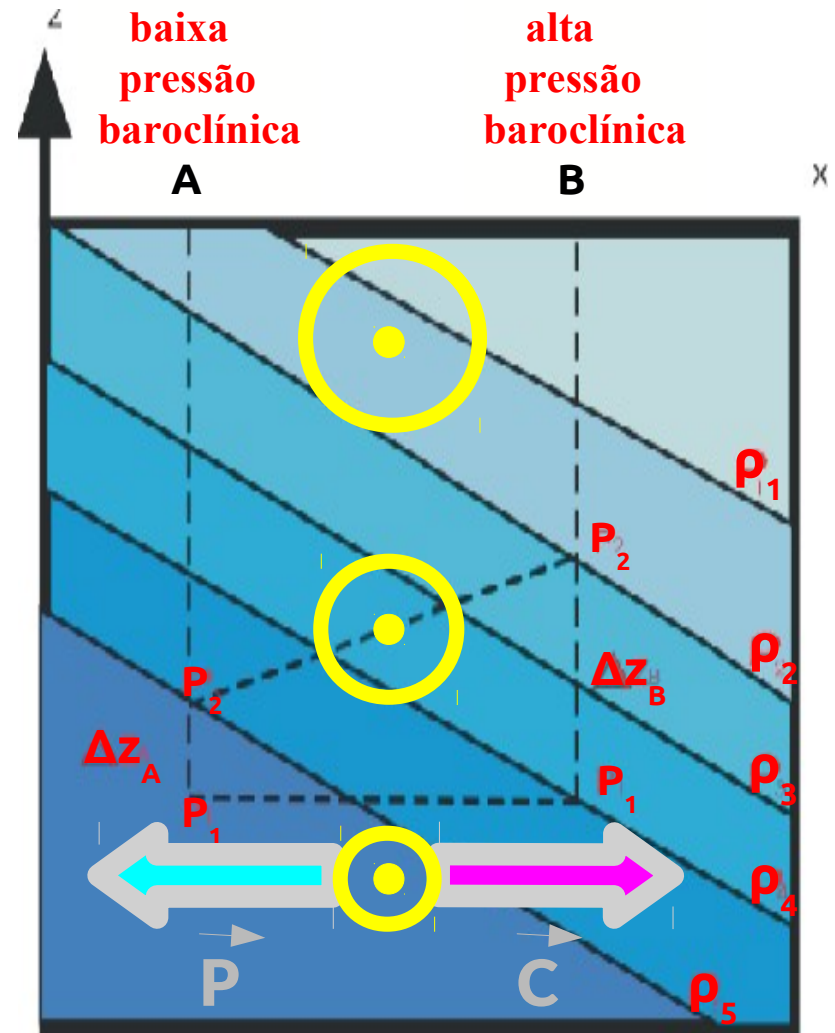
- Por terem sido derivadas inicialmente para meteorologia, as relações acima são conhecidas como as relações do vento térmico, visto que temperatura potencial é a variável de estado para a atmosfera.

O Princípio do Vento Térmico

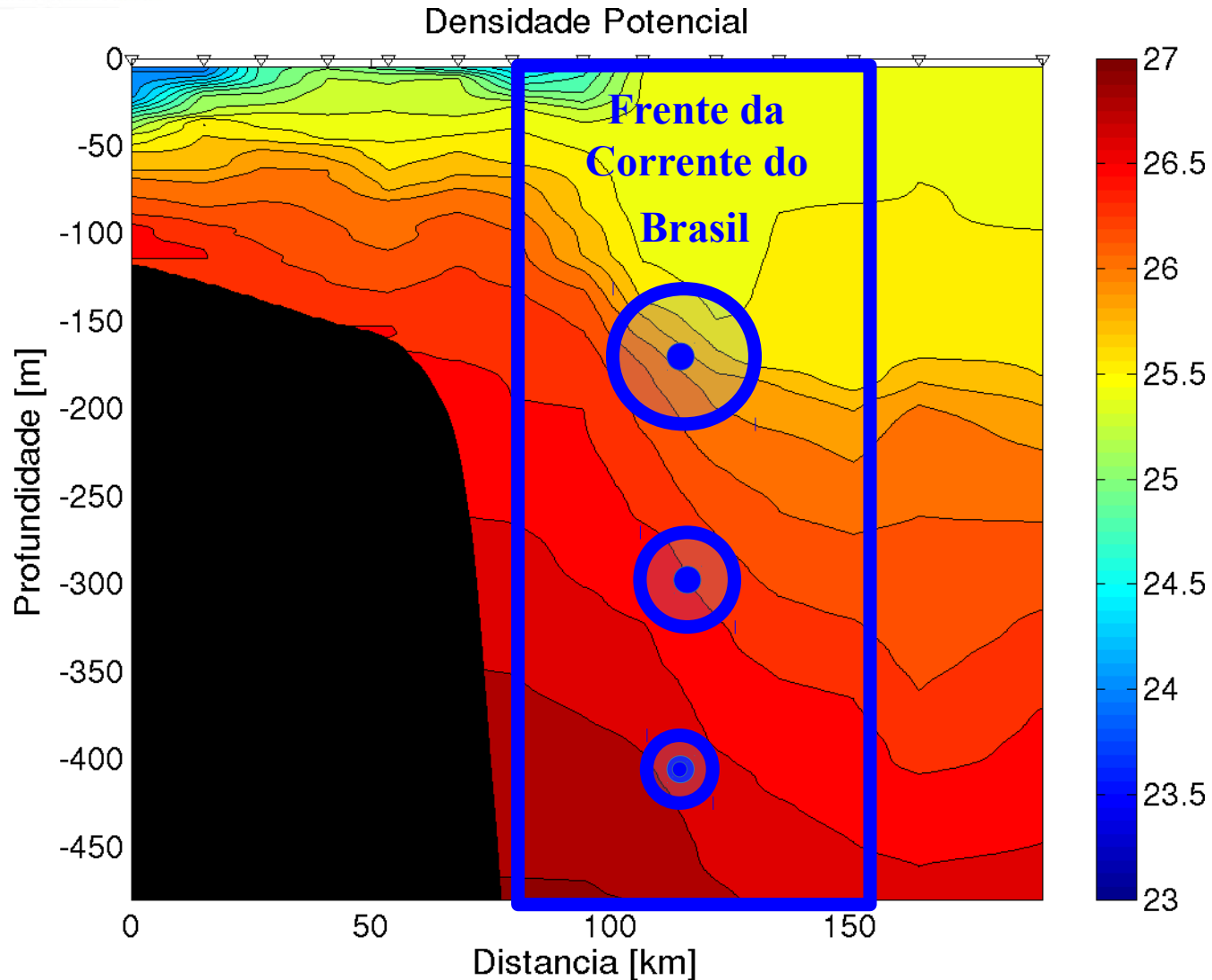
- O vento térmico estabelecer que a **corrente geostrófica só pode cisalhar na vertical caso haja gradiente lateral de densidade.**
- Assim, reexaminemos a figura ao lado vista quando definimos gradiente de pressão baroclínico, mas agora sob

$$\underbrace{\frac{\partial v_g}{\partial z}}_{<0} = - \frac{g}{\underbrace{\rho_0 f_0}_{<0}} \underbrace{\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x}}_{<0}$$

- Notem que o gradiente diminui com o aumento da profundidade. Ou seja a velocidade se torna mais negativa à medida que a profundidade se torna menos negativa!



O Vento Térmico em Escoamento Reais



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO



A Teoria de Ekman

A Importância do Atrito

- Como visto no tema 6, a EGM sob a consideração de $\delta, Ro, E_V, E_H, \beta \ll 1$ nos leva a um balanço geostrófico.
 - Em particular, ao considerarmos $H=10^3 \text{ m}$ e $L=10^5 \text{ m}$, os termos de atrito turbulento vertical e horizontal se tornam $O(Ro^2)$. E isso até vale para fenômenos de submesoescala e de pequena escala já sobre a influência da força de Coriolis.
 - Mas isso significaria que o atrito pode ser negligenciado no oceano? O oceano seria então como que invíscido na vasta maioria de seus movimentos?
 - Ora, todos vemos que basta o vento soprar sobre o oceano que correntes impulsivas se formam, o mar se levanta e a escala de Beaufort aumenta. Como então?
- ➔ Talvez estejamos simplesmente olhando para as escalas de profundidade H e de comprimento L inadequadas para verificar a atividade direta da viscosidade.

As Camadas-Limite de Prandtl

- Ludwig Prandtl, no início do século XX postulou que a viscosidade não é sentida homogeneamente no fluido. Ao invés disso, o efeito do atrito seria sentido fortemente apenas nas interfaces do fluido, ou seja, nos limites de contato com suas interfaces. A essas regiões, geralmente bem mais delgadas que o corpo de fluido integralmente, ele chamou de “*camada-limite*”.
- Assim, no fluido geofísico, de acordo com a teoria de Prandtl, seriam dois os regimes de escoamento:
 - o *regime interior* – região longe dos limites físicos (interfaces) do fluido, onde o efeito de viscosidade ou é muito pequeno (pela presença de cisalhamentos de correntes) ou pode ser totalmente negligenciado.
 - as *camadas-limite* – próxima ao limites físicos, onde a viscosidade tende a levar a velocidade à zero junto a esse contorno. É a expressão da condição de contorno de não-escorregamento (ou no slip). No caso do limitefísico ser entre dois fluidos distintos, assume-se continuidade das tensões de cisalhamento entre eles.
- As camadas-limite irrotacionais têm espessuras que variam com tempo e a velocidade, ao passo que as rotacionais, tem espessura pré-estabelecida pela rotação ambiente.

O Número de Ekman

- Como vimos no tema 6, e aplicamos no tema 7, os números adimensionais representam razões entre termos da EGM e, portanto, ditam a relevância de dois termos no balanço dominante.
- Assim, ao tratarmos a espessura de fluido total como a escala vertical da viscosidade, o número de Ekman vertical é muito pequeno:

$$E_V = \mathcal{O} \left(\frac{A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}{f v} \right) = \frac{A_V}{(f_0 H^2)}$$

$$= \mathcal{O}(Ro^2) = 10^{-4}.$$

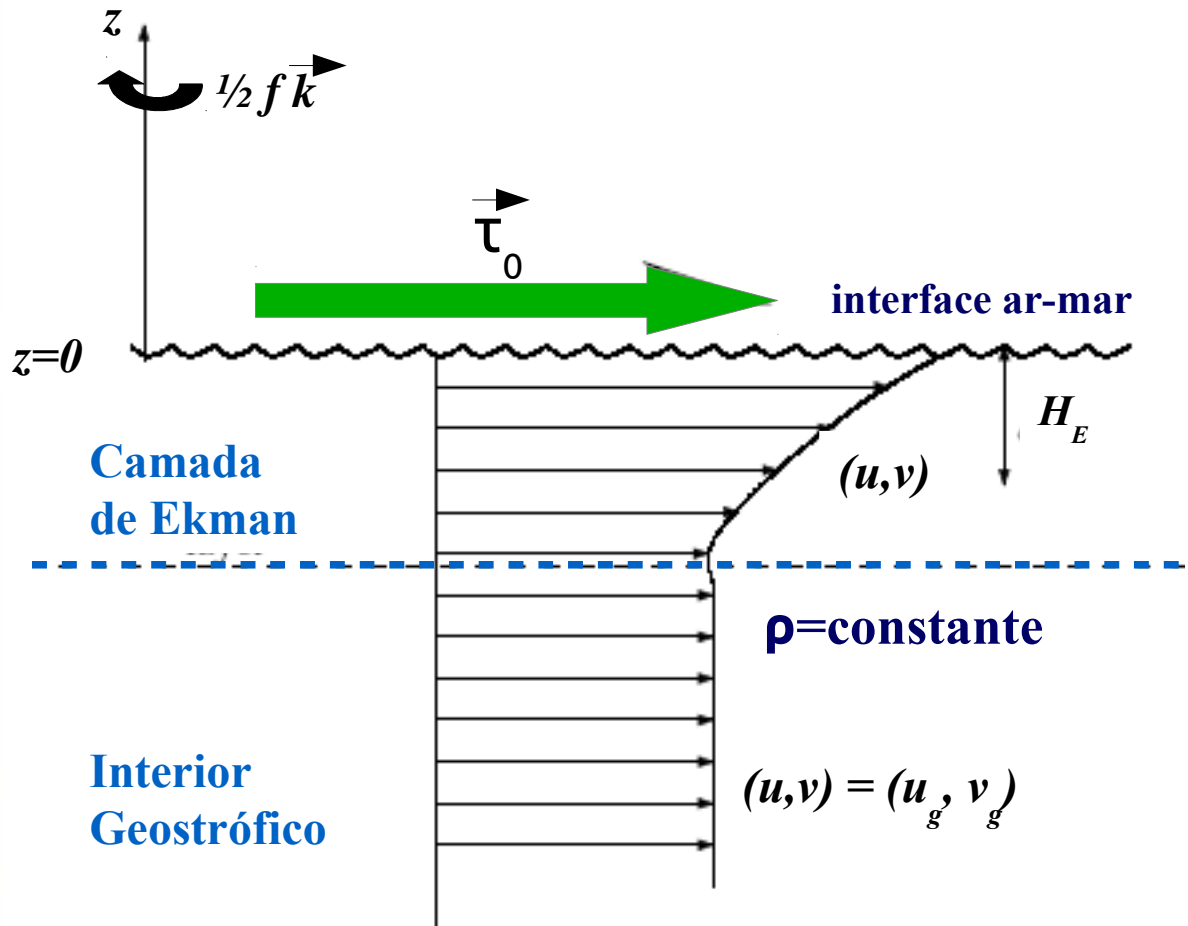
- Para que os termos de atrito turbulento tenham a mesma relevância da força de Coriolis, urge que consideremos $E_V = \mathcal{O}(1)$. Com isso, conseguimos estimar a ordem de grandeza da espessura da camada-limite rotacional H_E , onde o índice E se refere à Ekman.

$$E_V = \mathcal{O}(1) \implies \frac{A_V}{(f_0 H_E^2)} = 1$$

$$H_E = \mathcal{O} \left(\sqrt{\frac{A_V}{|f_0|}} \right) = \mathcal{O}(10 \text{ m}).$$

o que nos leva a

A Camada de Ekman de Superfície: O Cenário



Na camada-limite:
 $(u, v) = (u_g + u_E, v_g + v_E)$

As Equações de Ekman

- A forma simplificada da EGM dentro da camada-limite de superfície, em suas componentes zonal e meridional, é dada por

$$\begin{aligned} -s|f_0|(v_g + v_E) &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + A_v \frac{\partial^2 u_E}{\partial z^2} \\ s|f_0|(u_g + u_E) &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + A_v \frac{\partial^2 v_E}{\partial z^2} \end{aligned}$$

$$s = \frac{f_0}{|f_0|}$$

número hemisférico

- Por ser um sistema **linear**, podemos desmembrar as equações na parte geostrófica e na parte devido ao balanço de Ekman:

$$\begin{aligned} -s|f_0|v_g &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} & ; & & -s|f_0|v_E &= A_v \frac{\partial^2 u_E}{\partial z^2} \\ s|f_0|u_g &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} & ; & & s|f_0|u_E &= A_v \frac{\partial^2 v_E}{\partial z^2} \end{aligned}$$

eq. geostrófica *eq. de Ekman*

O Modelo de Ekman para a camada-limite de superfície

- Para a camada de superfície, as equações de Ekman

$$\begin{aligned} -s|f_0|v_E &= A_v \frac{\partial^2 u_E}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau^x}{\partial z} \\ s|f_0|u_E &= A_v \frac{\partial^2 v_E}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau^y}{\partial z} \end{aligned}$$

- são resolvidas em conjunto com as seguintes condições de contorno

$$\tau_0^x = \rho_0 A_v \frac{\partial u_E}{\partial z} \quad \text{e} \quad \tau_0^y = \rho_0 A_v \frac{\partial v_E}{\partial z} \quad \text{em } z = 0$$

$$u_E \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad v_E \rightarrow 0 \quad \text{à medida que } z \rightarrow -\infty$$

- Essas duas condições nos garantem a continuidade das tensões entre atmosfera e oceano na superfície e que as velocidades de Ekman decaem a zero no interior geostrófico.

Solução do Modelo de Ekman (1)

- Resolvamos o modelo de Ekman da camada de superfície usando números complexos, tal qual Vagn Ekman o resolveu em 1902. Para tanto, definamos uma velocidade de Ekman que chamaremos de velocidade complexa definida por

$$\mathcal{V}_E = u_E + iv_E .$$

- Façamos agora *comp. x* + *i*comp. y* das Eqs. de Ekman para obter

$$s|f_0| \underbrace{(iu_E - v_E)}_{=i(u_E+iv_E)} = A_v \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u_E + iv_E) .$$

- Usando a definição de velocidade complexa na equação acima, chegamos a

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathcal{V}_E - i \frac{s|f_0|}{A_v} \mathcal{V}_E = 0 ,$$

cuja solução geral é

$$\mathcal{V}_E(z) = C_1 e^{\lambda_1 z} + C_2 e^{\lambda_2 z} .$$

Solução do Modelo de Ekman (2)

- Os argumentos dos termos exponenciais são encontrados via Método das Características e as constantes de integração por aplicação das condições de contorno.
- A equação característica correspondente à Eq. de Ekman é:

$$\lambda^2 - i \frac{s|f_0|}{A_V} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{i \frac{s|f_0|}{A_V}},$$

- que pode ser reescrita como

$$\lambda = \pm \sqrt{i} \sqrt{s} \sqrt{\frac{s|f_0|}{A_V}}.$$

- Agora devemos manipular a expressão acima para escrever a raiz do número complexo de forma mais “amigável”:

$$(1 + i)^2 = 2i \Rightarrow i = \frac{(1 + i)^2}{2} \Rightarrow \sqrt{i} = \frac{(1 + i)}{\sqrt{2}}.$$

Solução do Modelo de Ekman (3)

- Devemos ainda tentar reescrever a raiz do número hemisférico para evitar a assimetria de forma das soluções para hemisférios sul e norte, ou seja,

$$\sqrt{i}\sqrt{s} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2}} \cdot$$

- Assim, consideremos os casos dos dois hemisférios:

$$\begin{aligned} \text{para o HN } (s = 1) &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{is}{\sqrt{2}} \right) \\ \text{para o HS } (s = -1) &\Rightarrow \frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{i^2}{\sqrt{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{is}{\sqrt{2}} \right) \cdot \end{aligned}$$

- Como a solução das características tem duas soluções com sinais opostos e mesmo módulo, ao aplicarmos para os HN e HS, tudo o que faremos será inverter (sem nenhuma consequência) “±” pelo seu inverso.

Solução do Modelo de Ekman (4)

- Finalmente, reescrevemos as duas raízes na forma de

$$\sqrt{i}\sqrt{s} = \frac{1 + is}{\sqrt{2}}$$

- A solução da equação característica, então toma a forma de

$$\lambda = \pm(1 + is)\sqrt{\frac{|f_0|}{2A_V}} = \pm\frac{(1 + is)}{h_E}.$$

- A quantidade h_E é chamada **escala de decaimento das velocidades de Ekman**. A solução geral toma então a forma de

$$v_E(z) = C_1 e^{\frac{(1+is)}{h_E} z} + C_2 e^{-\frac{(1+is)}{h_E} z}.$$

- A aplicação da condição de contorno de “fundo” exige velocidades decaindo a zero, o que inviabiliza o segundo termo da solução, pois $z < 0$ em nosso modelo. Para atender esta condição, basta que façamos:

$$C_2 = 0.$$

Solução do Modelo de Ekman (5)

- Agora, apliquemos a condição de contorno de superfície para determinar a constante integração C_1 . Antes, no entanto, devemos definir a tensão de cisalhamento do vento complexa por

$$\mathcal{T}_0 = \tau_0^x + i \tau_0^y .$$

- A condição de contorno passa a ter a forma complexa de

$$\mathcal{T}_0 = \rho_0 A_v \frac{\partial \mathcal{V}_E}{\partial z} \text{ em } z = 0 .$$

-

- A derivada da solução geral é

$$\frac{\partial \mathcal{V}_E}{\partial z} = C_1 \left[\frac{(1 + is)}{h_E} e^{\frac{(1+is)}{h_E} z} \right] ,$$

- Que quando combinada com a condição de contorno, leva-nos a

$$C_1 = \frac{\mathcal{T}_0}{\rho_0 A_v} \left[\frac{h_E}{(1 + is)} \right] .$$

Solução do Modelo de Ekman (6)

- Lancemos mais uma vez mão de um pouco de álgebra para escrever a solução na forma obtida por Ekman. Para tanto, considere

$$\frac{1}{(1 + is)} \times \frac{\sqrt{2}(1 - is)}{\sqrt{2}(1 - is)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - is \frac{\sqrt{2}}{2} \right) .$$

- Com base nessa, usamos a fórmula de Euler para números complexos dada por

$$\begin{aligned} e^{i\gamma} &= \cos(\gamma) + i \operatorname{sen}(\gamma) \\ e^{-i\gamma} &= \cos(\gamma) - i \operatorname{sen}(\gamma) . \end{aligned}$$

- Assim, reescrevemos a expressão para C_1 como sendo

$$C_1 = \frac{\mathcal{T}_0}{\rho_0 A_v} h_E \frac{e^{-is \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} .$$

- Notem que já aparece o termo envolvendo o familiar ângulo de 45° !

Solução do Modelo de Ekman (7)

- Finalmente, escrevemos a solução do modelo, em sua forma final complexa:

$$\mathcal{V}_E(z) = \left(\frac{\sqrt{2}\tau_0}{\rho_0 h_E |f_0|} \right) e^{\frac{z}{h_E}} e^{is\left(\frac{z}{h_E} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

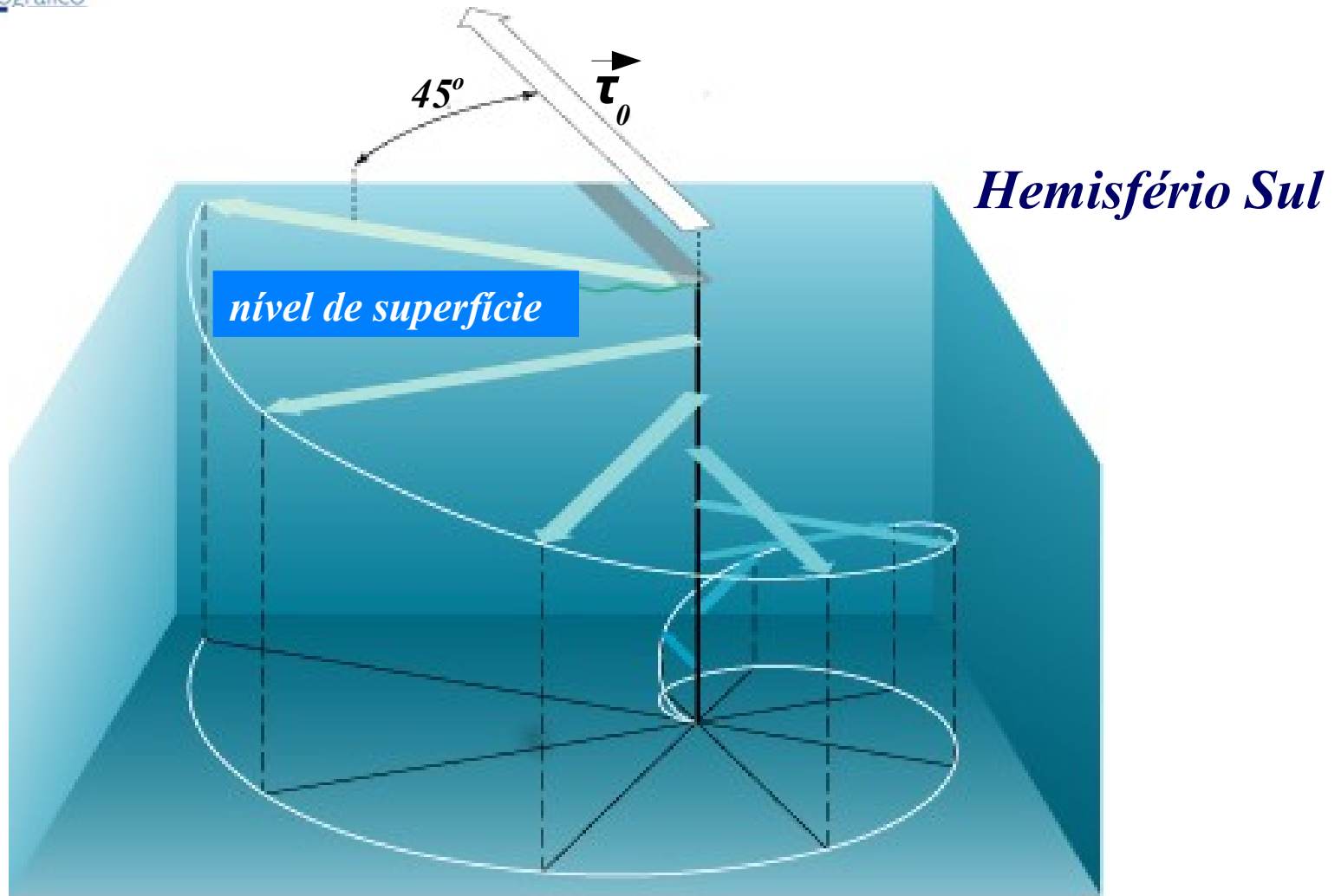
- Notem que há dois termos exponenciais. O primeiro denota decaimento em direção ao interior geostrófico – é o **termo de esvaecência**. O segundo já é trigonométrico, indicando variações a partir do ângulo de 45° na superfície. É o **termo do espiralamento**. As soluções para as componentes são obtidas simplesmente fazendo

$$\begin{aligned} u_E(z) &= \Re\{\mathcal{V}_E(z)\} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{\rho_0 h_E |f_0|} \right) e^{\frac{z}{h_E}} \left[\tau_0^x \cos\left(\frac{sz}{h_E} - \frac{s\pi}{4}\right) - \tau_0^y \sin\left(\frac{sz}{h_E} - \frac{s\pi}{4}\right) \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} v_E(z) &= \Im\{\mathcal{V}_E(z)\} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{\rho_0 h_E |f_0|} \right) e^{\frac{z}{h_E}} \left[\tau_0^x \sin\left(\frac{sz}{h_E} - \frac{s\pi}{4}\right) + \tau_0^y \cos\left(\frac{sz}{h_E} - \frac{s\pi}{4}\right) \right] \end{aligned}$$

A Camada de Ekman de Superfície: A Espiral



O Transporte de Ekman (1)

- Embora a solução da espiral seja o resultado mais famoso e divulgado da Teoria de Ekman, são o **Transporte e Bombeamento de Ekman** os resultados mais importantes e de direta aplicação na Oceanografia.
- A razão da importância das duas quantidades jaz no fato de que o cálculo independente do cálculo da profundidade de decaimento das correntes de deriva h_E e do emprego do coeficiente turbulento vertical de viscosidade A_V , quantidade de difícil mensuração no oceano ainda hoje apesar dos instrumentos mais modernos de medir microestruturas de cisalhamento de velocidade (como o *Velocity Microstructure Profiler* – VMP).
- O Transporte de volume (por unidade de comprimento) de Ekman é obtido através da integração vertical das velocidades associadas as correntes de deriva. Em termos da velocidade de Ekman complexa, seria

$$\mathfrak{V}_E = \int_{-\infty}^0 \mathfrak{v}_E(z) dz$$

O Transporte de Ekman (2)

- Substituindo a expressão da velocidade complexa de Ekman na integral, obtemos

$$\mathfrak{V}_E = \left(\frac{\mathcal{T}_0}{\rho_0 A_v \sqrt{2}} \frac{h_E}{\sqrt{2}} \right) e^{-is\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^0 e^{\frac{(1+is)}{h_E} z} dz$$

- O resultado da integração é

$$\mathfrak{V}_E = \left(\frac{\mathcal{T}_0}{\rho_0 A_v \sqrt{2}} \frac{h_E}{\sqrt{2}} \right) \left[\frac{h_E}{(1+is)} e^{-is\frac{\pi}{4}} \right]$$

- Lembrando que

$$\frac{1}{(1+is)} = \frac{e^{-is\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$$

- chegamos a

$$\mathfrak{V}_E = \left(\frac{\mathcal{T}_0}{\rho_0} \right) \left[\frac{h_E}{2A_v} e^{-is\frac{\pi}{2}} \right] = \frac{\mathcal{T}_0}{\rho_0 |f_0|} e^{-is\frac{\pi}{2}}$$

O Transporte de Ekman (3)

- Podemos usar a fórmula de Euler novamente, desta vez aplicada ao ângulo de 90° ,

$$e^{-is\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - is \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -is$$

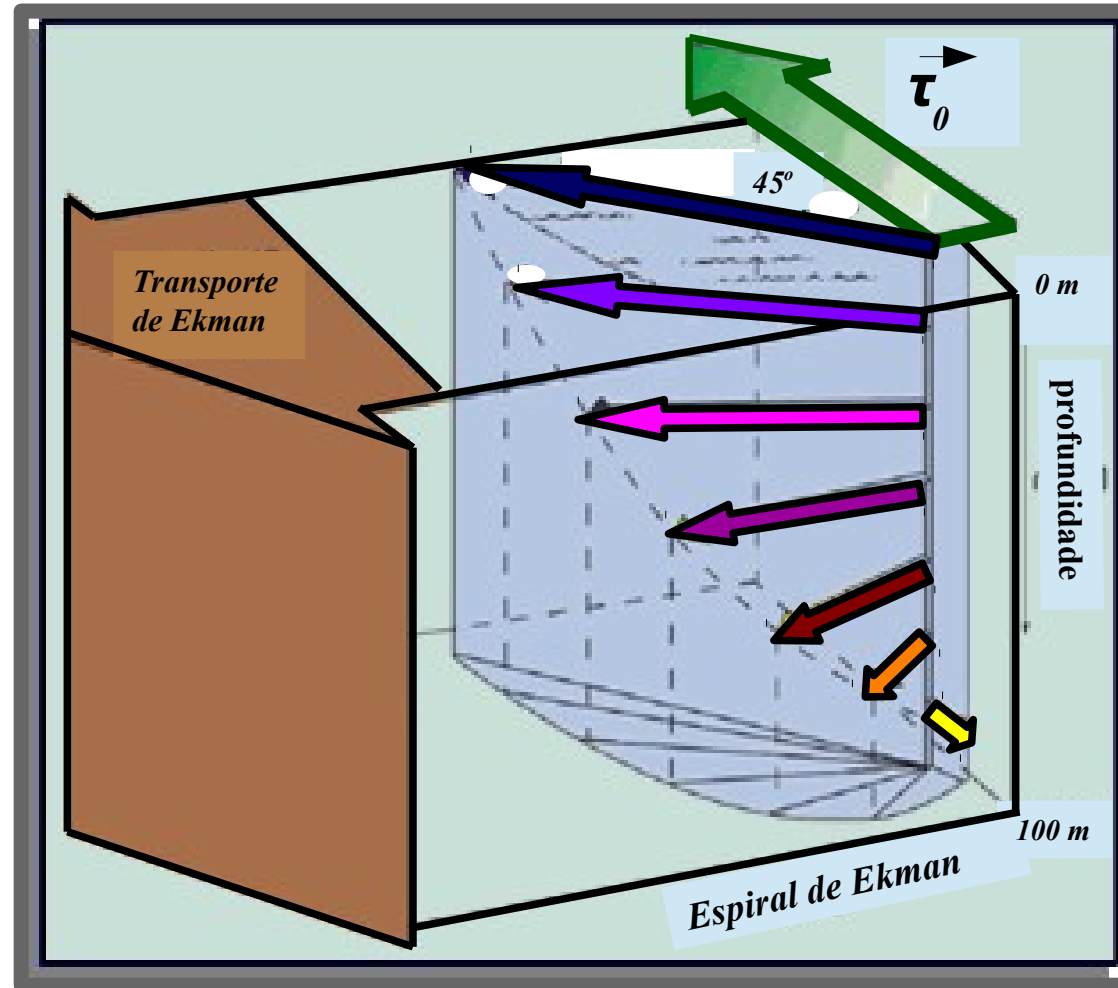
- e reescrevemos a expressão do transporte de volume complexo:

$$\mathfrak{V}_E = -is \frac{\mathcal{T}_0}{\rho_0 |f_0|}$$

- Para a obtenção das componentes zonal e meridional do transporte de Ekman, basta tomarmos, respectivamente, a parte real e a parte imaginária da expressão acima:

$$\begin{aligned} U_E &= \Re\{\mathfrak{V}_E(z)\} \\ &= -is \left(i \frac{\tau_0^y}{\rho_0 |f_0|} \right) = s \frac{\tau_0^y}{\rho_0 |f_0|} \\ V_E &= \Im\{\mathfrak{V}_E(z)\} = -s \frac{\tau_0^x}{\rho_0 |f_0|} \end{aligned}$$

Transporte de Ekman (4)



Hemisfério Sul

Adaptado de: Open University (1993)

Bombeamento de Ekman

- Ao contrário do movimento geostrófico, **as correntes de deriva podem ser divergentes ou convergentes** devido a variações espaciais da tensão de cisalhamento do vento. Ou seja, é possível que gradientes dessa tensão gerem divergências ou convergências na camada de Ekman causando injeção ou ejeção de água da camada-limite para o interior geostrófico.
- As velocidades verticais responsáveis que bombeiam água para dentro ou para fora da camada de Ekman são conhecidas, não por acaso, como “**bombeamento de Ekman**” (w_E).
- A solução do bombeamento de Ekman é obtida a partir da integração vertical da equação da continuidade dentro da camada-limite:

$$\int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial u_E}{\partial x} + \frac{\partial v_E}{\partial y} + \frac{\partial w_E}{\partial z} = 0 \right) dz .$$

Bombeamento de Ekman

- Podemos reorganizar a equação da continuidade integrada verticalmente de modo a reescrever os termos da divergência horizontal como transporte de Ekman:

$$w_E(-\infty) - w_E(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^0 u_E dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^0 v_E dz \right)$$

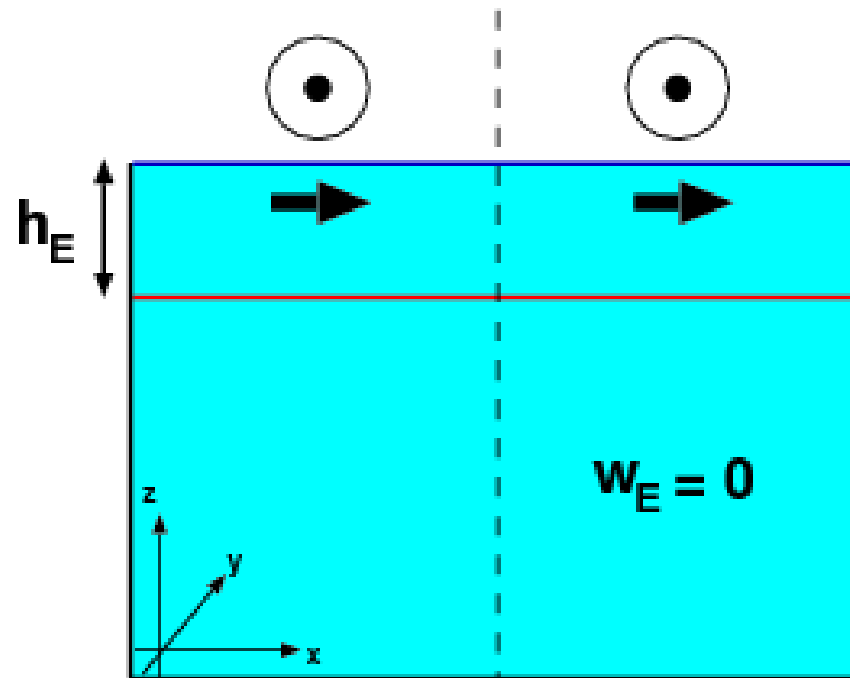
- Como a velocidade vertical é zero na superfície, obtemos o valor do bombeamento de Ekman na base da camada-limite por

$$\begin{aligned} w_E(-\infty) &= \left(\frac{\partial U_E}{\partial x} + \frac{\partial V_E}{\partial y} \right) \\ &= \frac{s}{\rho_0 |f_0|} \left(\frac{\partial \tau_0^y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_0^x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

- Mais usualmente, a expressão é apresentada como

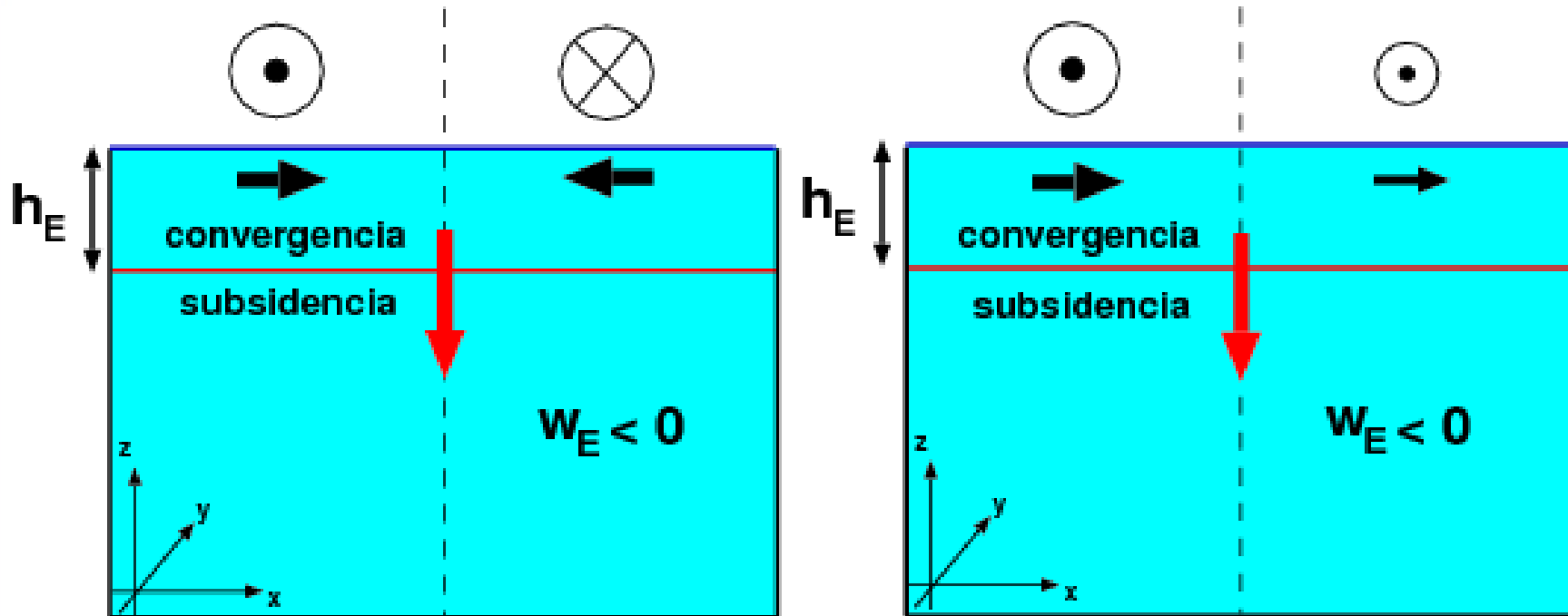
$$w_E(-\infty) = \frac{s}{\rho_0 |f_0|} \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{\tau}_0)$$

Bombeamento de Ekman: Exemplos (1)



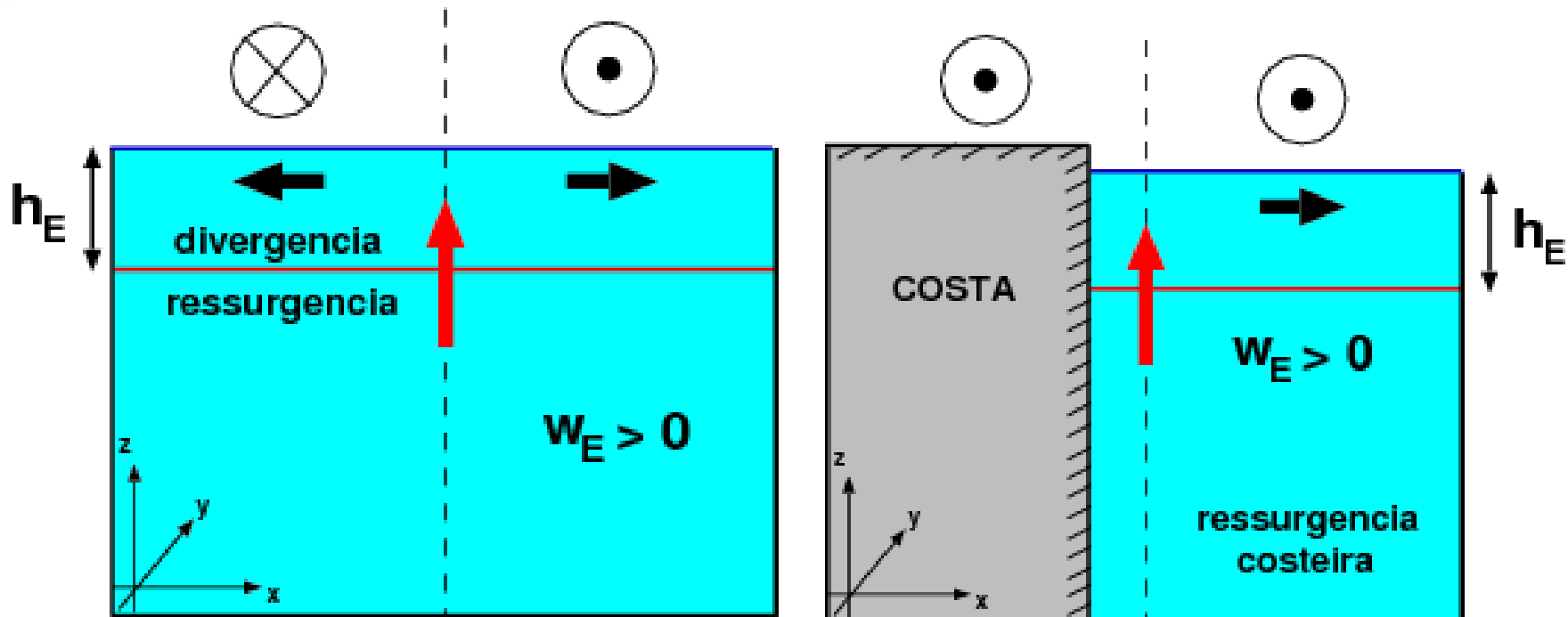
Hemisfério Sul

Bombeamento de Ekman: Exemplos (2) – Convergência

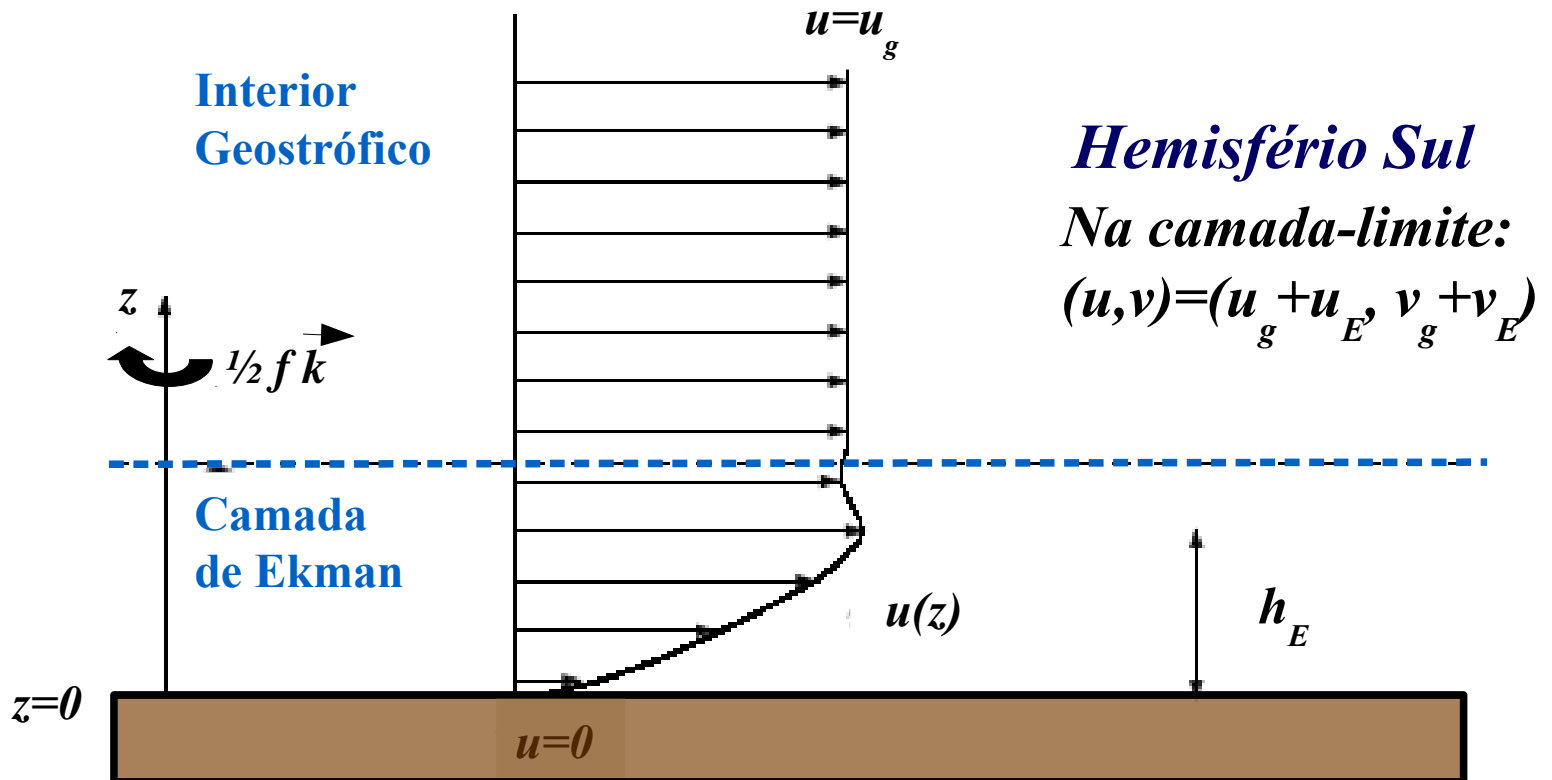


Hemisfério Sul

Bombeamento de Ekman: Exemplos (3) – Divergência



A Camada de Ekman Bêntica: Cenário



Adaptado de: Cushman-Roisin (1994)

A Camada de Ekman Bêntica (1)

- A camada de Ekman bêntica é formada mediante a excitação por uma corrente geostrófica. Cabe a esta levar, num ambiente em rápida rotação, o valor da velocidade total junto ao assoalho oceânico a zero. Na prática, é camada que faz satisfazer a condição de não-escorregamento junto ao limite inferior do oceano.
- Usemos aqui a mesma hipóteses simplificadoras do oceano homogêneo e no plano f , já usadas na camada de superfície. A corrente geostrófica, devido ao teorema de Taylor-Proudman é uniforme verticalmente e está associada aos gradientes de pressão, conforme as expressões abaixo:

$$-s|f_0|v_g = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad s|f_0|u_g = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

A Camada de Ekman Bêntica (2)

- Solucionaremos o modelo da camada-limite bêntica novamente usando números complexos. Para tanto, precisamos definir a velocidade geostrófica complexa como

$$\mathcal{V}_g = u_g + i v_g.$$

- O modelo permanece o mesmo da camada-limite de superfície. Logo a equação de Ekman é a mesma:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathcal{V}_E - i \frac{s|f_0|}{A_V} \mathcal{V}_E = 0.$$

- A solução geral desta equação é novamente aquela dada por

$$\mathcal{V}_E(z) = C_1 e^{\frac{(1+is)}{h_E} z} + C_2 e^{-\frac{(1+is)}{h_E} z}.$$

- As condições de contorno a fechar o problema é que serão distintas. Para guardarmos simetria com a camada de superfície, traslademos a origem de nosso sistema para o fundo. Ou seja, $z=0$ junto ao assoalho oceânico.

A Camada de Ekman Bêntica (3)

- As condições de contorno da camada de Ekman bêntica são mais simples que aquelas da de superfície. A condição de fundo é a de não-escorregamento. A condição de esvaecência é que a velocidade total tende à geostrófica no interior geostrófico. Ou seja, com a origem junto ao fundo,

$$\mathcal{V} = 0 \Rightarrow \mathcal{V}_E = -\mathcal{V}_g \text{ em } z = 0$$

$$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}_g \Rightarrow \mathcal{V}_E \rightarrow 0 \text{ à medida que } z \rightarrow \infty.$$

- A aplicação da condição de esvaecência mostra que a solução física do modelo precisa permanecer finita, portanto, a constante multiplicando o termo da raiz característica positiva precisa ser zero. A aplicação da condição de *no slip*, é bastante simples, e as duas constantes são:

$$C_1 = 0 \text{ e } C_2 = -\mathcal{V}_g.$$



INSTITUTO
OCEANOGRÁFICO
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

A Camada de Ekman Bêntica (4)

- A solução da espiral de Ekman para a camada limite bêntica é dada por

$$\mathcal{V}_E = \mathcal{V}_g e^{-\frac{z}{h_E}} e^{-is\frac{z}{h_E}}.$$

- As componentes zonal e meridional da espiral são encontradas, novamente, tomando a parte real e a parte imaginária, respectivamente:

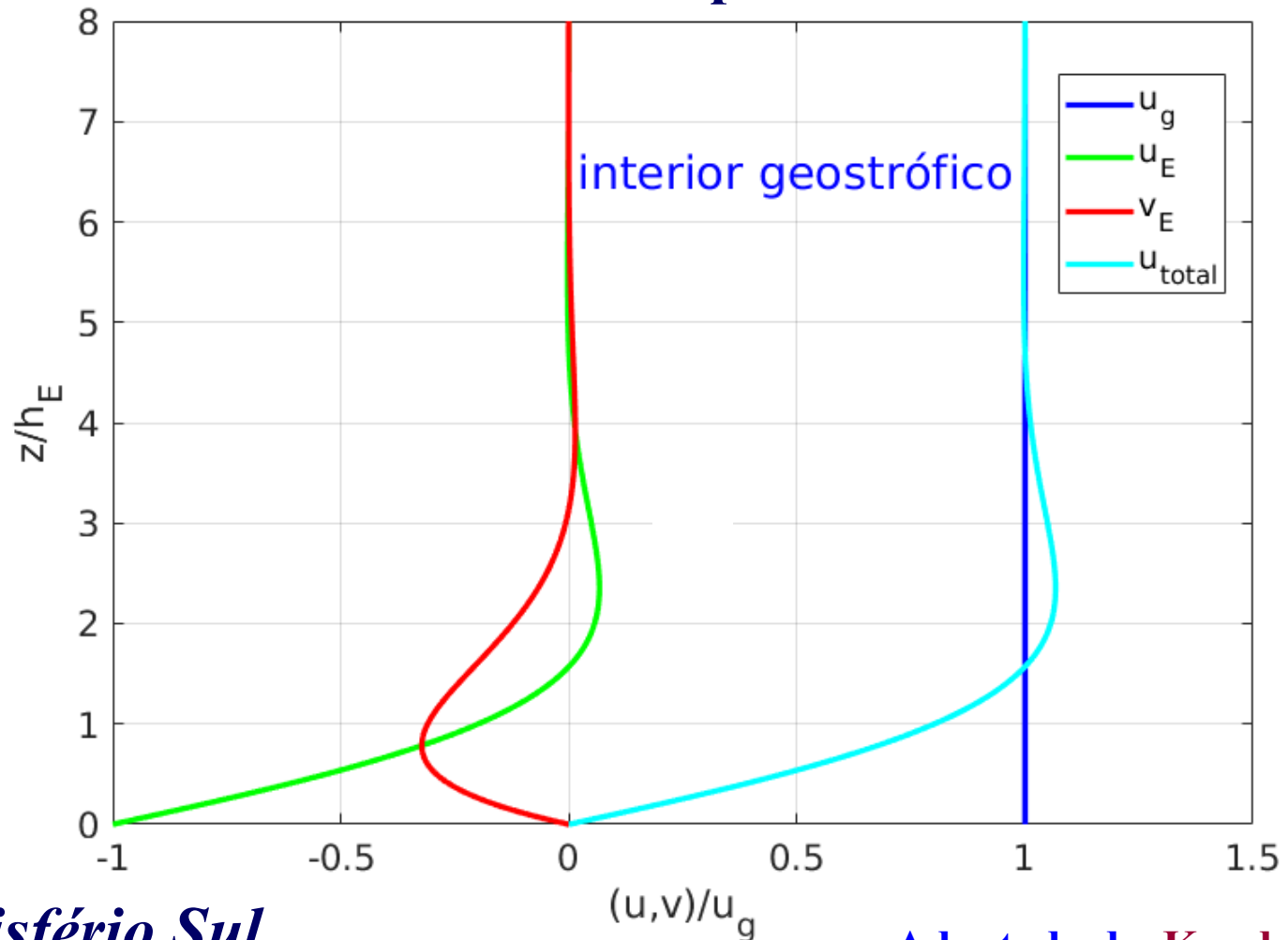
$$\begin{aligned}u_E(z) &= \Re\{\mathcal{V}_E(z)\} \\ &= -u_g e^{-\frac{z}{h_E}} \cos\left(\frac{sz}{h_E}\right) - v_g e^{-\frac{z}{h_E}} \sen\left(\frac{sz}{h_E}\right) \\ &= -u_g e^{-\frac{z}{h_E}} \cos\left(\frac{z}{h_E}\right) - sv_g e^{-\frac{z}{h_E}} \sen\left(\frac{z}{h_E}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_E(z) &= \Im\{\mathcal{V}_E(z)\} \\ &= u_g e^{-\frac{z}{h_E}} \sen\left(\frac{sz}{h_E}\right) - v_g e^{-\frac{z}{h_E}} \cos\left(\frac{sz}{h_E}\right) \\ &= su_g e^{-\frac{z}{h_E}} \sen\left(\frac{z}{h_E}\right) - v_g e^{-\frac{z}{h_E}} \cos\left(\frac{z}{h_E}\right).\end{aligned}$$

A Camada de Ekman de Fundo:

Perfis de Velocidade

considerando corrente geostrófica estritamente zonal e para leste





INSTITUTO
OCEANOGRÁFICO
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Transporte de Ekman Bêntico (1)

- O cálculo do transporte de volume (por unidade de comprimento) da camada limite bêntica, para sua obtenção, segue os mesmos passos do da camada limite de superfície. Atentem simplesmente para a inversão dos limites de integração vertical devido ao traslado da origem para o fundo.
- Assim, o transporte bêntico complexo é

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}_E &= \int_0^\infty \mathcal{V}_E(z) dz \\ &= -\mathcal{V}_g \int_0^\infty e^{\frac{-(1+is)}{h_E} z} dz \\ &= -\mathcal{V}_g \frac{h_E}{(1+is)} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \mathcal{V}_g h_E e^{-is\frac{\pi}{4}} \\ &= -\mathcal{V}_g \frac{h_E}{2} (1-is) \cdot\end{aligned}$$



INSTITUTO
OCEANOGRÁFICO
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Transporte de Ekman Bêntico (2)

- As componentes zonal e meridional do transporte bêntico são obtidas, como sempre, tomando-se, respectivamente, a parte real e imaginária do transporte complexo.
- As soluções se tornam mais facilmente aplicáveis aos hemisférios se usarmos as propriedades do cosseno ser uma função par e o seno, uma função ímpar. Logo,

$$U_E = \Re\{\mathcal{V}_E\} = -u_g \frac{h_E}{2} - sv_g \frac{h_E}{2}$$

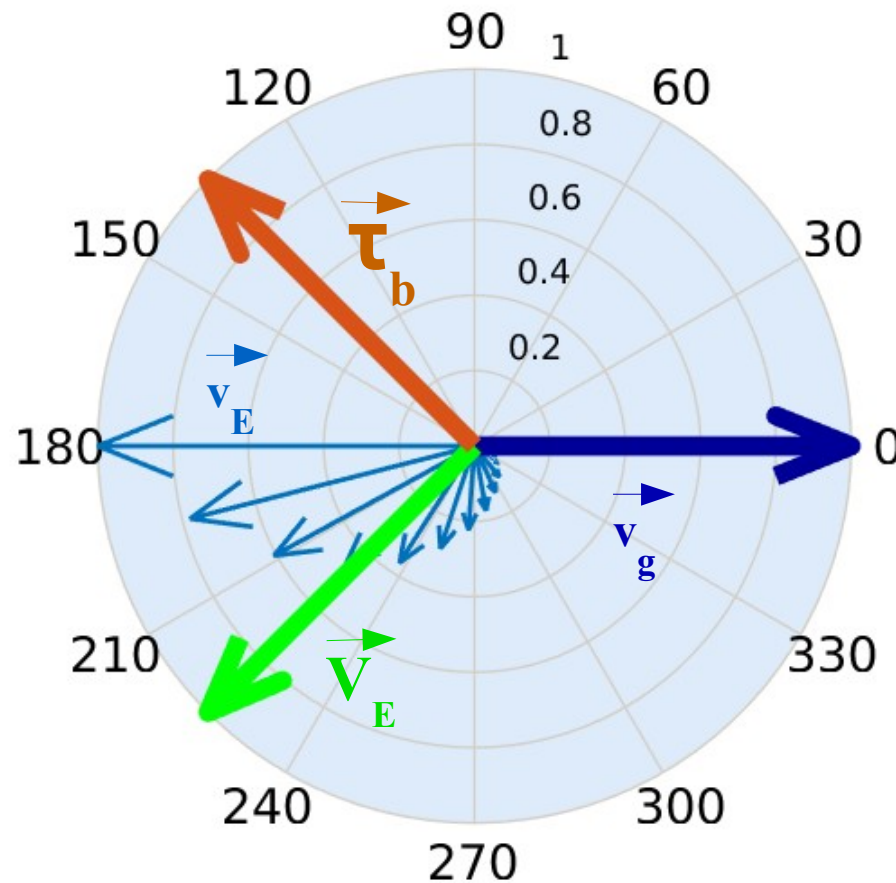
$$V_E = \Im\{\mathcal{V}_E\} = su_g \frac{h_E}{2} - v_g \frac{h_E}{2}$$

Transporte de Ekman Bêntico (3)

- Um conceito que pode passar despercebido é que o **transporte de Ekman na camada limite** (seja de superfície ou bêntica) é sempre 90° da direção da tensão de cisalhamento imposta no limite oceânico. O conceito é hemisfério-dependente, sendo à esquerda no HS e à direita no HN.
- Na camada limite de superfície, referimo-nos ao transporte como sendo 90° à direita do vento. E, de fato, da forma como usamos a *bulk aerodynamical formula* para cálculo, a tensão de cisalhamento do vento e o vento têm forçosamente a mesma direção. E muitos meteorologistas discordam disso.
- A discordância é porque o vento junto ao oceano está dentro da camada limite planetária (ou seja, a camada de Ekman da atmosfera) e vai espiralar também. Não é por acaso que usamos dados de ventos a 10 m de altura para evitar isso. Mas, reconhecidamente é uma aproximação, apesar do A_V na atmosfera ser razoavelmente maior que o do oceano.
- De volta à camada bêntica. Assim, o transporte de Ekman bêntico está **90° da tensão de cisalhamento exercida pelo fundo do oceano!**

Transporte de Ekman Bêntico (4)

considerando corrente geostrófica estritamente zonal e para leste



Hemisfério Sul

Bombeamento de Ekman Bêntico (1)

- O bombeamento de Ekman depende das variações espaciais da corrente geostrófica, que causam divergências e convergências da camada limite bêntica. Para derivar esta quantidade, vamos novamente integrar a equação da continuidade verticalmente, atentando para a inversão dos limites de integração relativamente ao caso de superfície:

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\partial u_E}{\partial x} + \frac{\partial v_E}{\partial y} + \frac{\partial w_E}{\partial z} = 0 \right) dz .$$

- Realizando a integral, chegamos a

$$w_E(\infty) - w_E(0) = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} u_E dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\infty} v_E dz \right)$$

- Observemos que os termos entre parênteses se referem à divergência do transporte de Ekman bêntico.

Bombeamento de Ekman Bêntico (2)

- Assim, substituímos os transportes zonal e meridional por suas as expressões matemática para obter

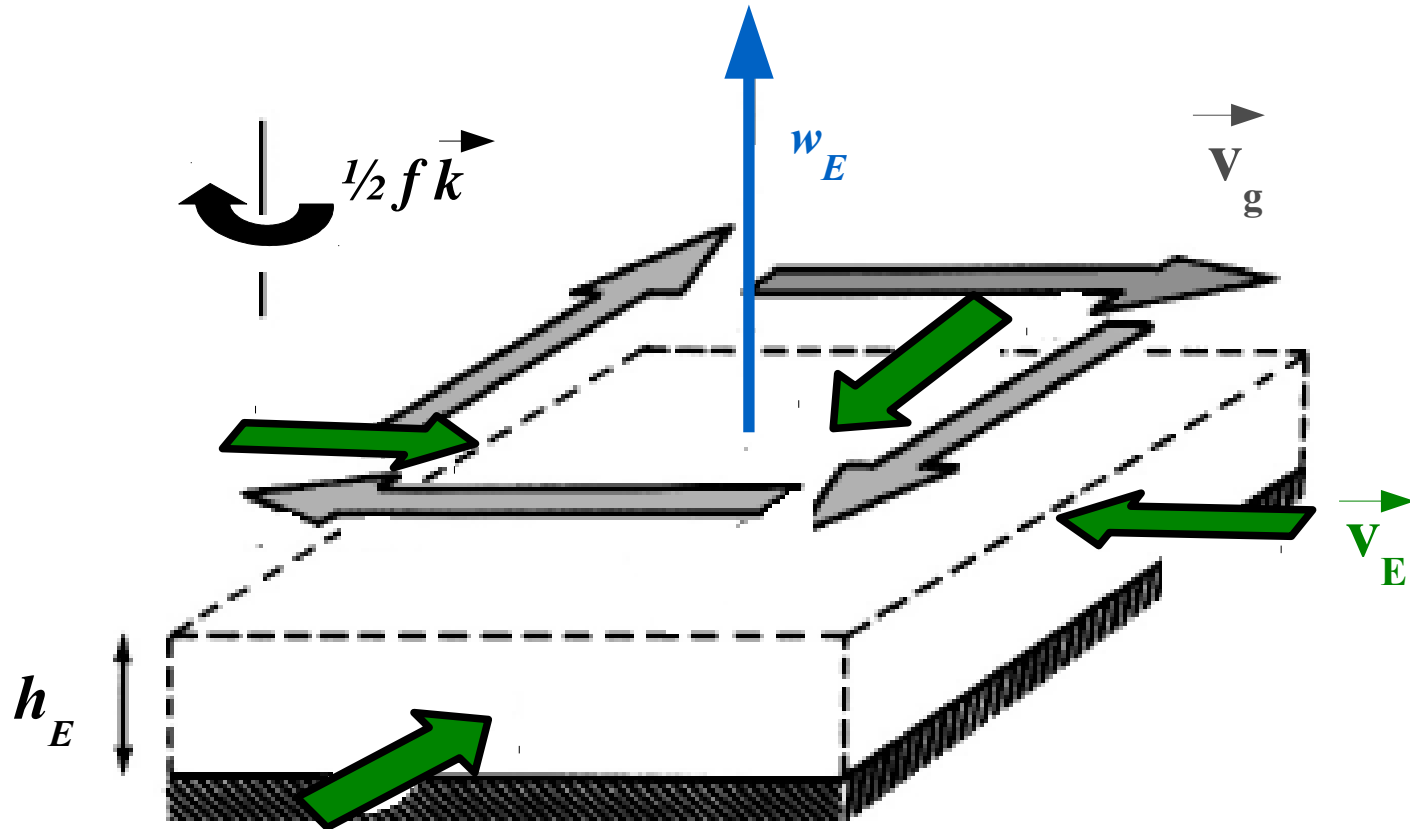
$$\begin{aligned}
 w_E(\infty) &= - \left(\frac{\partial U_E}{\partial x} + \frac{\partial V_E}{\partial y} \right) \\
 &= - \frac{h_E}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-u_g - sv_g) + \frac{\partial}{\partial y} (-v_g + su_g) \right] \\
 &= - \frac{h_E}{2} \left[\underbrace{- \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right)}_{\nabla \cdot \vec{v}_g = 0} - s \underbrace{\left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right)}_{\nabla \times \vec{v}_g \neq 0} \right],
 \end{aligned}$$

- onde o primeiro termo do colchetes é a divergência do mov. Geostrófico, que é nula, e o segundo, a vorticidade deste. Esta só será nula no raro caso em que a corrente for espacialmente homogênea. Assim, finalmente, chegamos a

$$w_E(\infty) = s \frac{h_E}{2} \zeta_g.$$

Bombeamento de Ekman Bêntico (3)

induzido a um vórtice ciclônico no HS

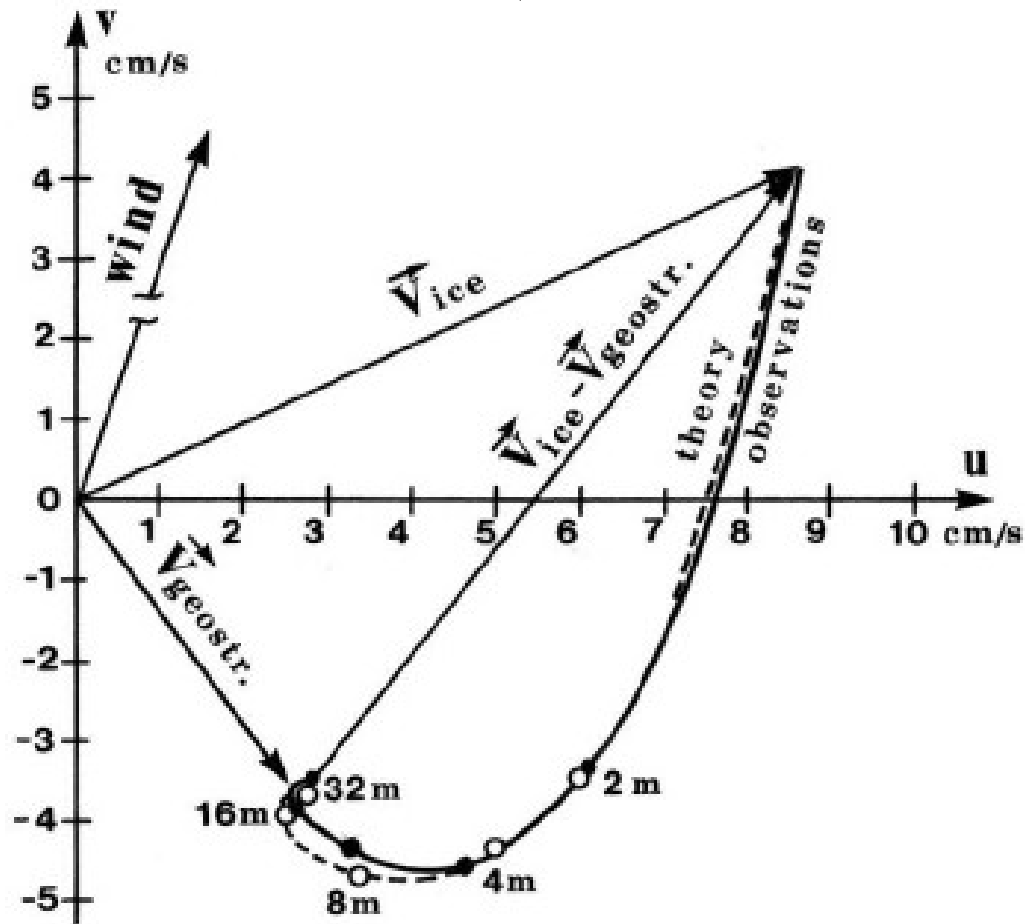


Hemisfério Sul

A Teoria de Ekman vs. Observações

- Os modelos da teoria clássica, apesar de geniais, carregam em si alto grau de idealização. Consequentemente, raramente são capazes em detalhe de reproduzir satisfatoriamente as observações.
- É por isso que os resultados mais robustos de Ekman são aqueles devido ao transporte de volume . Raras são as observações da espiral e quando são conseguidas, a teoria clássica apenas as reproduz qualitativamente. Um dos poucos casos de aparente sucesso na reprodução da espiral é devido à Huskins (1966) no Mar Ártico (lat. 83,4° N), exibido na página seguinte.
- Mas, na maioria dos escoamentos, dois são os fatores que são considerados responsáveis por substanciais diferenças entre as observações e sua reproduzibilidade pela teoria clássica: **turbulência** e **estratificação**.

A Teoria de Ekman vs. Observações



Região do Mar Ártico: 84,3° N

Fonte: Huskins (1966)

A Teoria de Ekman vs. Observações

EFEITOS DA TURBULÊNCIA

- Como estudamos ao longo da disciplina, os escoamentos geofísicos são sempre turbulentos. Tanto assim que derivamos as tensões de Reynolds e as parametrizamos os coeficientes turbulentos A_V substituindo os muito menores coeficientes laminares ν .
- Entretanto, na camada de Ekman, a turbulência está longe de ser homogênea, como a aproximação por $A_V = \text{constante}$ sugere. A turbulência é maior onde o cisalhamento de velocidades é maior.
- Uma grande quantidade de modelos empíricos têm sido propostos para explicar e/ou se adaptar as frequentes discordâncias entre teoria e observações.
- De qualquer modo, as discordâncias estão centradas em dois resultados icônicos da teoria clássica: **o ângulo de 45°** entre a tensão de cisalhamento e a corrente de deriva em superfície e valor da **escala de decaimento da camada de Ekman (h_E)**, que se multiplicada por π nos fornece a profundidade efetiva.

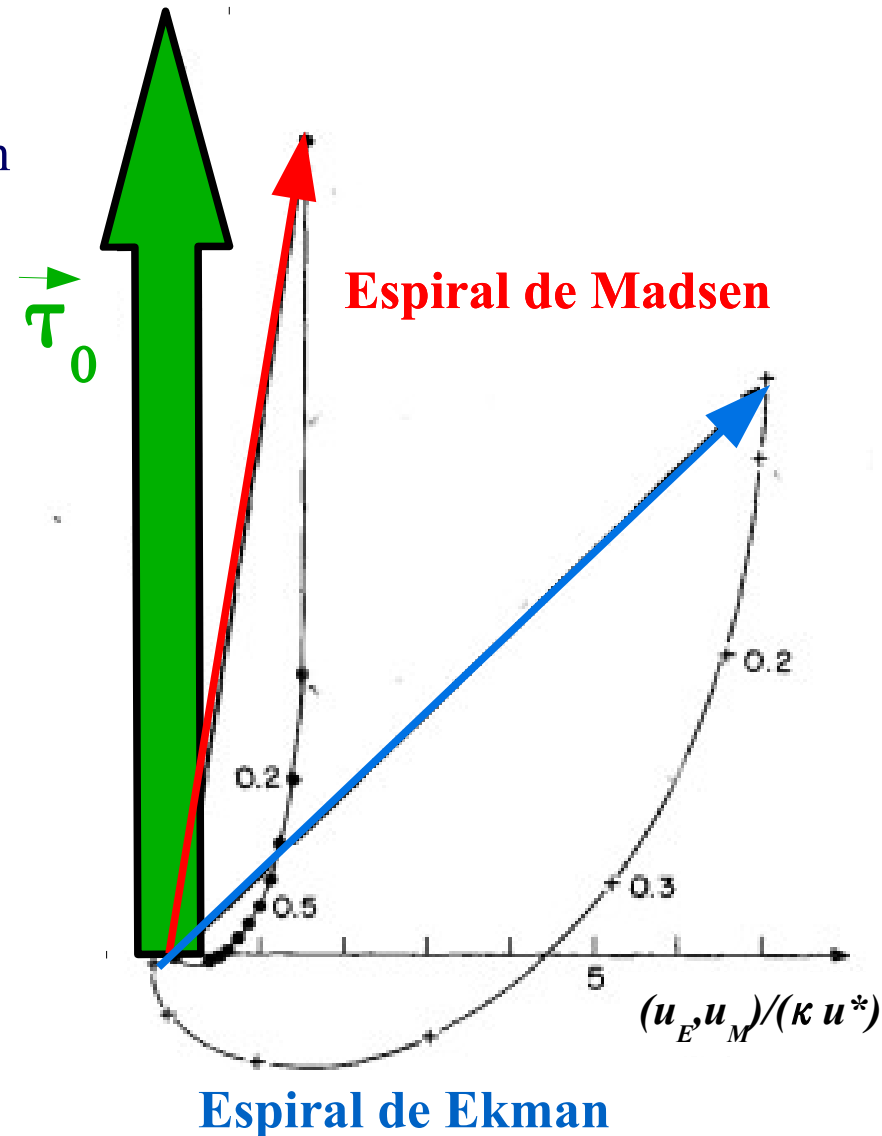
O Modelo de Madsen (1977)

- O modelo de Madsen (1977) foi um dos primeiros a tentar mostrar as diferenças no ângulo da corrente e a discordância nos valores da espessura de decaimento propondo uma variação linear para A_V . Valendo-se da teoria de comprimento de mistura, propõe que tenha o valor nulo na superfície e atinja seu máximo na base da camada de Ekman
- Embora, o conhecimento moderno de turbulência sugira o exato oposto, o modelo de Madsen mostrou que a não homogeneidade da turbulência na camada limite poderia sim ser uma das causas das importantes diferenças entre os resultados da teoria clássica e as observações.
- Suas duas principais conclusões foram: (i) o ângulo que a corrente de deriva em $z=0$ faz com a velocidade do tensão de cisalhamento vento é menor que o da teoria clássica (ele encontrou algo como 20°); e a espiral decai muito mais rapidamente que a espiral clássica, o que obviamente implica numa menor espessura de decaimento.
- Na página seguinte, apresentamos resultados obtidos analiticamente para o modelo de Madsen.

Modelo de Madsen (1977)

Resultados

- O ângulo que a corrente de deriva em superfície faz com a tensão de cisalhamento do vento é de $\sim 10^\circ$.
- A espessura de decaimento da camada de Ekman h_E estimada foi de cerca de apenas $1/3$ daquela da teoria clássica.
- Em termo da intensidade das correntes em superfície sua magnitude é cerca de 25% do que a da teoria clássica para várias intensidade de vento testadas.



Expressões Empíricas para h_E (1)

- A escala de decaimento da camada de Ekman vem sendo estimada usando conceitos de turbulência moderna e utilização da teoria do comprimento de mistura.
- A **formulação mais usada para a estimativa de h_E** é dada por

$$h_E = \kappa \frac{u^*}{|f_0|},$$

onde $\kappa = 0,4$ é a constant de von Kármán, e a velocidade friccional u^* é definida como

$$u^* = \sqrt{\frac{|\vec{\tau}_0|}{\rho_0}}.$$

-
-
- Essa expressão advém da teoria de turbulência onde se assume que A_V se relaciona com o diâmetro do maior vórtice possível turbulento d_ζ :

$$\begin{aligned} A_V &\approx u^* d_\zeta, \\ &\approx u^* h_E. \end{aligned}$$

A Teoria de Ekman vs. Observações

EFEITOS DA ESTRATIFICAÇÃO

- A presença da estratificação inibe movimentos verticais e, portanto, reduz o misturamento vertical por turbulência.
- Também é responsável por movimentos em níveis diferentes apresentarem menor coerência vertical.
- Como consequência, haverá redução da escala de decaimento da camada de Ekman e tenderá a fazer com que o giro do vetor velocidade na espiral com a profundidade aumente.
- Assim, outras fórmulas empíricas para h_E foram desenvolvidas com o objetivo de incluir o efeito da estratificação além dos conceitos de teoria de turbulência. Buckley et al. (2020) fez uma revisão sobre o tema e aplicou a neoclássica fórmula de Pollard et al. (1972) na Baía de Bengala onde há gradientes importantes na densidade na camada superior do oceano devido à salinidade.

Expressões Empíricas para h_E (2)

- A fórmula empírico-teórica usada para calcular a escala de decaimento da camada limite superior considerando o oceano estratificado, segundo Buckley et al. (2020), é

$$h_E = \gamma \frac{u^*}{|f_0|^\alpha N^{(1-\alpha)}},$$

onde γ e α são parâmetros a serem determinados por ajustes entre observações e perfis teóricos de aprofundamento da camada de mistura. Já N é o valor da estratificação da camada de mistura, ou seja, entre a densidade em superfície e aquela logo abaixo do seu máximo gradiente, que caracteriza o topo da pycnoclina sazonal ($z=h_{CM}$):

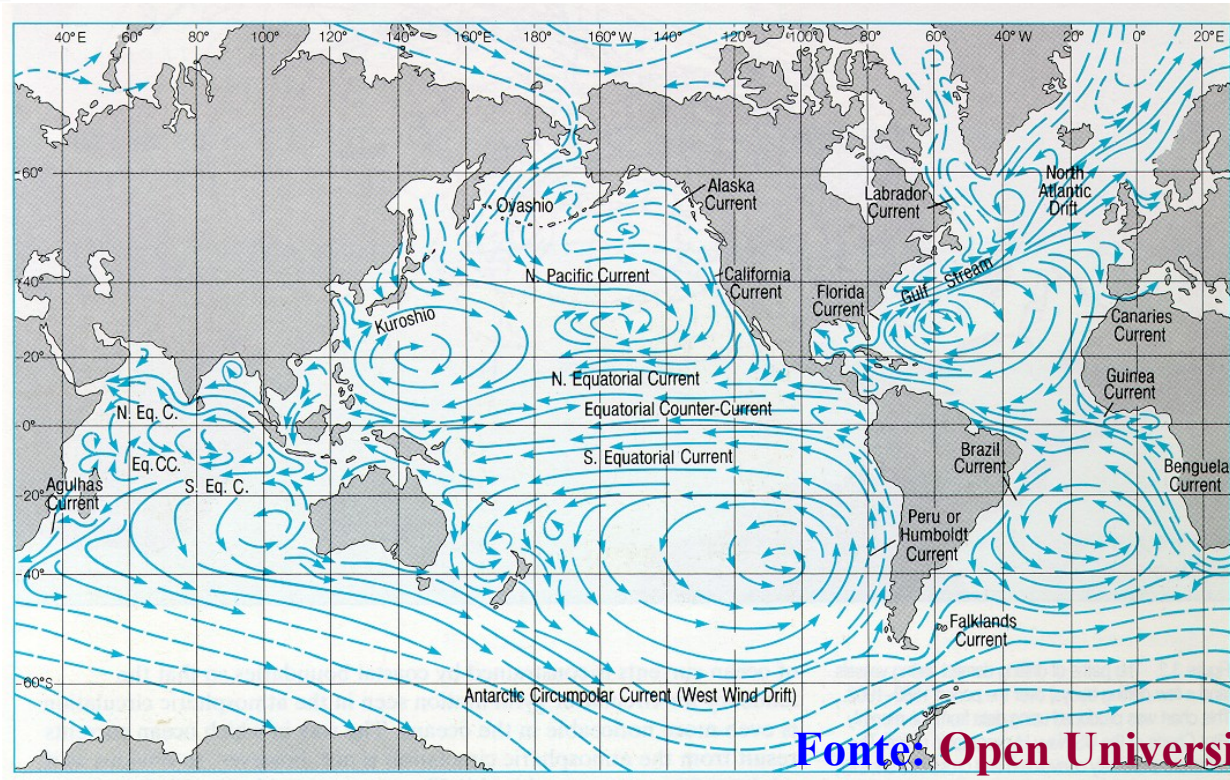
$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \frac{\rho(z=0) - \rho(z=h_{CM})}{h_{CM}}},$$

- Por simplicidade é usual para termos práticos e avaliações rápidas considerarmos $\gamma=1$ e $\alpha=0,5$:

$$h_E = \frac{u^*}{\sqrt{|f_0| N}}.$$

A Circulação Gerada pelo Vento

A Circulação no Oceano Superior



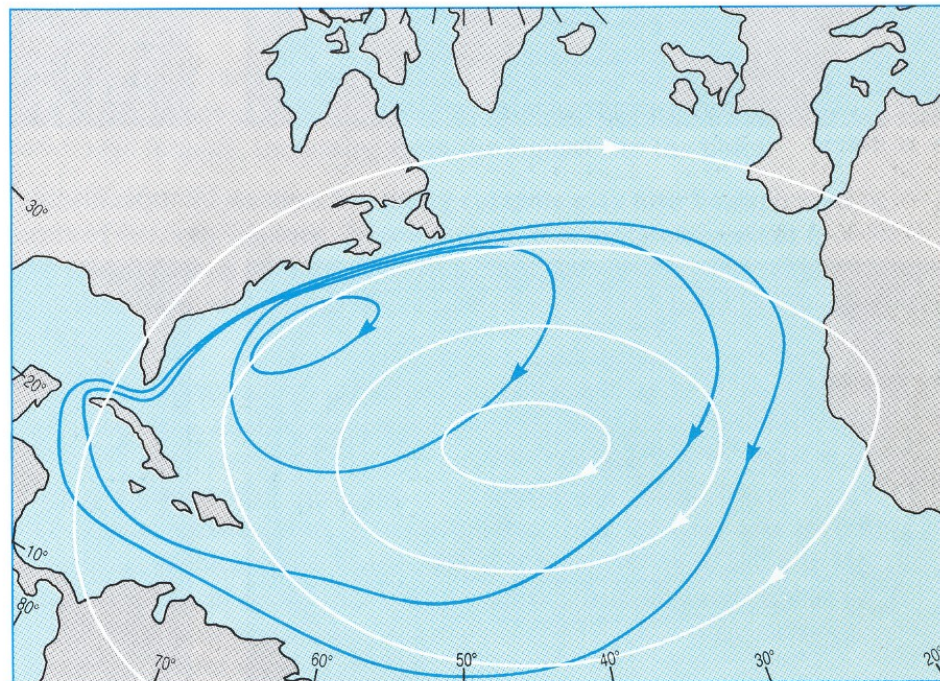
- A circulação no dito oceano superior do oceano global é dominada pelo forçamento pelo vento.
- Notadamente, são observados grandes giros anticiclônicos centrados nas latitudes subtropicais de cada hemisfério e de cada bacia.

A Circulação no Oceano Superior

- Estas feições são comumente chamadas de Giros Subtropicais.
- No limite equatorial destes giros, as correntes são aproximadamente zonais, partindo da borda leste das bacias oceânicas.
- No limite polar destes giros, as correntes tendem também a ser zonais, mas deixam a borda oeste das bacias oceânicas e/ou dão a volta no globo: a Corrente Circumpolar Antártica.
- Conectando as duas bordas, estão correntes de orientação basicamente meridional chamadas de correntes de contorno oeste e correntes de contorno leste.
- As correntes de contorno leste são correntes mais rasas e fracas que suas contrapartidas na outra borda e associadas a grandes sistemas de ressurgência.
- Nem sempre os padrões de circulação média, enfatizam a característica de que as correntes de contorno oeste são bem mais intensas que as de contorno leste. Estas correntes desempenham um papel crucial na transferência de calor no sentido equador-polos.
- Exploremos um pouco mais esta assimetria a seguir.

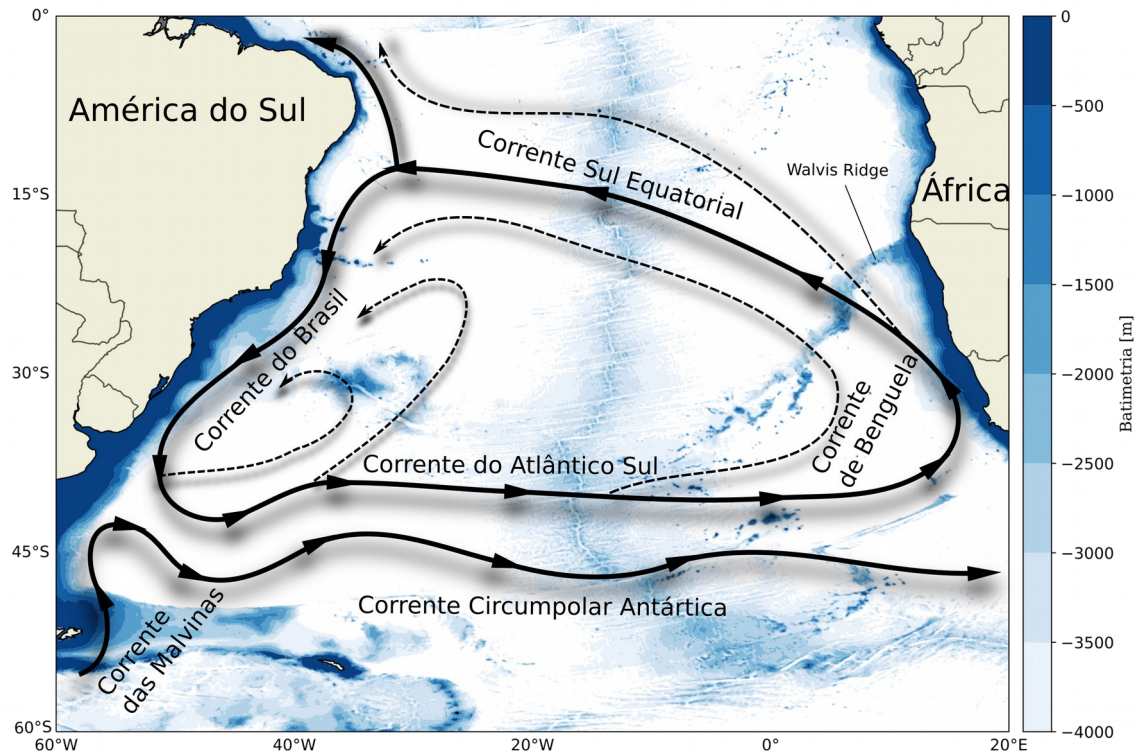
A Assimetria dos Giros Subtropicais

- Os giros subtropicais são forçados por grandes vórtices anticiclônicos na atmosfera, os centros de alta pressão subtropicais. Estes são simétricos e geralmente de formato elíptico.
- Já os giros oceânicos são assimétricos com as correntes na borda oeste da bacia muito mais intensas que suas contrapartidas de borda leste.



O Giro Subtropical do Atlântico Sul

- O Giro Subtropical do Atlântico Sul é forçado pela “Alta Subtropical do Atlântico Sul” (ASAS) na atmosfera.
- É composto de quatro correntes: a Corrente de Benguela, a Corrente Sul Equatorial, a Corrente do Brasil e a Corrente do Atlântico Sul.



As equações do movimento para o Giro Subtropical

- Vamos agora inicialmente usar argumentos qualitativos para explicar a existência dos giros subtropicais.
- Como estamos discutindo a circulação média, é natural que busquemos descrever os giros subtropicais como sistemas em equilíbrio dinâmico.
- Estas equações consistem na soma dos balanços geostrófico e de Ekman já estudados.
- Assim, as equações nesse modelo qualitativo simples seriam simplesmente:

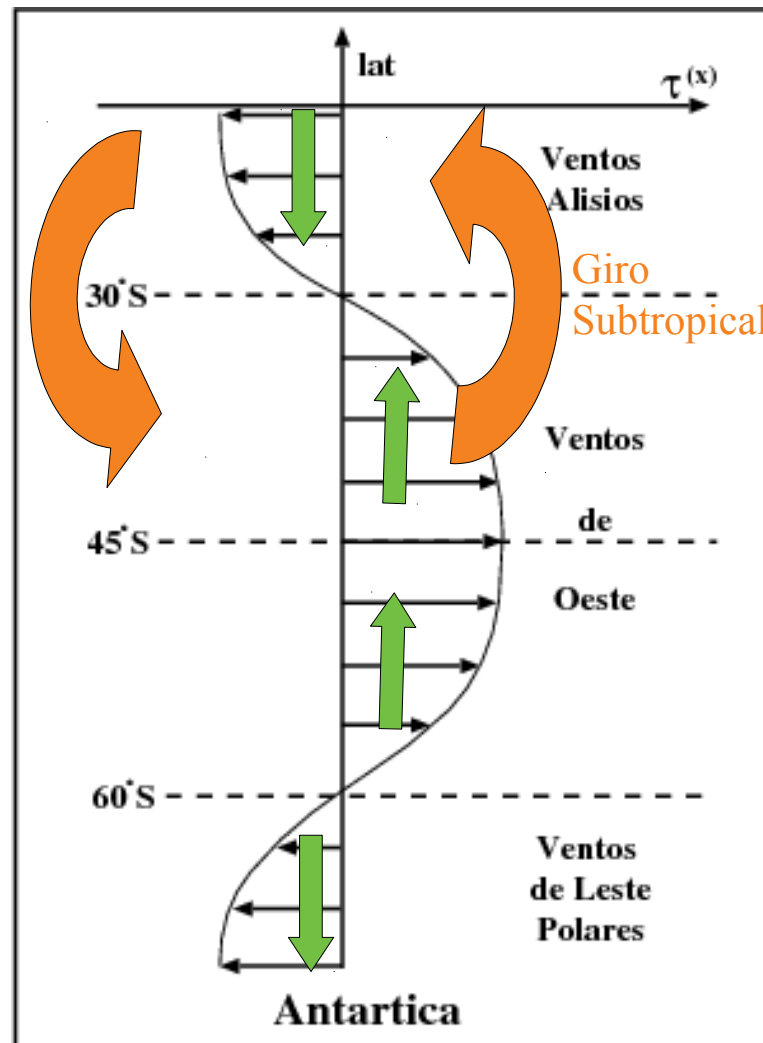
$$-s|f_0|(v_g + v_E) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau^x}{\partial z}$$

$$s|f_0|(u_g + u_E) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau^y}{\partial z}$$

A tensão de cisalhamento do vento no Atlântico Sul

convergência de Ekman

divergência de Ekman



baixa pressão oceanográfica

← corrente geostrófica

alta pressão oceanográfica

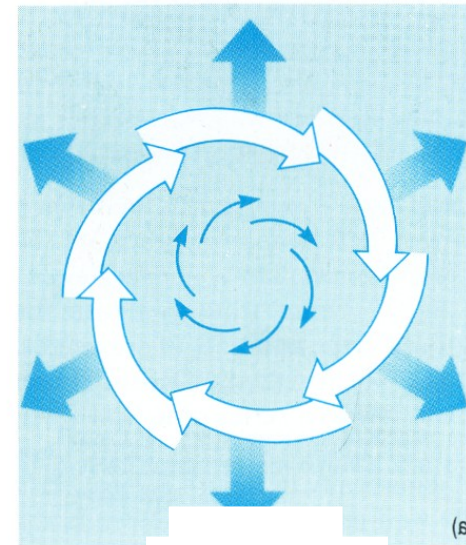
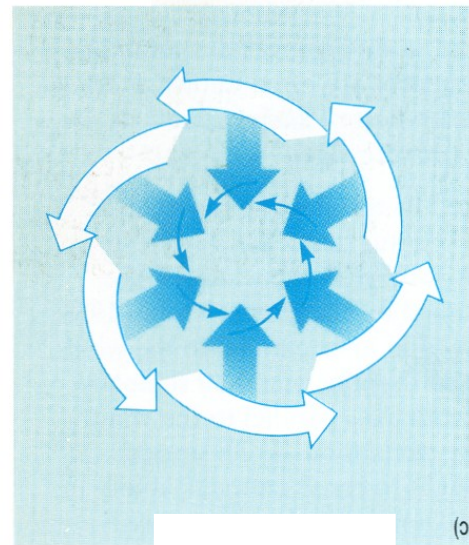
→ corrente geostrófica

baixa pressão oceanográfica

O Efeito dos Centros de Alta e Baixa Pressões

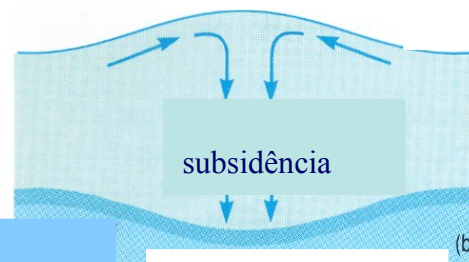
vento anticiclônico

vento ciclônico



alta pressão

baixa pressão



picnoclina

corrente geostrófica

vento

Transp.
de

Ekman

Vorticidade Relativa

- Os argumentos dinâmicos, através da equação geral do movimento, e portanto, conservação de momento linear, não explicam a assimetria dos giros oceânicos.
- É necessário, visto que estamos falando de giro, pensar em conservação de momento angular, ou numa versão mais simples, a conservação da velocidade angular no fluido oceânico.
- O análogo da velocidade angular (dos sólidos) nos fluidos é a **vorticidade**. Esta quantidade física é matematicamente definida como

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)}_{\xi} \vec{i} + \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)}_{\chi} \vec{j} + \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_{\zeta} \vec{k}$$

- Mais especificamente, esta vorticidade em oceanografia é denominada de **vorticidade relativa** (ao escoamento).

Vorticidade Planetária

- Para os escoamentos de mesoescala e grande escala, a componente mais importante do vetor vorticidade relativa é a componente vertical.
- A componente ζ é portanto paralela ao vetor velocidade angular do plano tangente local sob a aproximação do plano β .
- Esta componente vai competir com a tendência de girar imposta pela rotação do planeta e que já definimos localmente como

$$\vec{\Omega} = \Omega \operatorname{sen}\theta \vec{k} .$$

- A velocidade azimutal do planeta e por tanto do fluido planetariamente é dada por

$$\vec{v} = (\Omega \operatorname{sen}\theta \vec{k}) \times \vec{x} .$$

- Ou seja, é o produto vetorial entre a velocidade angular e o vetor deslocamento.

Vorticidades Planetária e Absoluta

- A vorticidade no fluido oceano devido à rotação do planeta é

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \nabla \times [(\Omega \operatorname{sen}\theta \vec{k}) \times \vec{x}] \\ &= 2\Omega \operatorname{sen}\theta \vec{k} \\ &= f\vec{k} \\ &= (f_0 + \beta y)\vec{k}.\end{aligned}$$

- Ou seja, dinamicamente o parâmetro de Coriolis é a **vorticidade planetária**, ou a vorticidade imposta pelo planeta girante.
- Assim, podemos definir a **vorticidade absoluta** como

$$\vec{\omega}_a = \xi\vec{i} + \chi\vec{j} + (\zeta + f)\vec{k}$$

- que é a soma da vorticidade relativa e vorticidade planetária.

Conservação de Vorticidade Absoluta

- Consideremos as componentes horizontais da equação geral do movimento na seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - (f_0 + \beta y)v &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + A_H \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + (f_0 + \beta y)u &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + A_H \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

- Para chegar à expressão de conservação de vorticidade absoluta, precisamos tomar o rotacional das duas equações acima. Mais respectivamente,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y} [\text{componente x}] \\ + \\ \frac{\partial}{\partial x} [\text{componente y}] \end{aligned} .$$

Conservação de Vorticidade Absoluta

- Assim, depois de alguma álgebra interessante chegamos a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \vec{v} \cdot \nabla \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + f \frac{\partial v}{\partial y} + \beta v = + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} + A_H \nabla^2 \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + f \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} + A_H \nabla^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

- Somando as duas equações e usando a definição de ζ , obtemos

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \zeta + \beta v = -(f + \zeta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + A_H \nabla^2 \zeta.$$

Conservação de Vorticidade Absoluta

- Podemos reescrever a equação da conservação da vorticidade absoluta de forma mais elegante e fisicamente interessante. Para isso, usamos as seguintes definições já abordadas em nosso curso previamente.

$$\beta v = \frac{Df}{Dt}$$

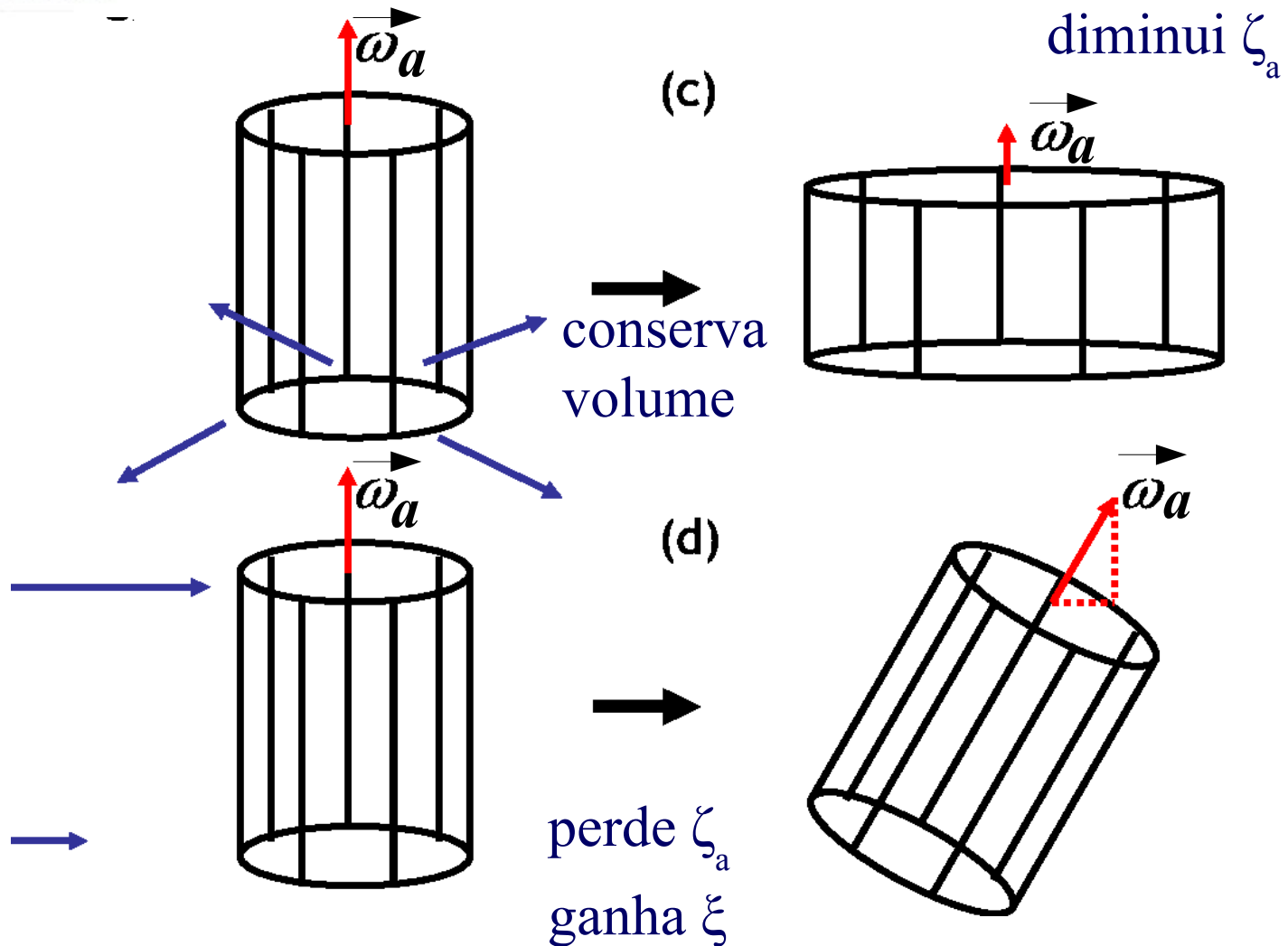
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \chi + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\xi + \frac{\partial w}{\partial y}$$

- E a forma final da equação é dada por

$$\frac{D}{Dt}(\zeta + f) = \underbrace{(\zeta + f) \frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{estiramento}} + \underbrace{\left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \chi \frac{\partial}{\partial y} \right) w}_{\text{inclinação}} + \underbrace{A_H \nabla^2 \zeta}_{\text{difusão}} .$$

Estirramento e Inclinação



Dinâmica de Grande Escala

- Uma vez entendidos os termos que compõem a equação de conservação da vorticidade absoluta, procedamos a realizar a **análise de grande escala** desta equação. Sim, grande escala. Nosso objetivo agora é começar a construir modelos para explicar a estrutura assimétrica dos Giros Subtropicais do Oceano.
- Assim, assumindo que os termos de estiramento e advecção de vorticidade planetária tem a mesma ordem, chegamos a

$$\underbrace{\frac{D}{Dt}(\zeta + f)}_{\frac{U^2}{L^2}, \beta U} = \underbrace{(\zeta + f) \frac{\partial w}{\partial z}}_{\hat{\beta} \frac{U^2}{L^2}, \beta U} + \underbrace{\left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \chi \frac{\partial}{\partial y} \right) w}_{\hat{\beta} \frac{U^2}{L^2}} + \underbrace{A_H \nabla^2 \zeta}_{\frac{A_H U}{L^3}}$$

- Notemos que a variação total de vorticidade relativa, o estiramento associada à vorticidade relativa, a inclinação do tubo de vórtice e a difusão de vorticidade são pelo menos duas ordens de grandeza menores que os termos de advecção **de vorticidade planetária e estiramento do tubo de vórtice associado à vorticidade planetária**. A equação se torna linear, com dois termos apenas e extremamente simples!

Conservação de Vorticidade Absoluta em Grande Escala

- Assim, a equação da conservação de vorticidade absoluta em grande escala se torna simplesmente

$$\beta v = f_0 \frac{\partial w}{\partial z} .$$

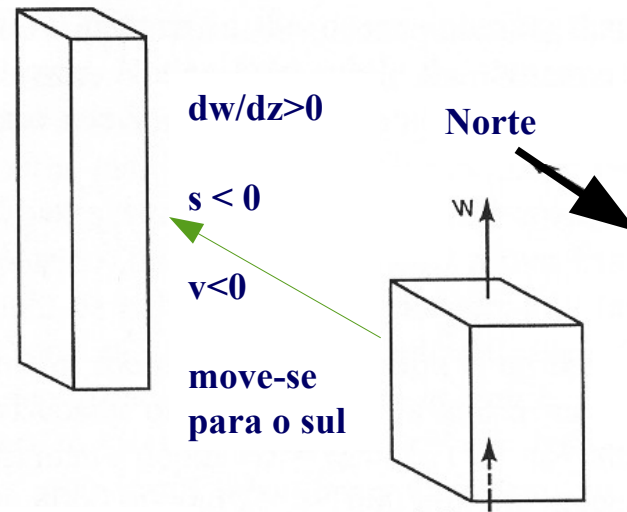
- Ou, usando a definição do número hemisférico, para obtermos

$$\beta v = s |f_0| \frac{\partial w}{\partial z} .$$

- A dinâmica desta equação é bastante simples e nos diz que se o tubo se estira ou se achatar, a coluna de fluido é obrigada a se deslocar para norte ou para sul a depender do hemisfério onde se encontra.

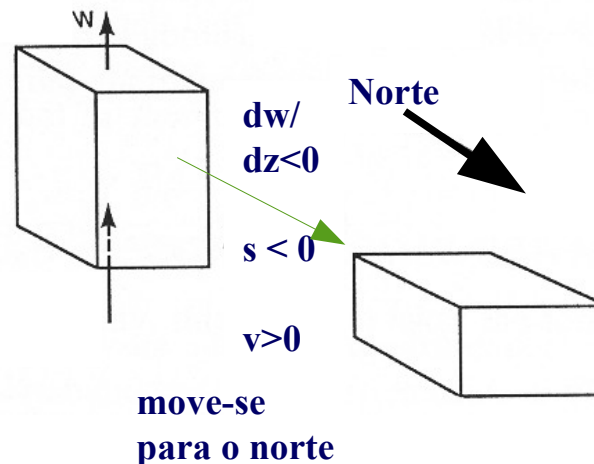
Dinâmica de Grande Escala

estiramento



Hemisfério Sul

achatamento

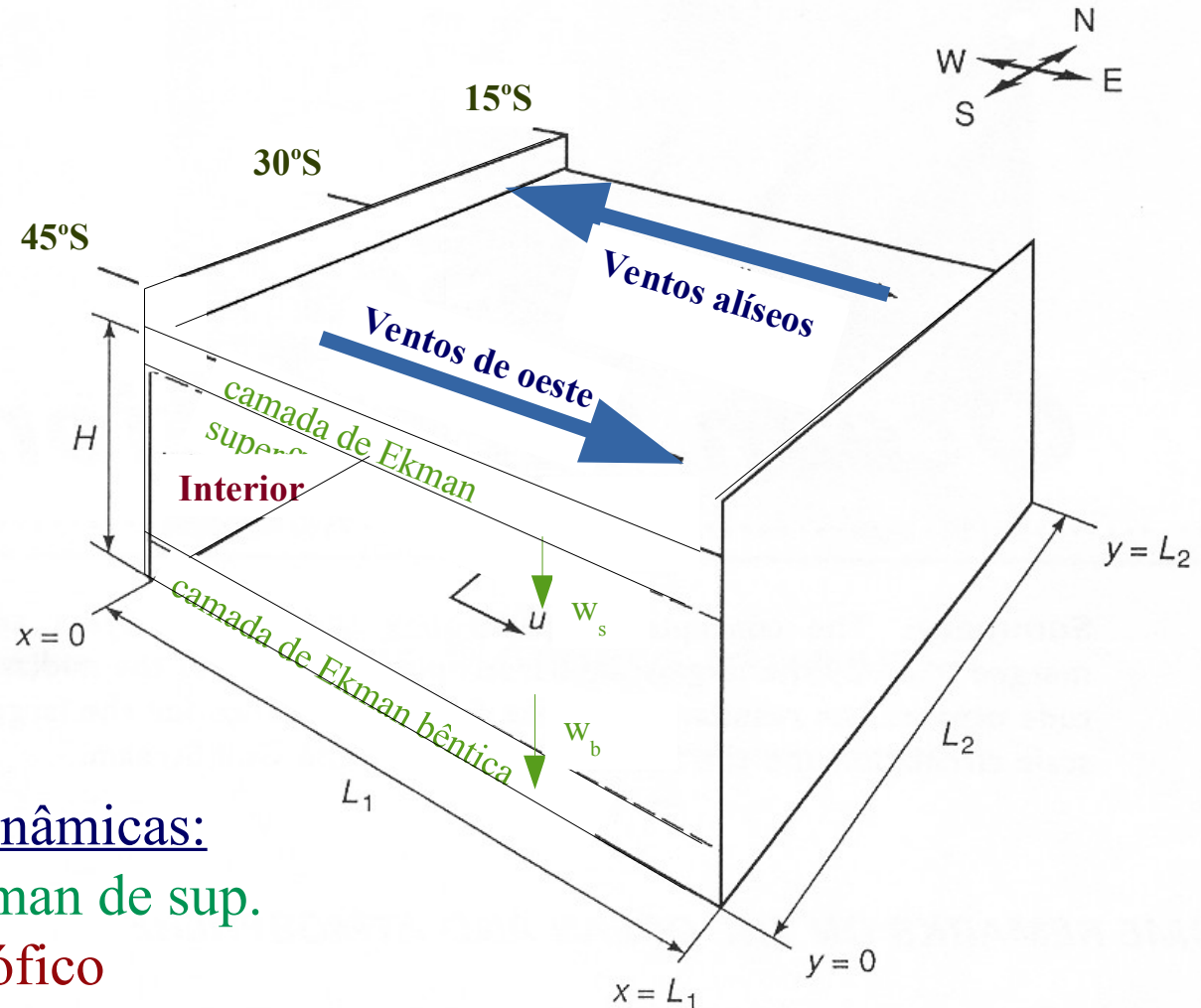


Adaptado de
Cushman-Roisin & Beckers
(2013)

Os Modelos do Giro Subtropical

Formulação

$$\rho = \text{const.} \\ = \rho_0$$



Três camadas dinâmicas:

- camada de Ekman de sup.
- interior geostrófico
- camada de Ekman de fundo

O Cenário Dinâmico

- Os ventos sopram sobre o oceano e estabelecem a camada de Ekman de superfície. Como a tensão de cisalhamento destes sobre a bacia têm rotacional diferente de zero, velocidade vertical descendente é formada e se comunica com as águas da camada do interior geostrófico.
- Na camada interior, a velocidade vertical só pode ser acomodada pela existência de convergências e divergências no plano β . Em outras palavras, é necessário que estabeleçamos um escoamento geostrófico nesta camada em resposta (ou reação) ao bombeamento de Ekman de superfície.
- Este escoamento geostrófico gerado atinge o fundo e seu atrito contra ele estabelece a camada de Ekman bêntica. Esta, em resposta à vorticidade das correntes geostróficas, gera velocidade vertical adicional nesta camada. Cabe ao escoamento geostrófico acomodá-la mantendo o balanço de volume.
- A relação entre as velocidades verticais e o escoamento geostrófico é dada pela equação de conservação de vorticidade absoluta em grande escala.

Explorando a Natureza Barotrópica do Modelo

- Partamos da equação da vorticidade de grande escala

$$\beta v = s|f_0| \frac{\partial w}{\partial z} ,$$

- E tomemos sua derivada vertical para obter

$$\beta \frac{\partial v}{\partial z} = s|f_0| \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} .$$

- Como o oceano é barotrópico, o teorema de Taylor-Proudman vale no interior geostrófico podemos afirmar que

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

ou seja,

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \text{const.}$$

- E, portanto w é uma função linear da profundidade.

Conservação de Vorticidade Absoluta no Giro Subtropical

- Com a linearidade de w , tanto faz avaliarmos a sua primeira derivada vertical usando um incremento infinitesimal, como avaliando-a entre a base da camada de Ekman de superfície e o topo da camada de Ekman bêntica. Logo,

$$\beta v = s|f_0| \frac{w_s - w_b}{H} .$$

- Portanto, w_s e w_b são os valores dos bombeamentos de Ekman nas bordas das duas camadas limites verticais, que já vimos serem dados por

$$w_s = \frac{1}{\rho_0 s |f_0|} \left(-\frac{\partial \tau^x}{\partial y} \right)$$
$$w_b = \frac{h_E}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) .$$

Conservação de Vorticidade Absoluta no Giro Subtropical

- Substituindo as expressões de bombeamento de Ekman na eq. da conservação de vorticidade absoluta, chegamos a

$$\beta v = \frac{1}{\rho_0 H} \left(-\frac{\partial \tau^x}{\partial y} \right) - \frac{s|f_0|h_E}{2H} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

que é a equação que descreve tanto os Modelos de Sverdrup como o de Stommel, os dois primeiros modelos que explicam a natureza dinâmica dos Giros Subtropicais. Entretanto, para resolver a equação, precisamos escrevê-la em termos de um única variável. Fazemos isso usando a função de corrente e obtemos

$$\beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0 H} \left(-\frac{\partial \tau^x}{\partial y} \right) - \frac{s|f_0|h_E}{2H} \nabla^2 \psi$$

- Procedamos agora a comparar a ordem de grandeza dos três termos que compõem a equação para começar a entender a dinâmica nela contida.

Conservação de Vorticidade Absoluta no Giro Subtropical

- Reescrevamos a eq. de conservação usando a quantidade L_s que chamaremos de largura da camada limite lateral de Stommel, ou seja,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0 \beta H} \left(-\frac{\partial \tau^x}{\partial y} \right) - s L_s \nabla^2 \psi,$$

onde

$$L_s = \frac{|f_0| h_E}{2\beta H} = \mathcal{O}(10^{-4} \text{m}).$$

- A razão entre o primeiro e o terceiro termos é

$$\frac{L_s \nabla^2 \psi}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} = \mathcal{O} \frac{L_s}{L} = \mathcal{O}(10^{-2}) \ll 1$$

- Ou seja, o terceiro termo é bem pequeno se comparado à advecção de vort. planetária.

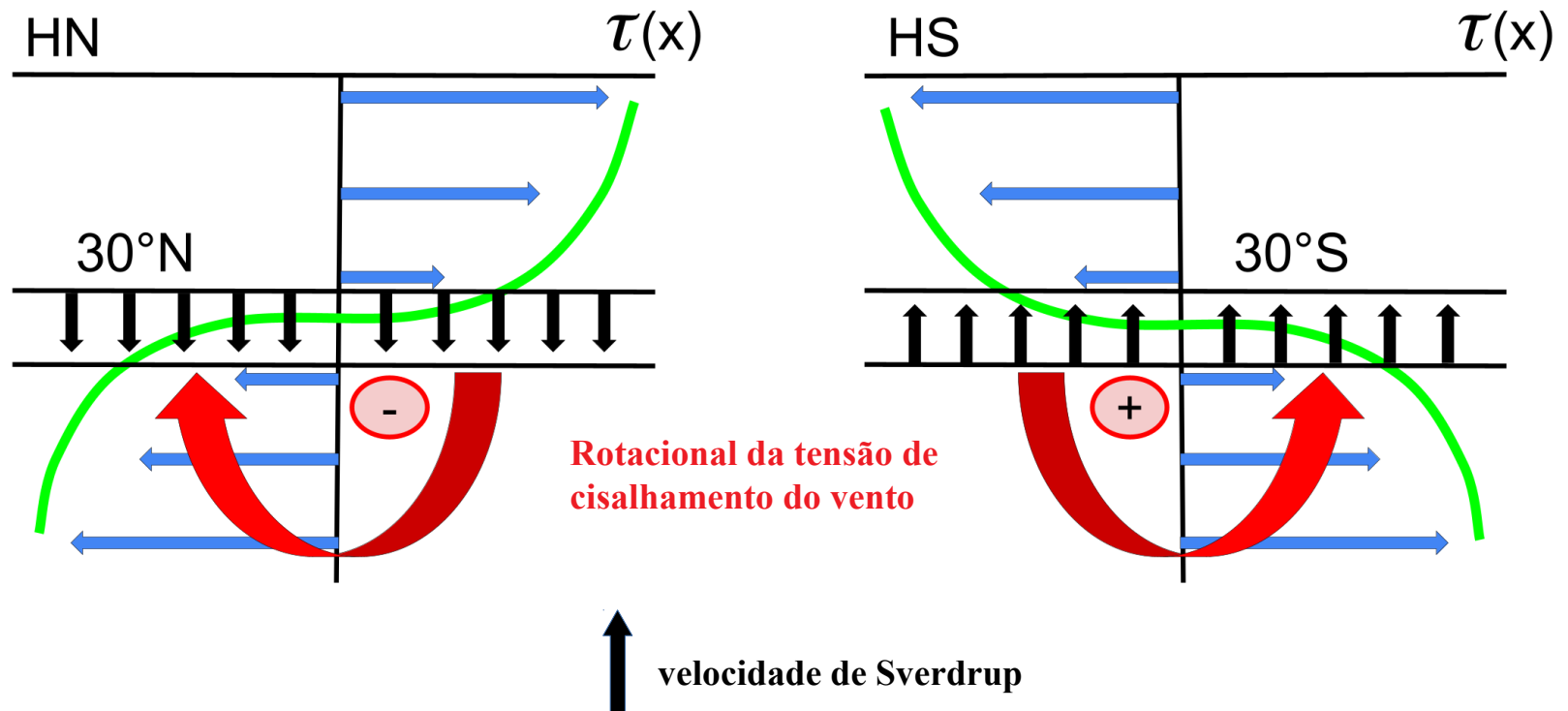
O Modelo de Sverdrup

- Portanto, o balanço dominante é entre advecção da vorticidade planetária e o achatamento do interior geostrófico causado pelo bombeamento de Ekman negativo:

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0 \beta H} \left(-\frac{\partial \tau^x}{\partial y} \right).$$

- Se achatamos a coluna no hemisfério sul, para conservar vorticidade em grande escala, a coluna precisa se deslocar para o norte, ou no caso, em direção ao equador ($v > 0$). A expressão acima é conhecida como a “**Relação de Sverdrup**”. No hemisfério norte, a coluna também é achatada, mas esta se desloca para o sul e, portanto, também na direção ao equador.
- Podemos assim dizer que as velocidades meridionais de Sverdrup é uma banda de velocidades meridionais ocorrentes entre os máximos dos alíseos e dos vento de oeste. Notemos também que onde o rotacional é zero, não há velocidade meridional. Portanto, linhas de rotacional zero são zonas delimitadoras dos giros oceânicos.

O Modelo de Sverdrup



O Modelo de Sverdrup

- Do ponto de vista matemático, a equação de Sverdrup é de fácil integração em x para obtenção da expressão da função de corrente, que é dada por

$$\psi = \frac{1}{\rho_0 \beta H} \left(-\frac{\partial \tau^x}{\partial y} \right) x + P_1(y),$$

onde $P_1(y)$ é a constante de integração.

- A velocidade zonal, faltante ainda, é obtida usando a relação entre esta componente e a função de corrente:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{\rho_0 \beta H} \left(\frac{\partial^2 \tau^x}{\partial y^2} \right) x - \frac{\partial P_1}{\partial y}.$$

- Falta encontrarmos a constante $P_1(y)$, onde temos de aplicar formalmente a condição de contorno.

O Modelo de Sverdrup

- Assim, como mencionado aplicamos a condição de contorno no lado leste, ou seja

$$u = 0 \text{ em } x = L_1$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{1}{\rho_0 \beta H} \left(-\frac{\partial^2 \tau^x}{\partial y^2} \right) L_1$$

$$P_1 = \frac{1}{\rho_0 \beta H} \left(\frac{\partial \tau^x}{\partial y} \right) L_1 \quad .$$

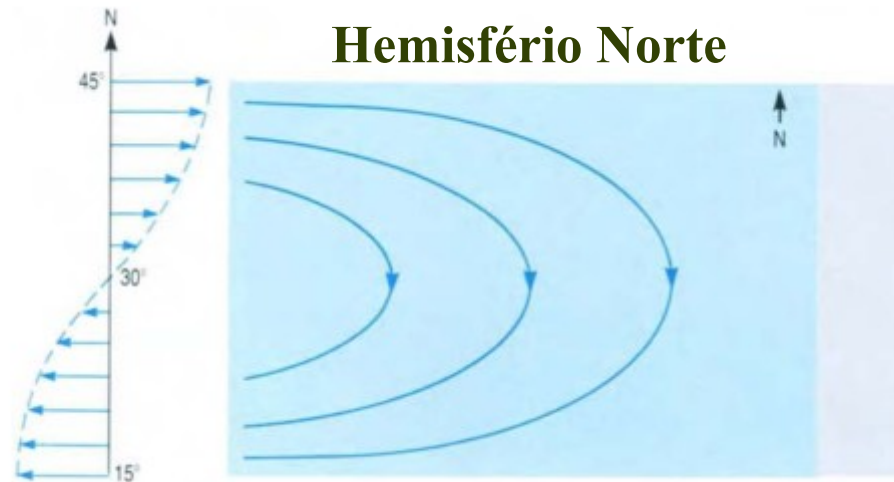
- Assim, completamos o modelo de Sverdrup, quem 1947, explicou pela primeira vez a dinâmica de manutenção dos giros oceânicos. Apesar de ser amplamente utilizado para os giros subtropicais, o artigo original do Sverdrup teve como objetivo explicar a Contra-corrente Norte Equatorial e o Giro Tropical.

Características da Solução de Sverdrup

- A solução de Sverdrup advém da integração de uma EDO de primeira ordem. Logo, só há uma função de integração e apenas uma única condição de contorno a ser satisfeita.
- Como consequência, a condição de velocidade normal à costa nula só pode ser obedecida ou em $x=0$ ou em $x=L_1$.
- Notemos também que $v>0$ em toda a bacia, exceto nos limites $y=0$ e $y=L_2$, onde é zero.
- Portanto, a continuidade é ferida e a solução de Sverdrup para ser fisicamente válida precisa manter o domínio aberto em um de seus extremos meridionais.
- Observacionalmente, sabemos que as correntes de contorno oeste são intensas e estreitas e o modelo não as resolve. Deixamos, assim, o **domínio aberto do lado oeste**.
- Se o vento não tiver vorticidade, $v=0$ e o escoamento acontece ao longo das linhas de $f(y)=y=constante$. Trata-se de movimento geostrófico zonal livre.
- Já na Relação de Sverdrup, o fluido se move cruzando as linhas de $y=constante$, e trata-se de movimento geostrófico meridional forçado.

A Solução de Sverdrup

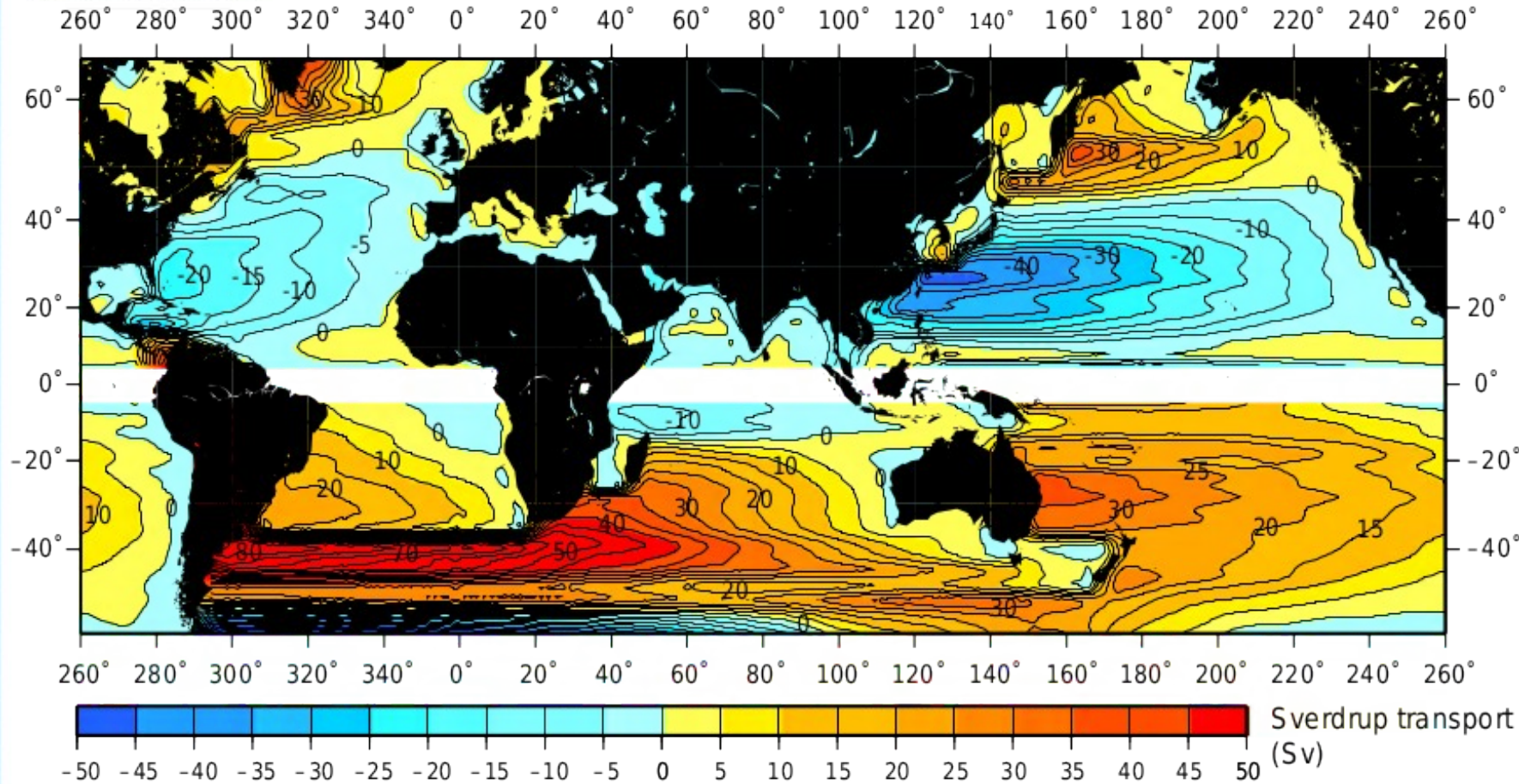
- A solução de Sverdrup para um vento senoidal simulando alíseos de leste e os ventos de oeste para o Atlântico Norte está representada abaixo. Notem que a Corrente do Golfo não é reproduzida.



Fonte: Open
University (2004)

- Como todo o transporte Sverdrupiano tem de retornar pela corrente de contorno oeste, Sverdrup as chamou de “correntes de retorno” do transporte interior.

O Oceano Global Segundo Sverdrup



Fonte: Talley (2011)

O Modelo de Stommel

- Voltemos a analisar a equação

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0 \beta H} \left(-\frac{\partial \tau^x}{\partial y} \right) - sL_s \nabla^2 \psi$$

- Observemos que se retemos o termo do bombeamento de Ekman bântico, obtemos uma EDP de segunda ordem e conseguimos resolver as condições de contorno para ambos os lados da bacia. Essa foi a bela sacada de Stommel (1948).
- No entanto, já havíamos visto que o coeficiente da derivada de segunda ordem é pequeno. Logo, este termo será relevante se as derivadas segundas da função de corrente forem gigantes.
- Podemos supor que estes efeitos de enorme vorticidade relativa ocorrerão confinados numa região estreita da bacia na borda oeste. Ou, em outras palavras, devemos dizer que o bombeamento de Ekman bântico estabelece uma camada limite lateral oeste!

O Modelo de Stommel

- Vamos montar o problema. Consideremos o mesmo vento senoidal do Modelo de Sverdrup e a bacia retangular fechada idealizada de nosso modelo de 3 camadas dinâmicas.
- Pelo fato dos contornos laterais serem meridionais, o termo envolvendo a derivada segunda em y da função de corrente (que seria a derivada primeira da velocidade zonal) pode ser desprezado. Assim, saímos de uma EDP para uma EDO.
- Estabelecemos assim dois balanços em nosso modelo:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0 \beta H} \left(-\frac{\partial \tau^x}{\partial y} \right)$$

interior Sverdrupiano

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -sL_s \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

camada limite oeste

- O balanço do interior Sverdrupiano, nós já calculamos. Falta o balanço da camada limite oeste;

O Modelo de Stommel

- A equação da camada limite oeste tem solução geral conhecida da forma

$$\psi = P_2(y) + P_3(y)e^{\mp s \frac{x}{L_s}} .$$

- Como esta é uma equação de segunda ordem, reparem que temos duas funções de integração.
- Determinamos P_2 tomando o limite de que $x \gg L_s$ e, assim, ψ se torna contínua (como deve ser!) entre os dois subdomínios do modelo. Isso nos leva a

$$P_2(y) = P_1(y) .$$

- E, finalmente, encontramos P_3 aplicando a condição de contorno no lado oeste:

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{em} \quad x = 0 \\ P_3(y) &= -P_1(y) . \end{aligned}$$

A Solução de Stommel

- E, portanto, a solução completa do Modelo de Stommel é dada por

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{L_1}{\rho_0 \beta H} \frac{\partial \tau^x}{\partial y} \left(1 - \frac{x}{L_1} - e^{-\frac{x}{L_s}} \right) \\ u &= -\frac{L_1}{\rho_0 \beta H} \frac{\partial^2 \tau^x}{\partial y^2} \left(1 - \frac{x}{L_1} - e^{-\frac{x}{L_s}} \right) \\ v &= -\frac{1}{\rho_0 \beta H} \frac{\partial \tau^x}{\partial y} \left(1 - \frac{L_1}{L_s} e^{-\frac{x}{L_s}} \right).\end{aligned}$$

- Observemos que as equações acima representam a solução de Sverdrup somada à solução da camada limite oeste, esta imposta pelo bombeamento de Ekman bêntico.

Pensando Vorticidade

- Voltemos à eq. da vorticidade absoluta em grande escala dada por

$$\beta v = s |f_0| \frac{w_s - w_b}{H} .$$

- O Modelo de Stommel pode ser resumido na forma dos dois balanços:

$$\beta v \approx s \frac{|f_0|}{H} w_s$$

interior Sverdrupiano

e

$$\beta v \approx -s \frac{|f_0|}{H} w_b .$$

camada limite oeste

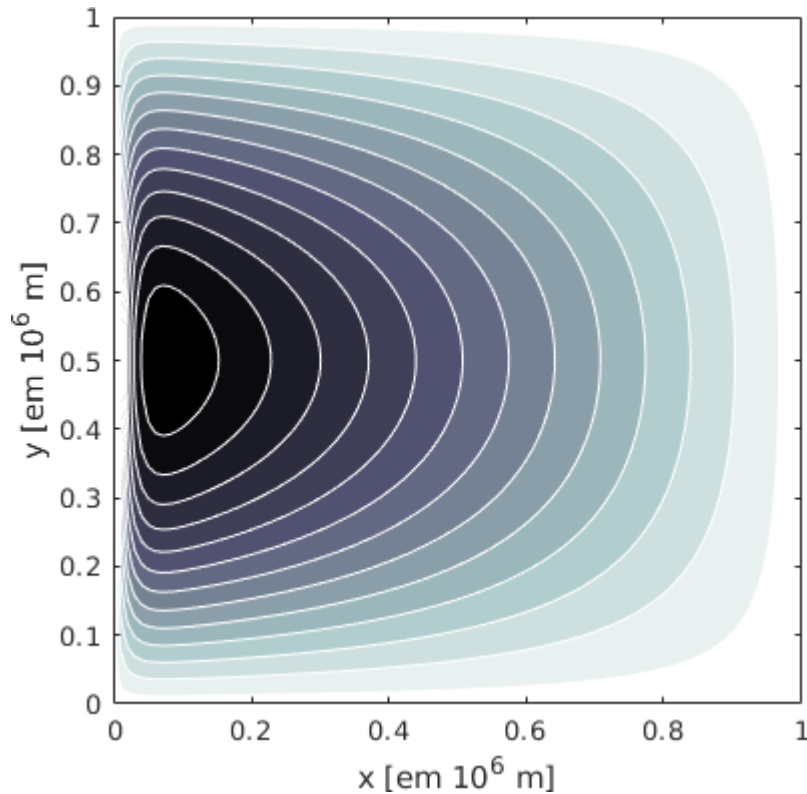
- E se a Terra fosse plana?

$$\beta = 0 \rightarrow w_s = w_b$$

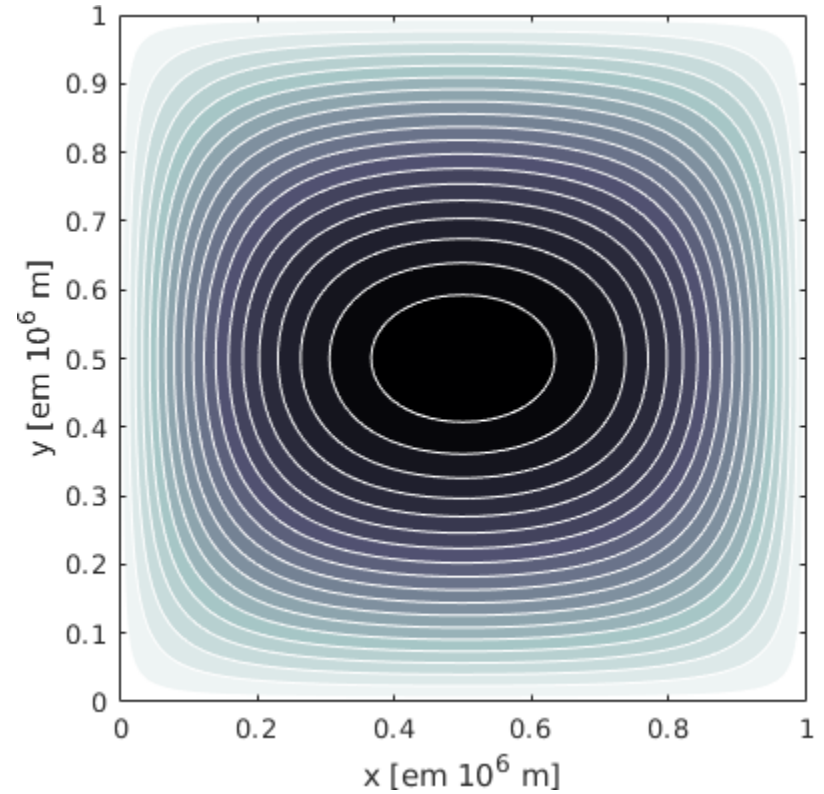
Não há assimetria no giro.

- Concluimos, assim, que é a esfericidade da Terra o fator determinante para que o giro seja assimétrico. Ou seja, é o efeito β !

A Solução de Stommel



Plano β



Plano f

O Cenário da Intensificação da Borda Oeste

- O sistema de ventos em grande escala gera tensão de cisalhamento na superfície do oceano.
- Como a água do mar é ligeiramente viscosa e a rotação é importante, uma delgada camada de Ekman se forma sob a ação direta do vento. Esta tem ~30 m de espessura.
- O efeito da rotação causa convergência nesta camada, resultando em bombeamento de Ekman em direção ao interior geostrófico do oceano.
- Tal efeito faz com que as parcelas de fluido no interior sejam comprimidas. Em resposta e para conservar volume, estas se achatam e alargam. Para conservar vorticidade, a parcela precisa se deslocar em direção ao Equador.
- A camada de Ekman bêmica é determinante no estabelecimento da direção da velocidade zonal. O bombeamento de Ekman no fundo estabelece uma camada limite lateral, que precisa ficar do lado oeste.
- As parcelas atingem o limite equatorial da bacia e guinam para oeste, se agrupam e adentram a camada limite lateral.
- O escoamento formado por elas se torna uma corrente de contorno oeste intensa e dirigida ao polo.
- A corrente de contorno é tão intensa que provoca um estiramento nas parcelas do interior geostrófico por conta de $w_b < 0$.
- Esta viagem direção ao polo faz com que as parcelas retomem suas alturas originais, antes do achatamento pelo vento. Neste limite do domínio, as parcelas deixam a camada limite rumando para oeste, passam novamente a sofrer a influência do vento e reiniciam a viagem.

O Modelo de Munk

- O Modelo de Stommel explicou a intensificação da borda oeste e o papel crucial de β em permitir o ajustamento do escoamento na camada geostrófica aos efeitos dos bombeamentos de Ekman de superfície e bêntico.
- O atrito com o fundo permitiu o estabelecimento de uma camada limite oeste, que reproduziu a intensificação da borda oeste das bacias e correntes como a do Golfo e a do Brasil.
- Entretanto, o atrito lateral no oceano real é mais relevante que o de fundo em estabelecer a camada limite. Este foi o problema estudado por Munk (1950).
- Para tanto, retornemos à nossa equação da vorticidade absoluta em grande escala na sua forma mais completa,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0 \beta H} \left(-\frac{\partial \tau^x}{\partial y} \right) - sL_s \nabla^2 \psi + \frac{A_H}{\beta} \nabla^4 \psi,$$

com o termo envolvendo o atrito lateral.

A Camada Limite de Munk

- Examinemos o coeficiente do termo envolvendo o operador biarmônico da função de corrente,

$$\frac{A_H}{\beta} = \mathcal{O}(10^{12} \text{ m}^3),$$

pois A_H é de ordem $10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

- Se extrairmos a raiz cúbica deste coeficiente, observaremos que a dimensão é metros, ou seja, é dimensão de largura. Trata-se da espessura de decaimento da camada limite de oeste de Munk, que definimos como

$$L_M = \sqrt[3]{\frac{A_H}{\beta}} = \mathcal{O}(10^4 \text{ m}).$$

Formulação do Modelo de Munk

- Assim, desprezando o termo do bombeamento de Ekman bêntico, chegamos à forma da equação de vorticidade absoluta para o Modelo de Munk:

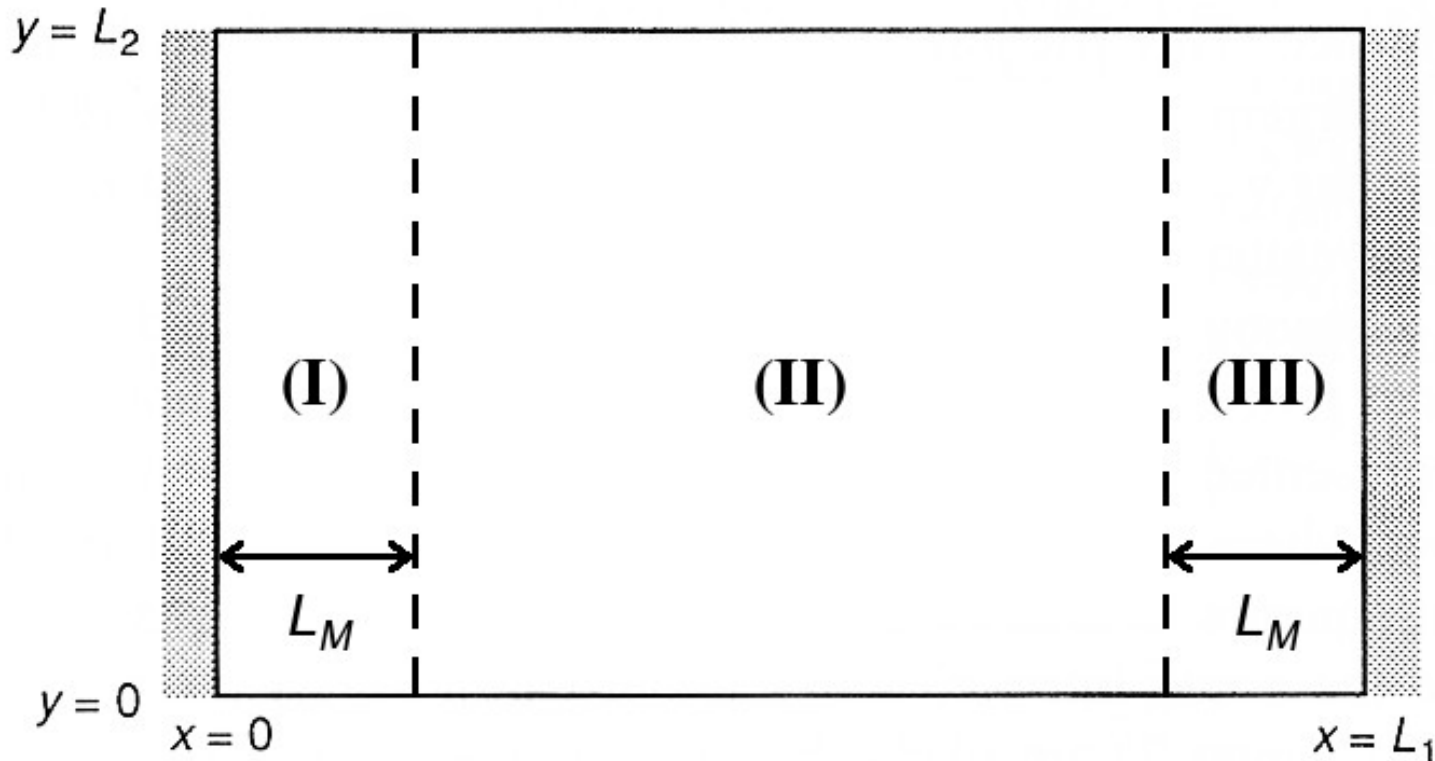
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0 \beta H} \left(-\frac{\partial \tau^x}{\partial y} \right) + L_M^3 \nabla^4 \psi .$$

- Esta é uma equação de quarta ordem, o que permite que, nos contornos sólidos sejam respeitadas as condições de contorno de não-escorregamento; Já nos limites norte e sul, são aplicadas as condições de não-gradiente:

$$\begin{aligned} u, v &= 0 \text{ em } x = 0, L_1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \text{ em } y = 0, L_2 . \end{aligned}$$

O Domínio do Modelo de Munk

- O domínio do Modelo de Munk é dividido em três áreas: (I) a camada limite oeste, (II) o interior Sverdrupiano e (III) a camada limite leste, de tal forma que:



A solução do Modelo de Munk

- A solução é distinta para cada uma das porções do domínio. Começemos pela região (II):

$$\psi_{(II)} = \frac{L_1}{\rho_0 \beta H} \frac{\partial \tau^x}{\partial y} \left(1 - \frac{x}{L_1} \right),$$

que é a solução para o interior Sverdrupiano já vista. Para região (III), é a solução do modelo de Stommel para a borda leste, acrescida da camada limite leste:

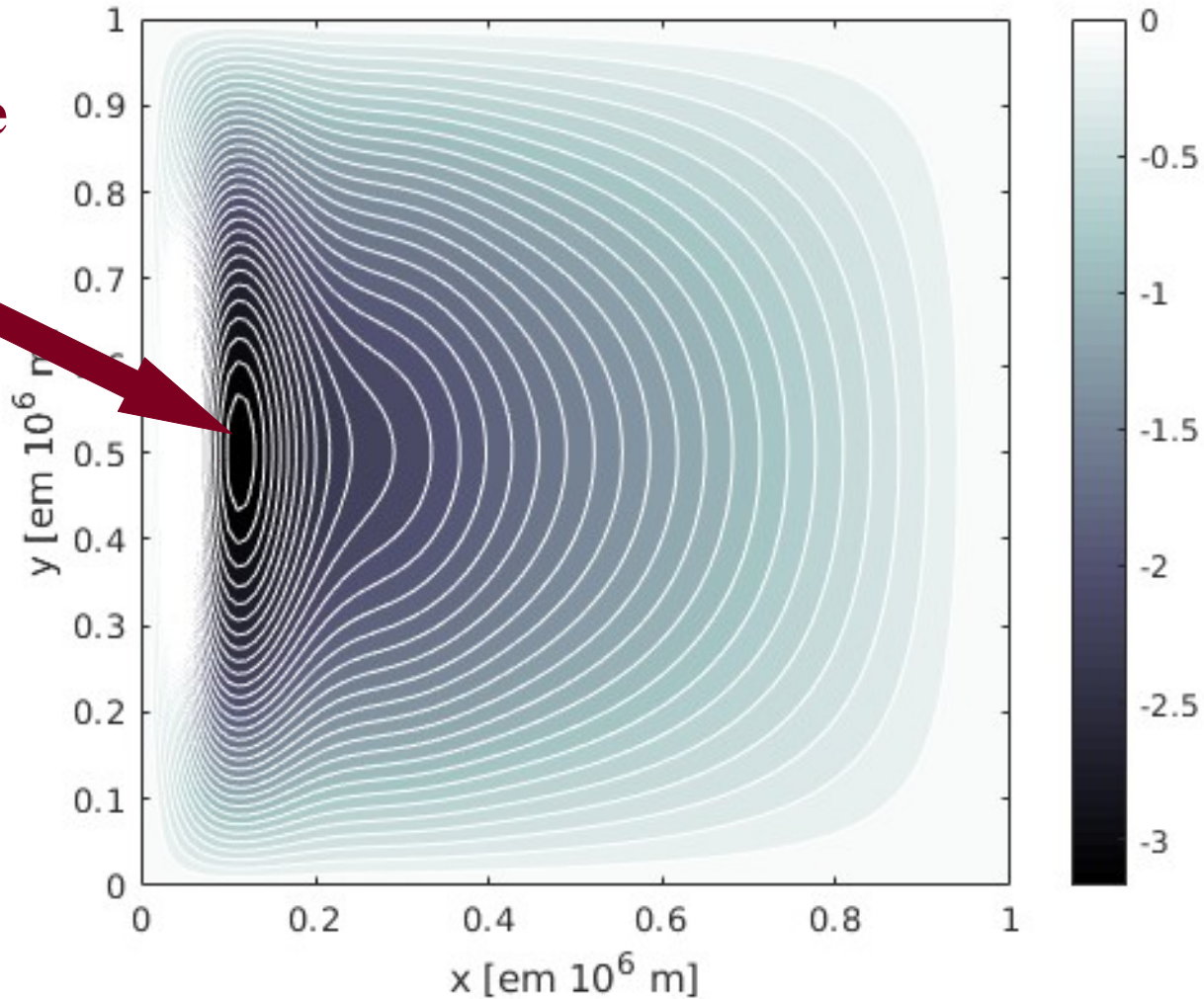
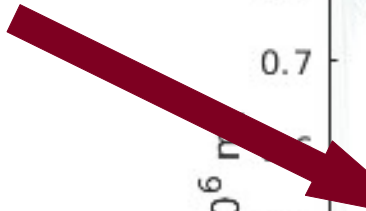
$$\psi_{(III)} = \frac{L_1}{\rho_0 \beta H} \frac{\partial \tau^x}{\partial y} \left(1 - \frac{x}{L_1} + \frac{L_M}{L_1} e^{-\frac{L_1-x}{L_M}} - \frac{L_M}{L_1} \right).$$

- E finalmente, a região (I), caracterizada pela presença de um contra-corrente ao largo da corrente de contorno oeste

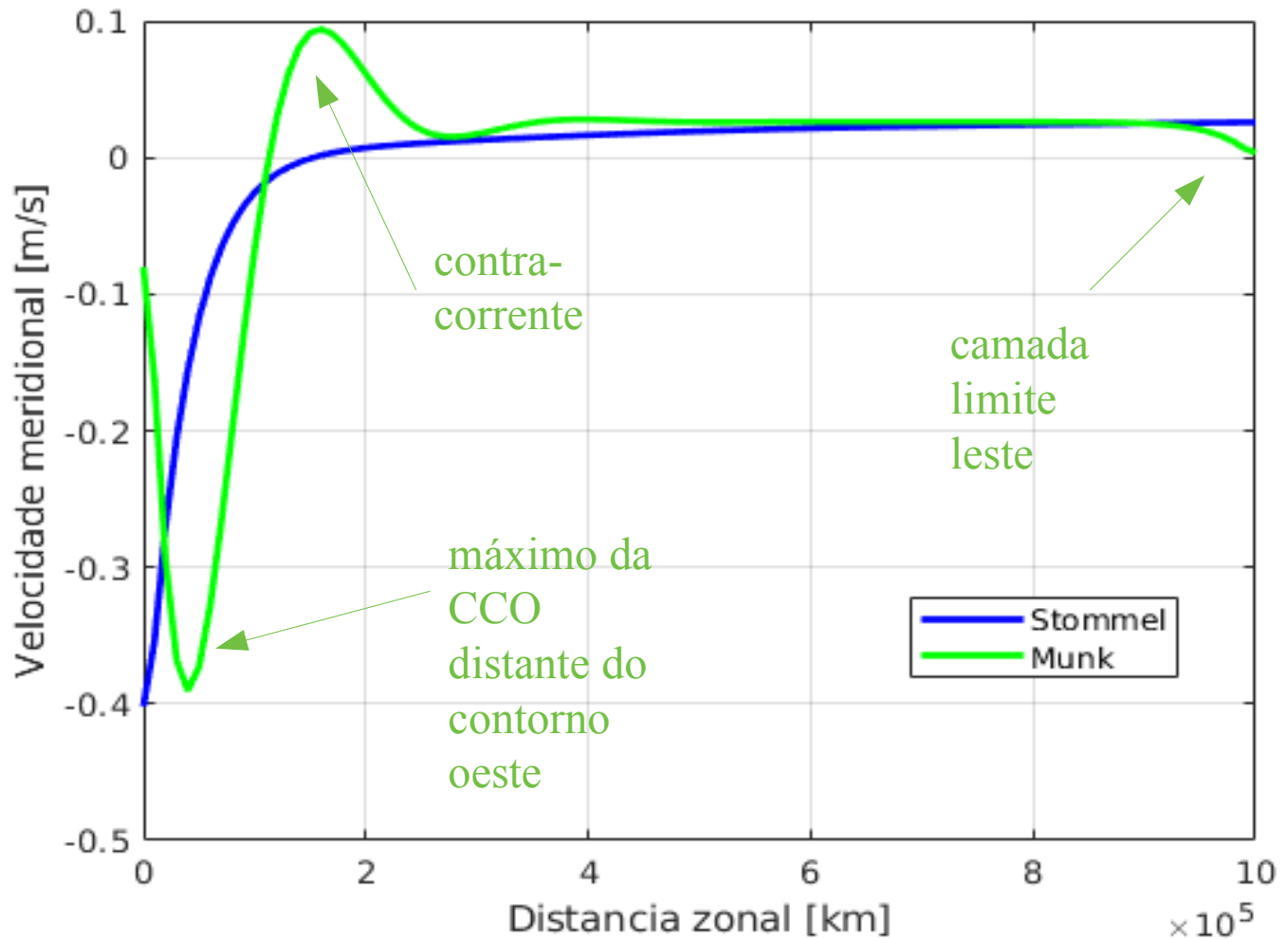
$$\psi_{(I)} = \frac{L_1}{\rho_0 \beta H} \frac{\partial \tau^x}{\partial y} \left[1 - \frac{x}{L_1} - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{2L_M}} \cos \left(\frac{\sqrt{3} x}{2 L_M} - \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

A Solução de Munk

**O grande
vórtice**



Stommel vs. Munk

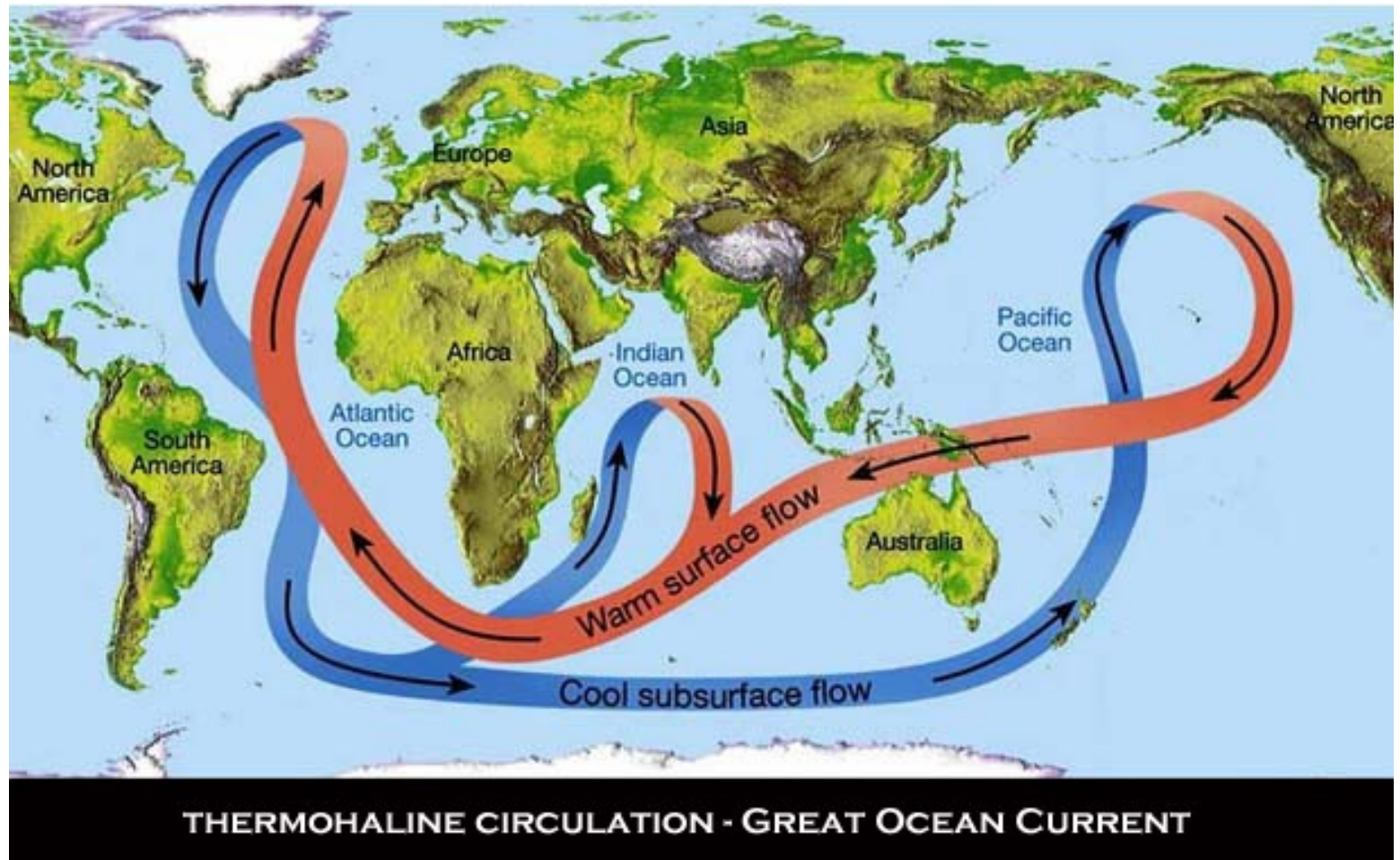


Circulação Termohalina

O que é Circulação Termohalina?

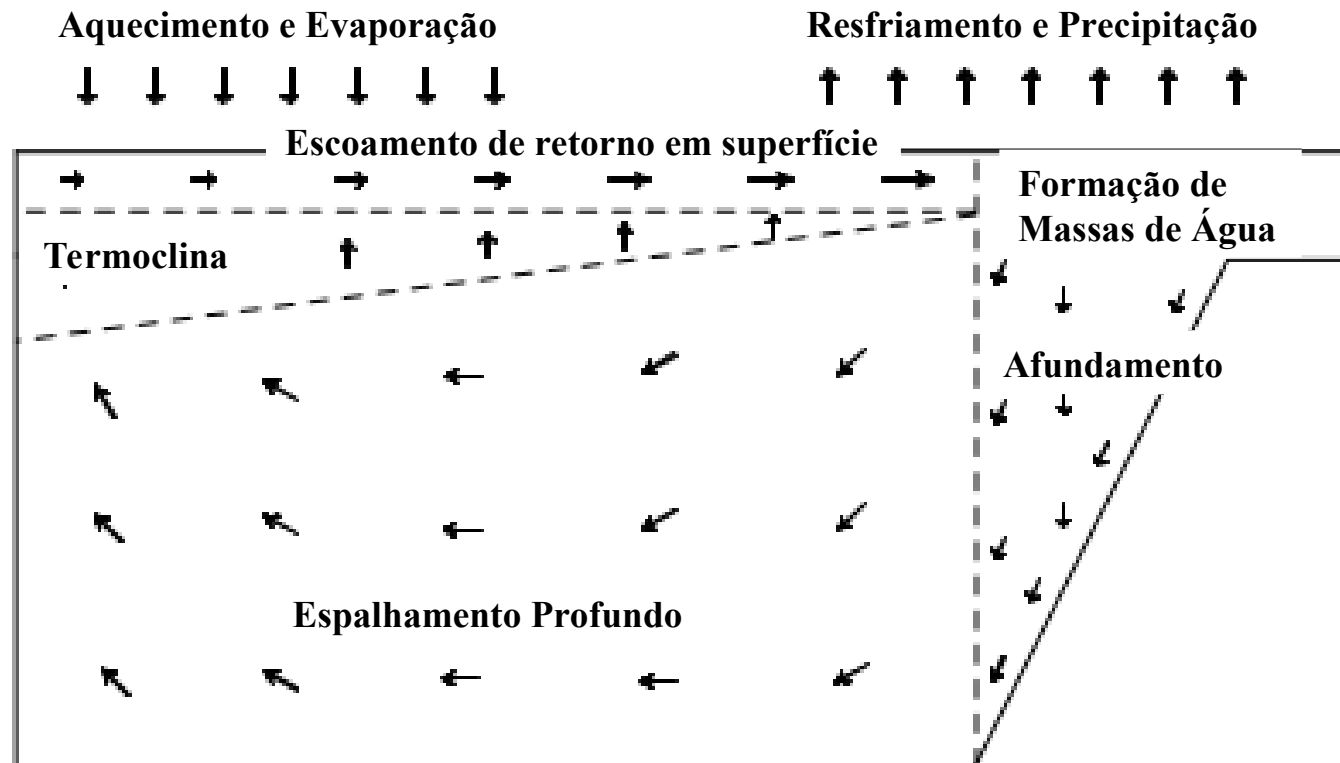
- A circulação do oceano é dominada pelo forçamento pelo vento (e já estudamos isso) e por forçantes termodinâmicas via fluxos de massa/densidade. A Circulação Termohalina (CTH) é aquela forçada por fluxos de densidade, e recebe esse nome pois há alteração das propriedades temperatura e salinidade. Isto leva a afundamento e formação de águas profundas e de fundo.
- A promediação zonal da CTH nos leva a definir a chamada “*Meridional Overturning Circulation* (MOC)” ou, em português, Circulação de Revolvimento Meridional. Como a sigla é consagrada, referiremo-nos a esta circulação como MOC.
- O conceito da CTH como uma circulação de revolvimento meridional fechada de caráter interhemisférico e interoceânico, tendo como principal componente o afundamento de água no extremo polar do Atlântico Norte, foi inicialmente formulada por Arnold Gordon (1986).
- O esquema simplificado dos processos descritos por Gordon e proposto por Wallace Broecker em 1987 se popularizou e associa a CTH ao chamado “grande cinturão oceânico termohalino de revolvimento global”.

O cinturão oceânico global de Broecker



O que é Circulação Termohalina?

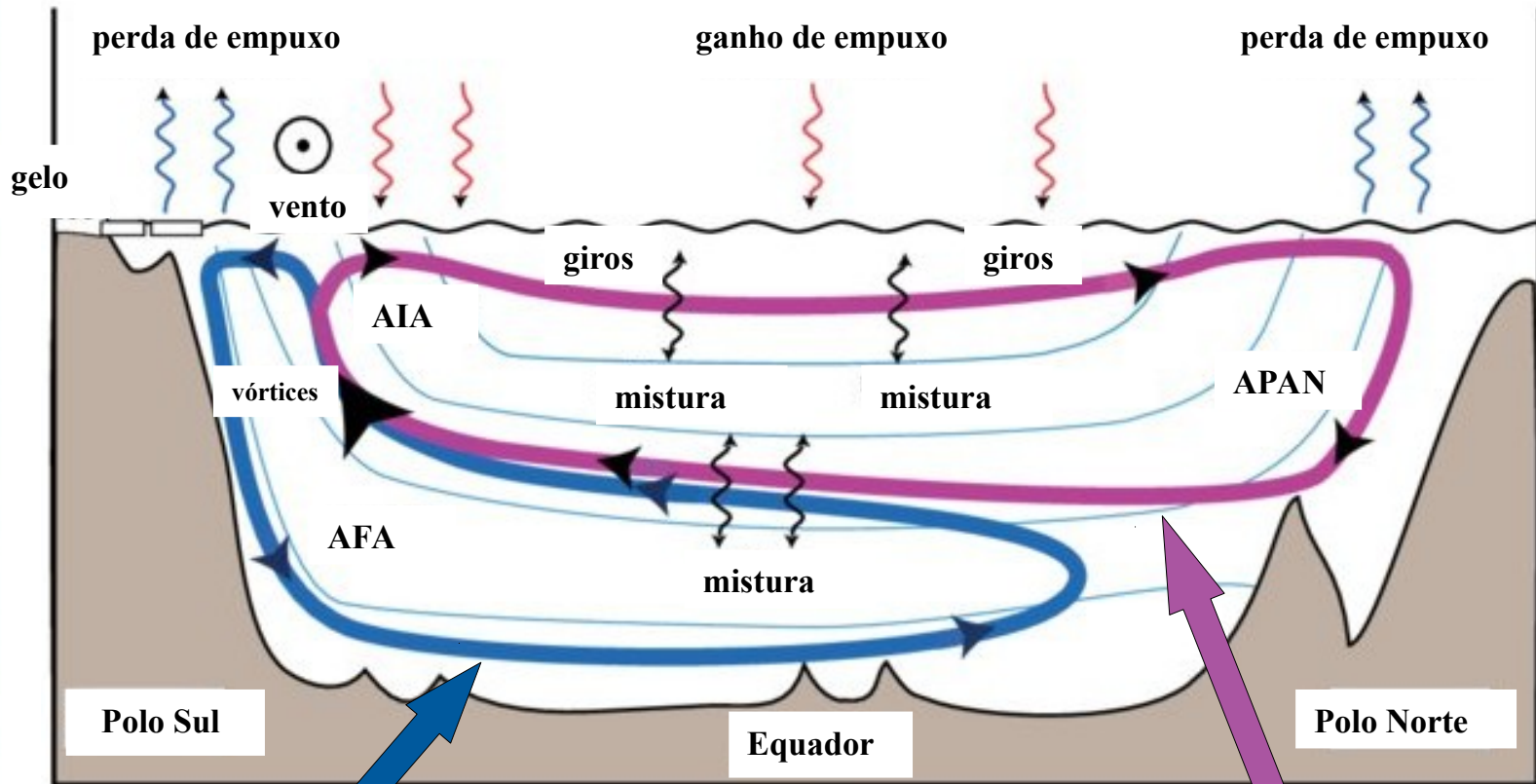
- Este é o modelo de caixa proposto por Wyrтки (1961) para definir o que é circulação termohalina:



O que é Circulação Termohalina?

- 1) Devido às interações ar-mar em altas latitudes, nas regiões de formação de água profunda/de fundo, no inverno, as águas de superfície perdem calor e aumentam densidade. O resultado é a inversão do perfil de estabilidade estática da estratificação, o que gera misturamento por convecção. O resultado é formação de uma massa de água de características razoavelmente homogêneas.
- 2) Esta massa de água homogênea e bastante densa afunda até atingir profundidades abissais. Esta perde então a capacidade de contato com a atmosfera e preserva suas características.
- 3) A nova massa de água então se espalha sobre o assoalho oceânico e, através do ajustamento baroclínico, movem-se como correntes geostróficas. Ao longo de sua trajetória, a massa de água é gradualmente modificada por processos de mistura com outras massas circundantes e envelhecimento biogeoquímico.
- 4) Em algumas regiões de ressurgência dessa massa de água profunda para níveis mais rasos devido à mistura turbulenta. Temperatura, salinidade e densidade se modificam nestes níveis mais rasos.
- 5) Esta água ressurgida retorna pelo oceano superior até novamente os sítios de formação de água profunda. Sua trajetória, no entanto, está longe de ser simples e organizada como o diagrama de Broecker (1987, 1991).

O que é Circulação Termohalina?



Fonte: Valis (2016)

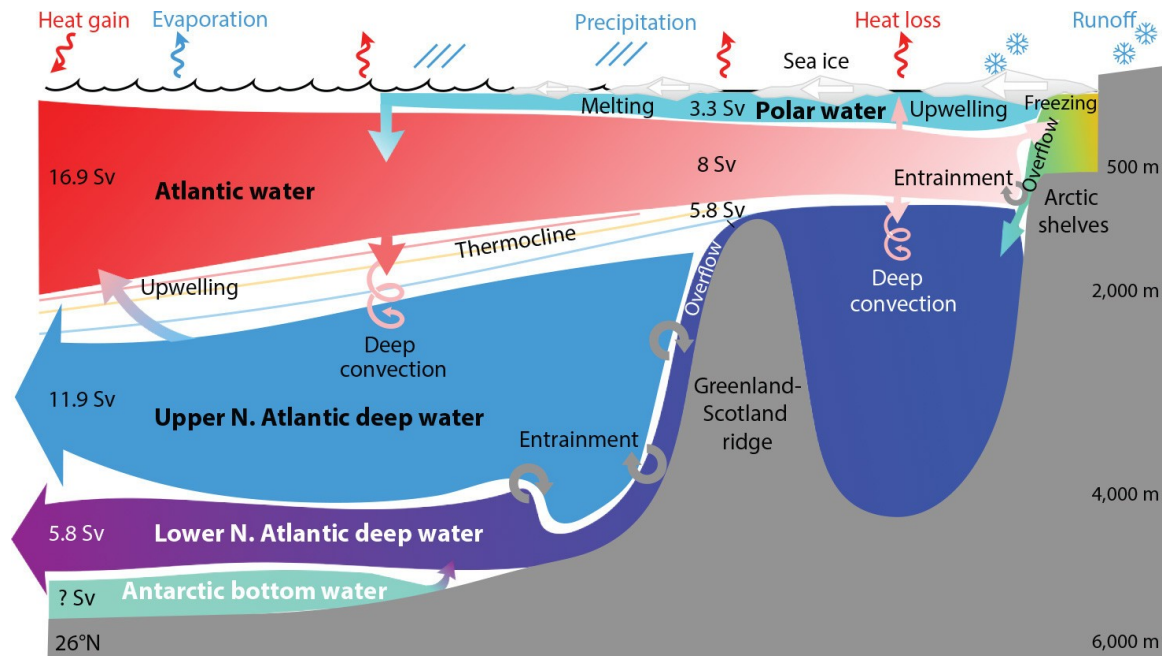
célula inferior ou profunda

célula superior ou rasa

A Corrente de Contorno Oeste Profunda

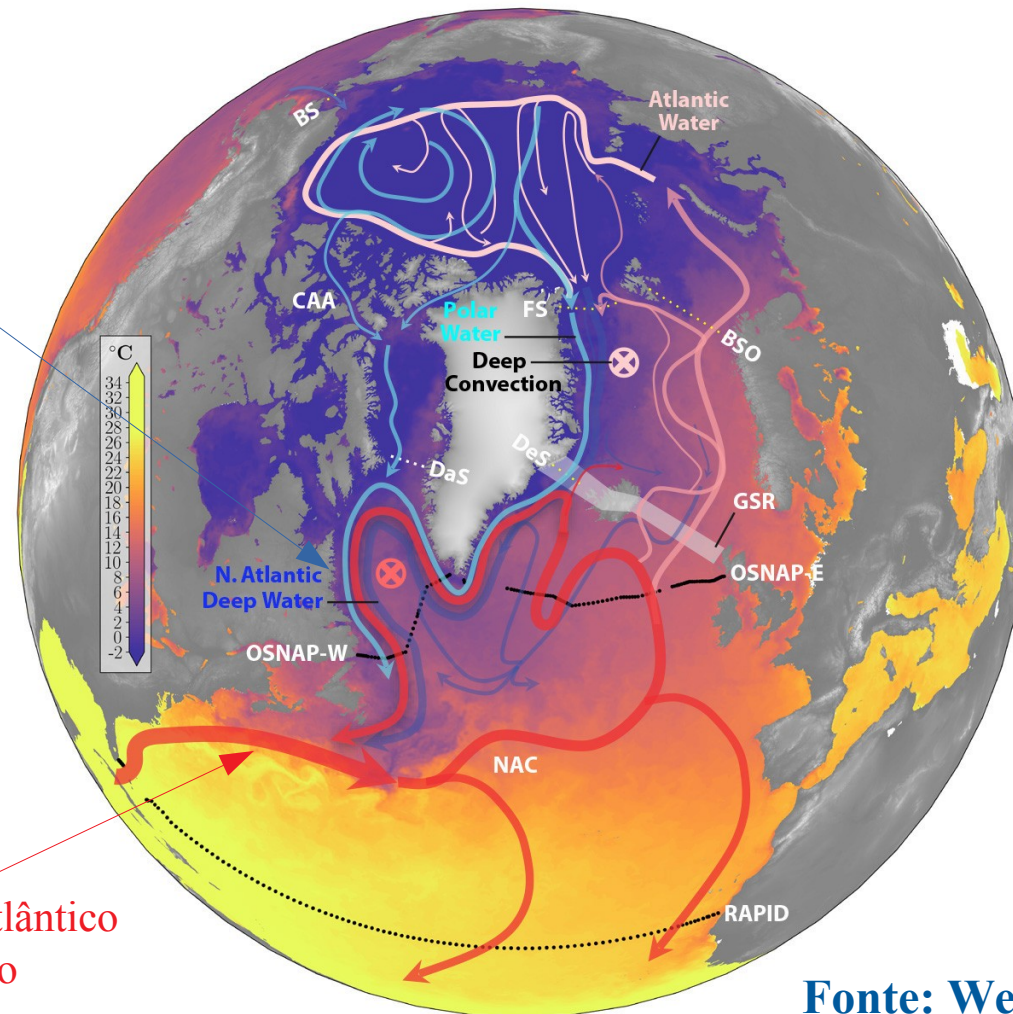
A Origem da Corrente de Contorno Oeste Profunda

- A CCP é a mola mestra da AMOC e representa a interface entre células rasa e profunda.
- Sua origem acontece a partir da subsidência da água no Mar do Labrador, tanto por convecção profunda local (a APAN superior) como pela chegada de águas de fundo da região do Ártico (a APAN inferior).



A Origem da Corrente de Contorno Oeste Profunda

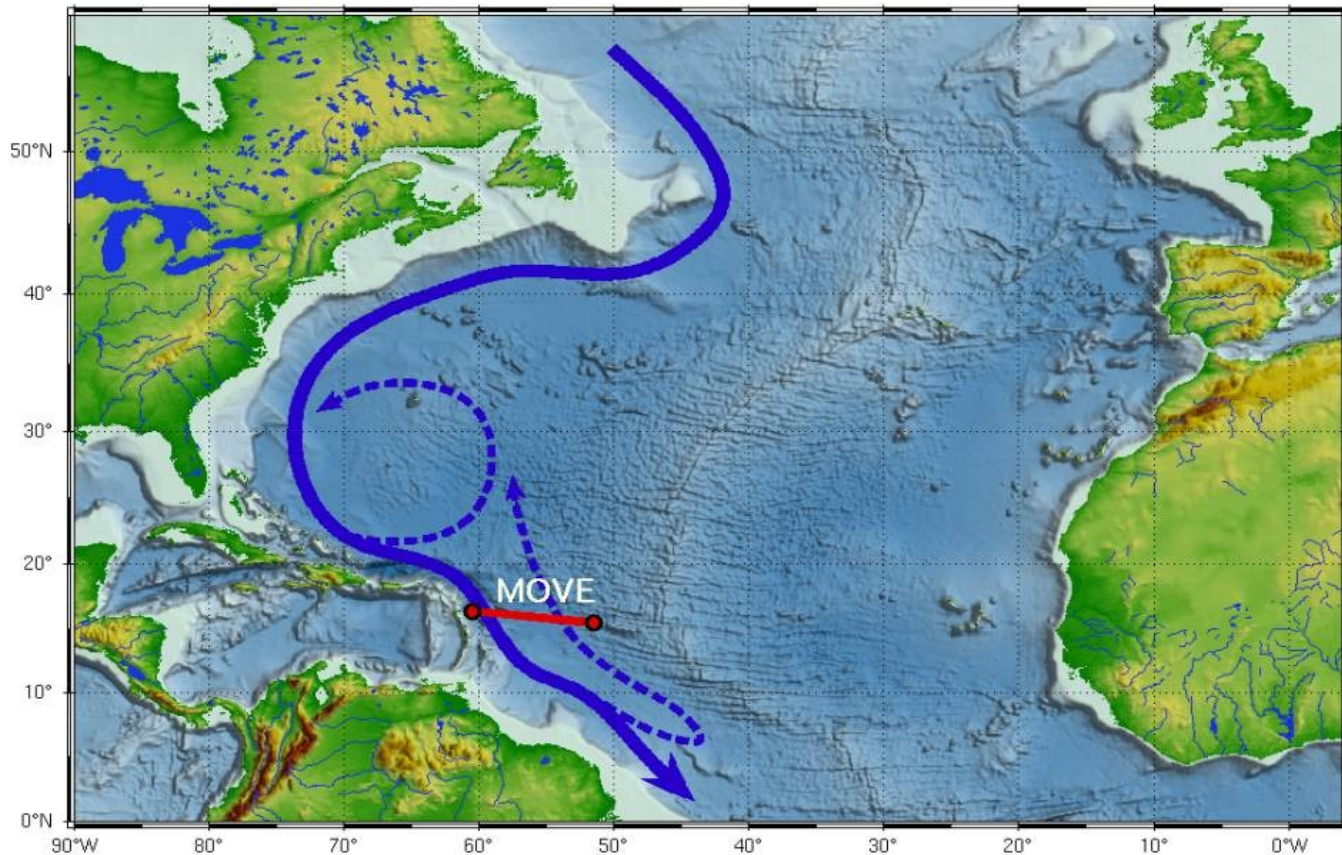
organização da
CCP como jato
profundo



A Corrente do Atlântico
Norte como limbo
superior da célula rasa

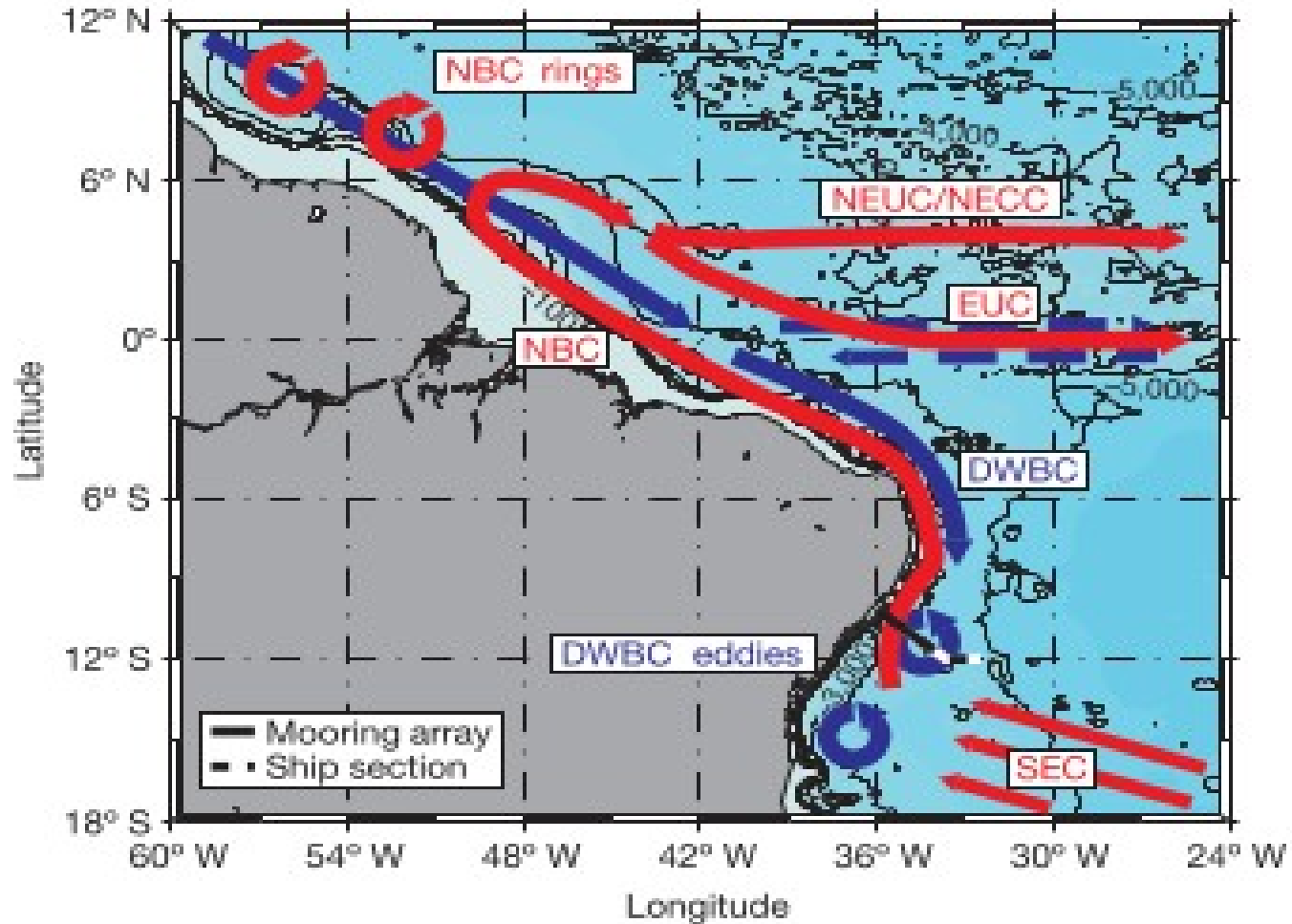
A CCP no Atlântico Norte

- A CCP flui ao longo do sopé continental e apresenta recirculações em sua trajetória.

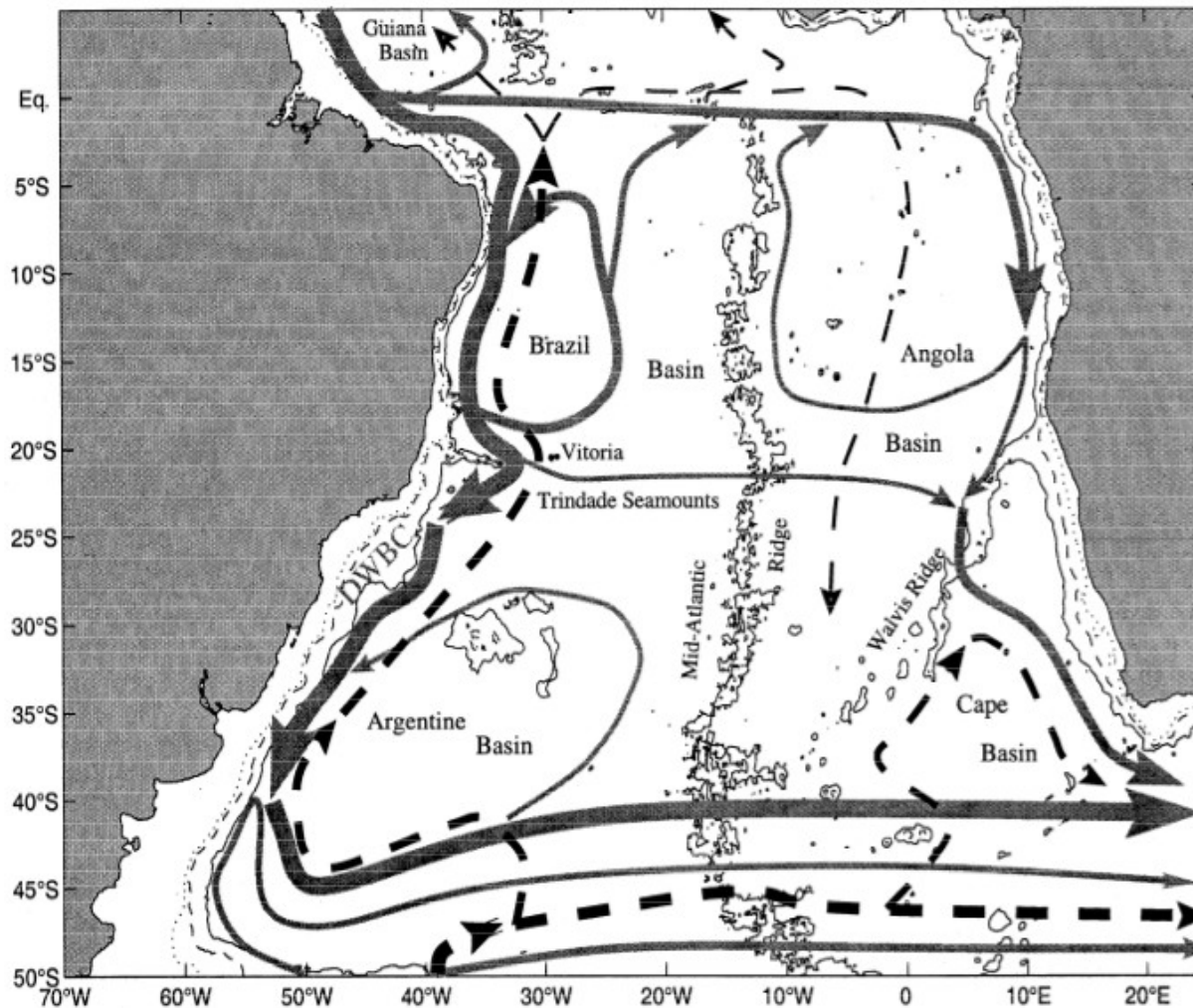


Fonte: WHOI's Climate Change Group homepage

A CCP no Atlântico Sul



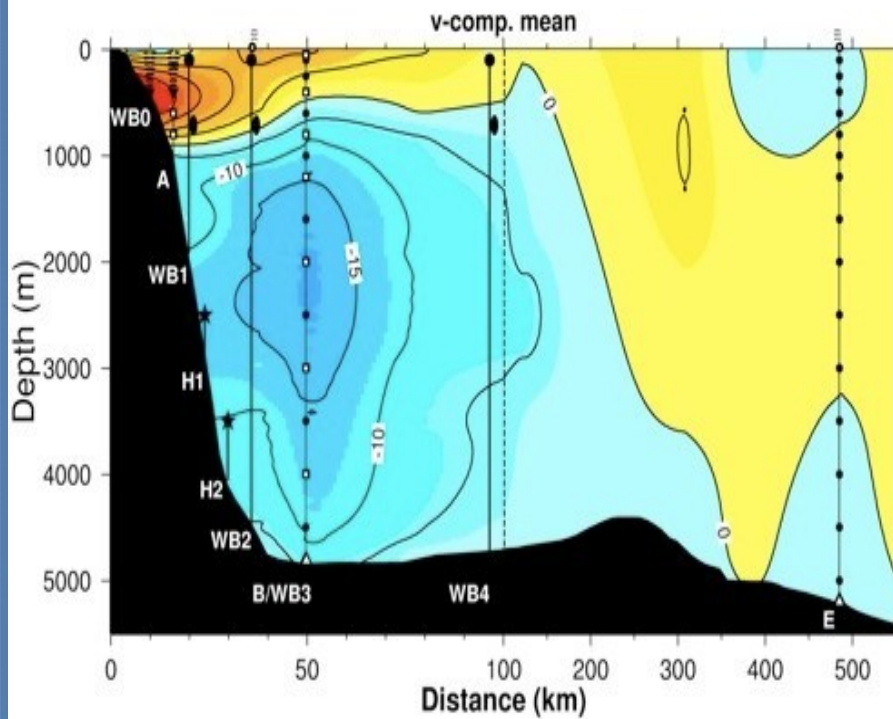
A CCP no Atlântico Sul



Fonte: Stramma e England (1999)

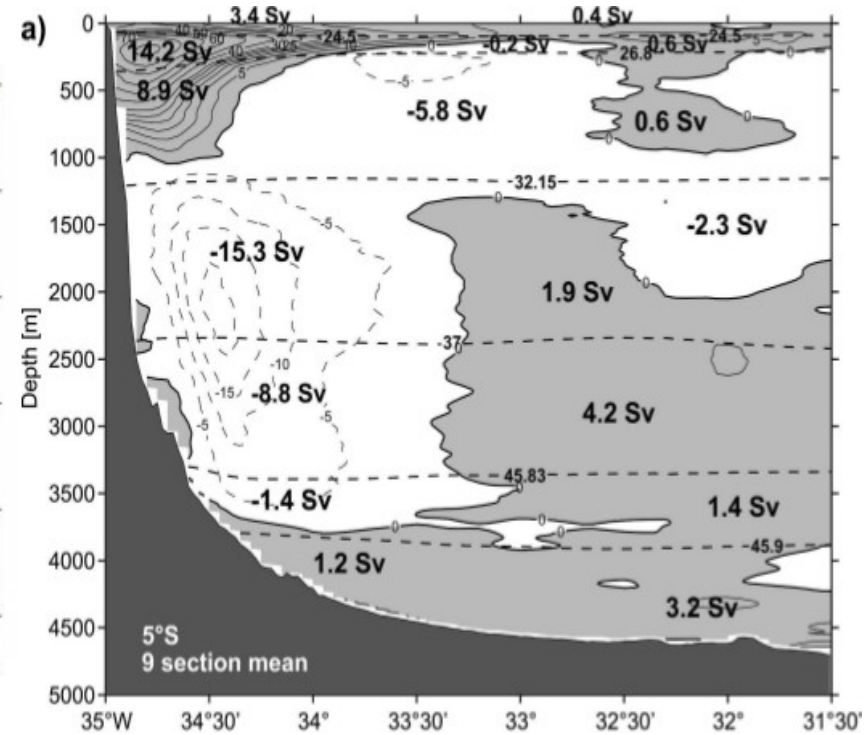
Seções Verticais da CCP

Atlântico Norte - 27° S



▼ ADCP □ CM + Microcat • Microcat ▲ Pressure Gauge
 ● Moored Profiler ★ Homer

Atlântico Sul - 5° S



Fonte: Schott et al. (2005)

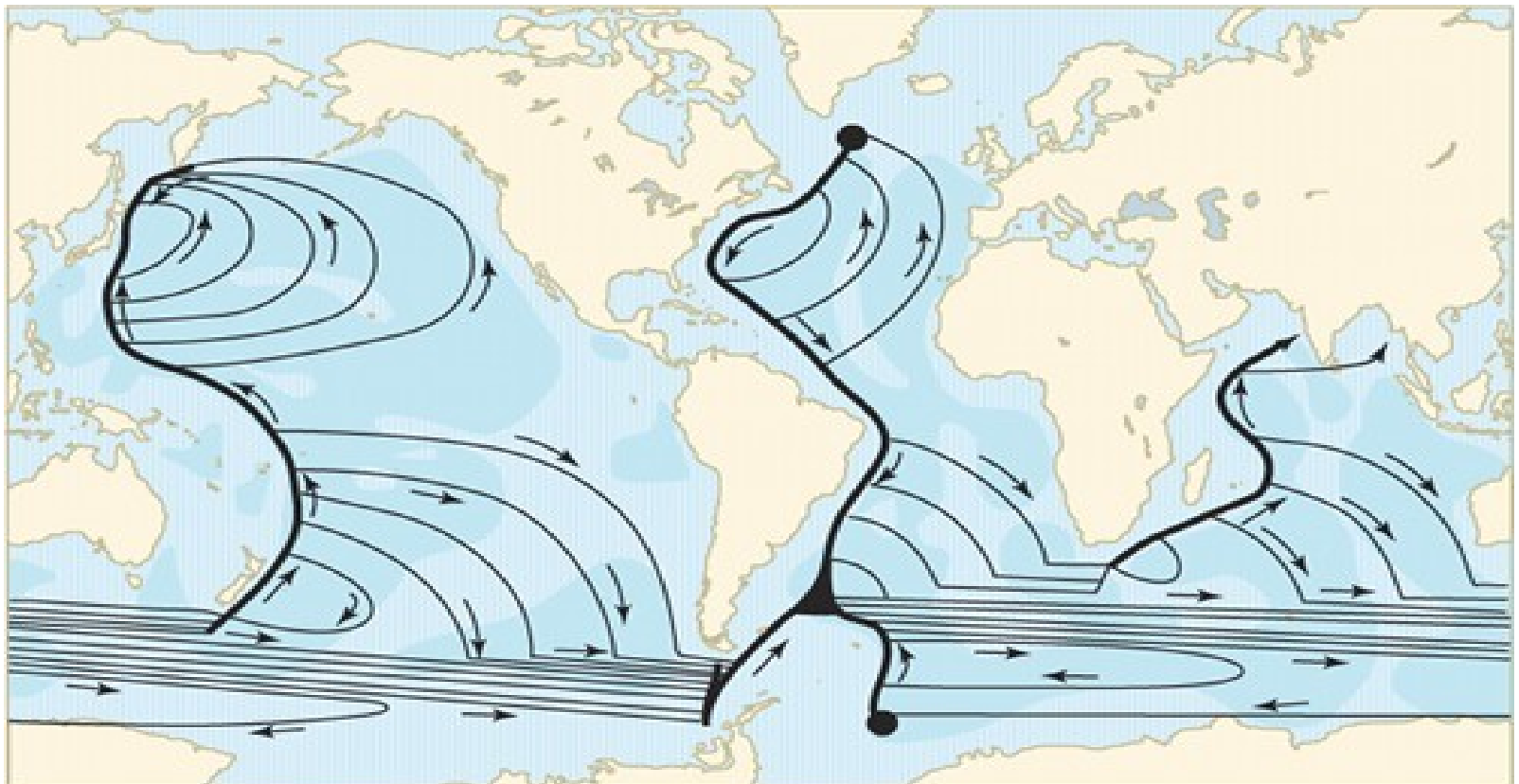
A Dinâmica da MOC no Oceano Atlântico:

**uma versão simplificada do modelo
clássico de Stommel & Arons (1960)**

[baseado no cap. 08 de van Aken (2007)]

O Modelo Clássico de Stommel e Arons (1960)

- O modelo de circulação de Stommel e Arons (1960), tanto em sua versão analítica quanto experimental, previram a existência da CCP antes de sua descoberta observacional. O modelo idealizou de forma elegante o vínculo da camada profunda com o oceano superior via ressurgência abissal.



Ressurgência e Subsidência Abissais

Um dos pontos cruciais para entender a circulação termohalina é o afundamento e formação de águas profundas e do fundo, que ocorrem principalmente no Oceano Atlântico.

- Seguindo Stommel (1958), vamos considerar inicialmente um modelo de **oceano retangular** representando a bacia do Atlântico Norte.
- Seus limites laterais são: $x=0, B$ e $y=0, L$.
- Seu limite vertical é o limite superior de atuação circulação profunda, como por exemplo, a base da camada intermediária. Chamaremos a esse nível de $z=h$, considerando que o fundo plano deste oceano ocorre em $z=0$.
- No canto noroeste do modelo, temos uma fonte de subsidência, representando o Mar do Labrador, e assim, sítio de formação da APAN. Essa fonte de subsidência supre o oceano com S_1 Sv. de água profunda.

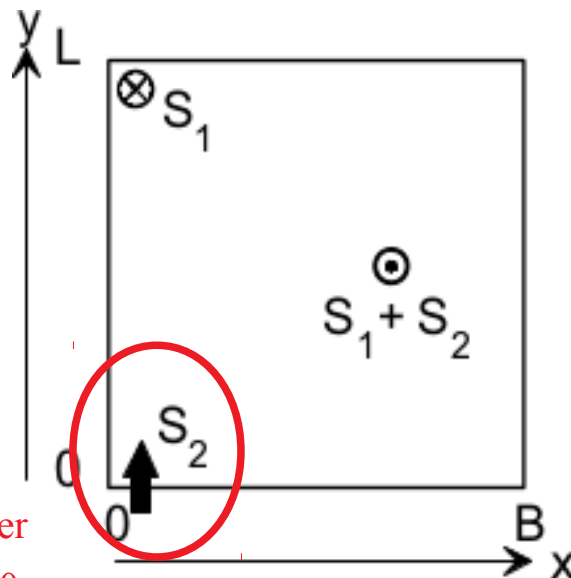
Ressurgência e Subsidência Abissais

- Ainda devemos considerar o aporte (ou exportação) de S_2 Sv devido ao transporte por um jato profundo transequatorial – a Corrente de Contorno Oeste Profunda (CCP).
- Assumamos aqui o ganho de volume da camada profunda é sempre ganho mesmo:

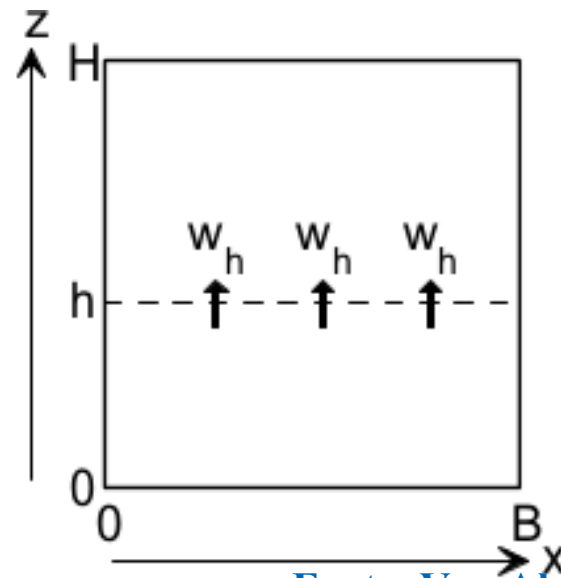
$$S = S_1 + S_2 > 0$$

- O balanço de volume na camada profunda ocorre por uma ressurgência profunda e homogênea, $w=w_h$, ao longo de toda a bacia oceânica através da interface $z=h$.

Exemplo:



S_2 pode ser
>0, =0, <0



Fonte: Van Aken (2007)

Cálculo da Ressurgência Abissal

- Logo, cálculo da ressurgência abissal é obtido simplesmente pela integração da velocidade vertical na interface que separa a camada abissal da camada do oceano superior,

$$\int_0^L \int_0^B w_h dx dy = S$$
$$w_h BL = S ,$$

que deve ser exatamente igual ao transporte descendente nas regiões de subducção ou importação/exportação de volume.

- Desta integração, chegamos a uma expressão para o valor da ressurgência abissal:

$$w_h = \frac{S}{BL} .$$

Escoamento Geostrófico Abissal

- Stommel (1958) e Stommel & Arons (1960) assumiram na construção de seus modelos, que à exceção das correntes de contornos, a dinâmica do oceano profundo interior é eminentemente **geostrófica**.
- Tal nos modelos forçados pelo vento, a equação que governa essa dinâmica é a equação da vorticidade absoluta de grande escala:

$$\beta v_g = f \frac{\partial w}{\partial z} .$$

- Como nosso modelo é hemisférico, ele engloba o equador e é necessário que usemos a aproximação no plano beta equatorial onde

$$f = \beta y .$$

- Assim, a equação acima é reescrita como

$$\beta v_g = \beta y \frac{\partial w}{\partial z} .$$

A Velocidade Geostrófica Meridional Abissal

- Integrando verticalmente entre $z=0$ e $z=h$ e invocando o Teorema de Taylor-Proudman,

$$\int_0^h v_g dz = y \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

- O resultado desta integral é simplesmente $h v_g = y w_h$, que é positiva no HN.
- Notemos que esta última equação tanto permite encontrarmos uma expressão para v_g como representa o transporte de volume meridional por unidade de comprimento.
- A divergência meridional do escoamento meridional é dada por

$$\frac{\partial v_g}{\partial y} = \frac{w_h}{h} = \frac{S}{BLh} > 0$$

- Não só a velocidade meridional é positiva, como cresce em direção ao polo.

A Velocidade Geostrófica Zonal Abissal

- A obtenção da da velocidade geostrófica zonal se dá através da integração vertical da equação da continuidade:

$$\int_0^h \frac{\partial u_g}{\partial x} dz = -w_h - \int_0^h \frac{\partial v_g}{\partial y} dz .$$

- O resultado desta integração nos mostra que há uma **convergência** zonal com as velocidade decaindo para leste, ou seja,

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} = -2 \frac{w_h}{h} = -2 \frac{\partial v_g}{\partial y} = -2 \frac{S}{BLh} < 0$$

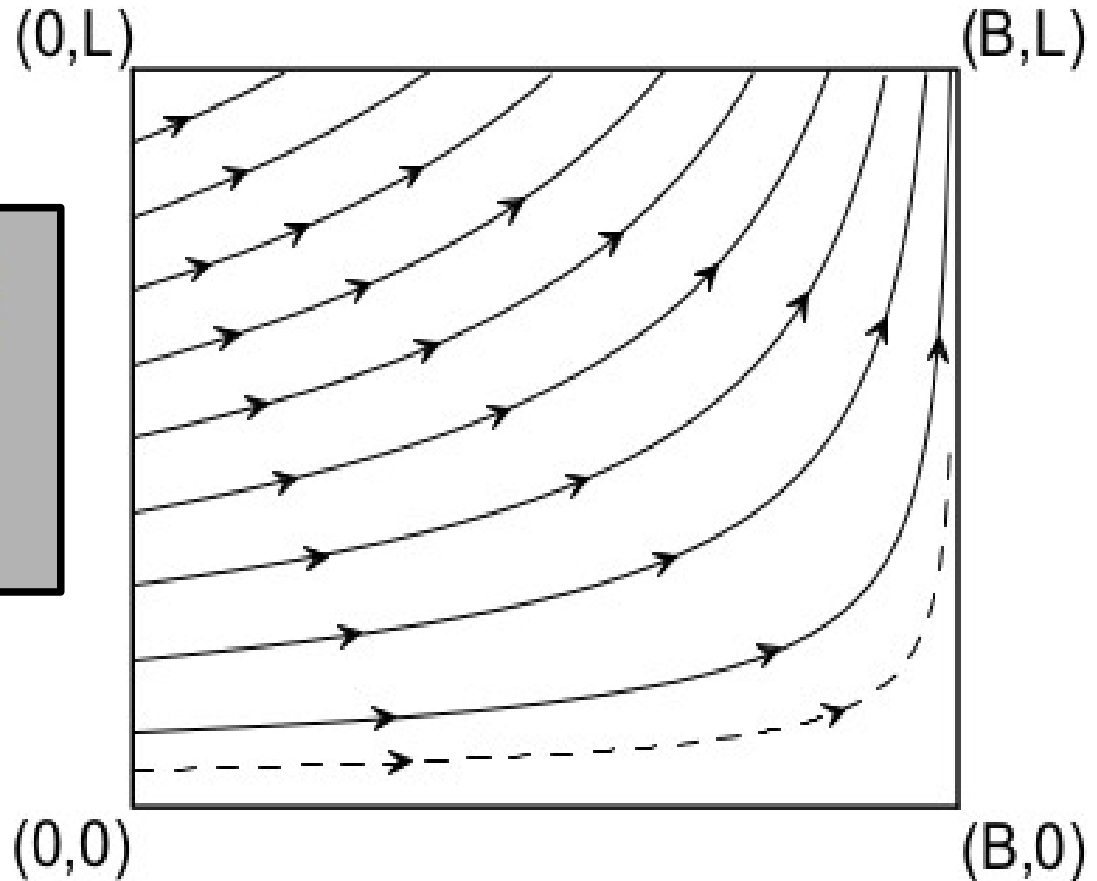
- E, finalmente a expressão para u_g é obtida simplesmente integrando zonalmente entre uma longitude qualquer x e a borda leste B :

$$u_g = 2(B - x) \frac{w_h}{h} .$$

Padrão do Escoamento Geostrófico Abissal

$$u_g = 2(B - x) \frac{w_h}{h}$$

$$v_g = y \frac{w_h}{h}$$



A Corrente de Contorno Oeste Profunda

- Um dos principais resultados do modelo de Stommel (1958) e Stommel & Arons (1960) foi a presença de um corrente de contorno oeste profunda, induzida pelos fluxos de densidade da água subductada.
- Trabalhamos até agora com o transporte da interior da bacia abissal, que é geostrófico. Resta-nos resolver agora a camada limite oeste, tal qual fizemos para os modelos de circulação forçada pelo vento. Aqui, no entanto, consideraremos valores de transporte da CCP. E, portanto, integrações serão necessárias.
- Para tanto, imporemos que a largura da camada limite oeste abissal é ϵB , onde $\epsilon \ll 1$, ou seja um parâmetro pequeno, possivelmente de ordem 10^{-2} .
- Assim, o transporte de volume da CCP é dado por

$$V_{CCP} = \int_0^{\epsilon B} \int_0^h v_{CCP} dz dx .$$

- Entretanto, não conhecemos v_{CCP} . Precisamos pensar noutra forma de estimar o transporte desta corrente profunda.

O Transporte Abissal Meridional Total

- O transporte abissal meridional total V_A compreende a soma do transporte do interior geostrófico com o transporte da corrente de contorno profunda, ou seja,

$$V_A = V_g + V_{CCP} .$$

- Temos como estimar tanto o V_A quanto o V_g , e portanto, conseguir inferir V_{CCP} .
Façamos isto, então, para o V_A a partir da integração vertical da equação da continuidade e obter o transporte por unidade de comprimento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h v \, dz &= - \int_0^h \frac{\partial}{\partial z} w \, dz \\ &= -w|_{z=h} + w|_{z=0} \\ &= -w_h . \end{aligned}$$

- Podemos reescrever esta equação em termos dos transportes (por unid. de comprimento) zonal e meridional totais.

O Transporte Abissal Meridional Total

- As quantidades com asterisco representam exatamente os transportes por unidade de comprimento:

$$\frac{\partial}{\partial x} U_A^* dz + \frac{\partial}{\partial y} V_A^* = -w_h$$

- Para obtermos o transporte meridional total em sua forma integral, basta integrarmos a equação acima zonalmente entre $x=0$ e $x=B$ para obter

$$U_A(B) - U_A(0) + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^B V_A^* dx = - \int_0^B w_h dx$$

- Como

$$V_A = \int_0^B V_A^* dx$$

chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} V_A &= -w_h B \\ &= -\frac{S}{L} \cdot \end{aligned}$$

O Transporte Abissal Meridional Geostrófico

- Obtemos o transporte meridional geostrófico V_g usando os resultados obtidos para a velocidade meridional e integrando na área:

$$\begin{aligned} V_g &= \int_0^B \int_0^h v_g dz dx \\ &= \int_0^B \int_0^h y \frac{w_h}{h} dz dx \\ &= y w_h B \\ &= y \frac{S}{L} \cdot \end{aligned}$$

- A divergência do transporte geostrófico meridional é simplesmente

$$\frac{\partial}{\partial y} V_g = \frac{S}{L} \cdot$$

O Transporte da CCP

- Usando $V_A = V_g + V_{CCP}$ calculamos a divergência meridional desta expressão:

$$\frac{\partial}{\partial y} V_A = \frac{\partial}{\partial y} V_g + \frac{\partial}{\partial y} V_{CCP}.$$

- Substituímos os valores já obtidos para a divergência meridional total e geostrófica para encontrar a divergência meridional do transporte da CCP:

$$\frac{\partial}{\partial y} V_{CCP} = -2 \frac{S}{L}.$$

- Integramos em y para encontrar o transporte propriamente dito

$$\int_0^y \frac{\partial}{\partial y} V_{CCP} dy' = - \int_0^y 2 \frac{S}{L} dy'.$$

- O que nos leva a

$$V_{CCP}(y) - \underbrace{V_{CCP}(0)}_{V_0} = -2y \frac{S}{L}.$$

O Transporte da CCP

- A expressão do transporte da CCP é

$$V_{CCP}(y) = V_0 - 2y \frac{S}{L} \cdot$$

- O transporte V_0 é determinado pelas condições de contorno em termos das fontes S_1 e S_2 .
- No caso do oceano mono-hemisférico, $S=S_1$ apenas e $V_0=0$;
- No caso do Atlântico Norte, $S=S_1+S_2>0$, mas $S_2<0$, pois a CCP vai sair da bacia e cruzar o equador, $V_0=S_2$
- No caso Pacífico Norte, $S=S_2>0$, $S_1=0$ e $V_0=S_2$ também.
- E no caso do Oceano Atlântico Sul/Oceano Austral? E no Pacífico Sul.

Erros e Acertos do Modelo

- A subducção profunda gera e alimenta a CCP;
- Esta é um jato convergente e alimenta o interior puramente geostrófico; e
- Por ser convergente, a CCP também mantém a ressurgência abissal;
- Não distingue águas profundas e de fundo;
- Não considera a topografia de fundo.