Modelagem e Otimização de sistemas de produção

Celma de Oliveira Ribeiro

PRO - EPUSP

Aula 7 - 2020

Dualidade

Considere um problema de programação linear:

$$
\begin{array}{ll}
\text{max z} = & c^t x \\
\text{s.a} & \text{Ax} \leq \text{b} \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

Questões:

1. Podemos usar o mesmo conjunto de dados (A, b, c) para construir outro problema de programação linear?
2. Se sim, como esse novo problema está relacionado ao problema original?

Dualidade

O problema dual

Associado a qualquer Problema de Programação Linear, existe um problema denominado Dual

Sejam $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Para o problema **Primal**

$$\begin{aligned} \text{max z} = \quad & c^t x \\ \text{s.a} \quad & \text{Ax} \leq \text{b} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Define-se o **Dual** como

$$\begin{aligned} \text{min w} = \quad & b^t u \\ \text{s.a} \quad & A^t u \geq c \\ & u \geq 0 \end{aligned}$$

Dualidade

Como os problemas eles estão relacionados ?

- O primal e o dual são definidos pelo mesmo conjunto de dados (A, b, c)
- O problema dual é um problema de programação linear com m variáveis e n restrições.
- O vetor do lado direito e os custos trocam de papel

Dualidade

Outras perguntas importantes:

1. **Viabilidade**
   Os problemas primal e dual podem ser
   - Ambos, viáveis?
   - Um viável, e o outro inviável?
   - Ambos inviáveis?
2. **Soluções básicas**
   - Existe alguma relação entre as soluções básicas do primal e do dual?
   - E entre bases ótimas?
3. Otimalidade
   - Os dois problemas podem ter solução única?
   - Ambos podem ter infinitas soluções?
   - Um deles ter solução única e o outro infinitas?

Dualidade

Considere o problema primal

$$
\begin{array}{llllll}
\text{max z} = & 4x_1 & + x_2 & + 5x_3 & +3x_4 & \\
\text{s.a} & 1x_1 & - x_2 & - x_3 & +3x_4 & \leq 1 \\
 & 5x_1 & + x_2 & + 3x_3 & +8x_4 & \leq 55 \\
 & -x_1 & + 2x_2 & + 3x_3 & -5x_4 & \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 & x_4 \geq 0 &
\end{array}
$$

Determine o seu dual

Dualidade

Problema primal tem três restrições $\Rightarrow$ três variáveis duais.

$$
\begin{array}{llllll}
\text{max z} = & 4x_1 & + x_2 & + 5x_3 & +3x_4 & \\
\text{s.a} & 1x_1 & - x_2 & - x_3 & +3x_4 & \leq 1 \leftarrow u_1 \\
 & 5x_1 & + x_2 & + 3x_3 & +8x_4 & \leq 55 \leftarrow u_2 \\
 & -x_1 & + 2x_2 & + 3x_3 & -5x_4 & \leq 3 \leftarrow u_3 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 & x_4 \geq 0 &
\end{array}
$$

Dualidade

Problema primal tem três restrições $\Rightarrow$ três variáveis duais.

$$
\begin{array}{llllll}
\text{max z} = & 4x_1 & +\ x_2 & +\ 5x_3 & +3x_4 & \\
\text{s.a} & 1x_1 & \text{-}\ x_2 & \text{-}\ x_3 & +3x_4 & \leq 1 \leftarrow u_1 \\
 & 5x_1 & +\ x_2 & +\ 3x_3 & +8x_4 & \leq 55 \leftarrow u_2 \\
 & \text{-}x_1 & +\ 2x_2 & +\ 3x_3 & \text{-}5x_4 & \leq 3 \leftarrow u_3 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 & x_4 \geq 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
\min w = & y_1 & +55y_2 & +3y_3 & \\
\text{s. a} & y_1 & +5y_2 & -y_3 & \geq 4 \\
 & -y_1 & +y_2 & +2y_3 & \geq 1 \\
 & -y_1 & +3y_2 & +3y_3 & \geq 5 \\
 & 3y_1 & +8y_2 & -5y_3 & \geq 3 \\
 & y_1, & y_2, & y_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Todos os problemas de PL possuem um problema dual associado a ele. Basta transformar os problemas de forma a recair no caso anterior....

$$\begin{array}{ll} \max \text{ z} = & c^t x \\ s.a & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

O problema acima é equivalente a:

$$\begin{array}{ll} \max \text{ z} = & c^t x \\ s.a & \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Exercício 1

$$\begin{aligned} \max \text{ z} = \quad & c^t x \\ s.a \quad & \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Seu dual será:

$$\begin{aligned} \min \text{ w} = \quad & b^t u_1 - b^t u_2 \quad = \quad b^t (u_1 - u_2) \\ s.a \quad & \begin{bmatrix} A^t & -A^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \geq c \\ & u_1 \geq 0 \quad u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \min \text{ w} = \quad & b^t (u_1 - u_2) \\ s.a \quad & A^t (u_1 - u_2) \geq c \\ & u_1 \geq 0 \quad u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Por sua vez o problema:

$$\begin{array}{ll} \min\ \mathrm{w} = & b^t\,(u_1 - u_2) \\ s.a & A^t\,(u_1 - u_2) \geq c \\ & u_1 \geq 0 \quad u_2 \geq 0 \end{array}$$

é equivalente a

$$\begin{array}{ll} \min\ \mathrm{w} = & b^t u \\ s.a & A^t u \geq c \\ & u \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

Basta tomar: (verifique) $u = u_1 - u_2$

Exercício

Calcule os duais dos problemas a seguir:

(a)

$$\begin{aligned} \max \text{ z} = \quad & c^t x \\ s.a \quad & Ax = b \\ & x \leq 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \min \text{ z} = \quad & c^t x \\ s.a \quad & Ax \leq b \\ & x \leq 0 \end{aligned}$$

Dualidade

A qualquer problema de Programação Linear está associado um problema dual.
É sempre possível encontrar o dual de um PL que não esteja na forma padrão, colocando o problema original na forma padrão.

Primal	max	min	Dual
Restrições	$\leq b_i$ $\geq b_i$ $= b_i$	≥ 0 ≤ 0 irrestrita	Variáveis
Variáveis	$\geq 0_i$ $\leq 0_i$ irrestrita	$\geq c_j$ $\leq c_j$ $= c_j$	Restrições

Exercício 2 Considere o par primal dual

Primal		Dual	
max	$c^t x$	min	$b^t u$
s.a	Ax $\leq$ b	s.a	$A^t u \geq c$
	$x \geq 0$		$u \geq 0$

Calcule o dual do problema dual

Dualidade

São equivalentes:

Problema I		Problema 2	
min	$b^t u$	- max	$-b^t u$
s.a	$A^t u \geq c$	s.a	$-A^t u \leq -c$
	$u \geq 0$		$u \geq 0$

Assim escrito, o dual do problema 2 será

$$\begin{array}{ll} \text{-min} & -c^t w \\ \text{s.a} & -\left(A^t\right)^t w \geq -\left(b^t\right)^t \\ & w \geq 0 \end{array}$$

Que é equivalente a

$$\begin{array}{ll} \text{max} & c^t w \\ \text{s.a} & Aw \leq b \\ & w \geq 0 \end{array}$$

O dual do dual é o primal!!!

Proposição 1

O dual do dual é o primal

Dualidade

Voltando a algumas perguntas iniciais. Os problemas primal e dual podem ser

- Ambos, inviáveis?
- Ambos com infinitas soluções?

Alguns exemplos interessantes:

Ambos inviáveis

Primal	Dual
$\begin{array}{llll} \text{min} & x_1 & -2x_2 & \\ & -x_1 & +x_2 & \geq 1 \\ & x_1 & -x_2 & \geq 2 \\ & & x_j \geq 0 & \end{array}$	$\begin{array}{llll} \text{max} & u_1 & +2u_2 & \\ & -u_1 & +u_2 & \leq 1 \\ & u_1 & -u_2 & \leq -2 \\ & & u_j \geq 0 & \end{array}$

Alguns exemplos interessantes:

Ambos com infinitas soluções ótimas

Primal	Dual
$\begin{array}{lrrl} \text{min} & x_1 & -x_2 & \\ & -x_1 & +x_2 & \geq 1 \\ & x_1 & -x_2 & \geq -1 \\ & & x_j \geq 0 & \end{array}$	$\begin{array}{lrrl} \text{max} & u_1 & -u_2 & \\ & -u_1 & +u_2 & \leq 1 \\ & u_1 & -u_2 & \leq -1 \\ & & u_j \geq 0 & \end{array}$

Nesse caso,

Teorema Fraco de dualidade

Teorema Fraco de dualidade:
Se $x \in \mathbb{R}^n$ é viável no primal (max) e $u \in \mathbb{R}^m$ é viável dual (min) então $z(x) = c^t x \leq b^t u = w(u)$

Prova:

1. $\left.\begin{array}{l} Ax \leq b \quad \text{viável primal} \\ u \geq 0 \quad \text{viável dual} \end{array}\right\} \Rightarrow u^t(Ax) \leq u^t b = b^t u$
2. $\left.\begin{array}{l} A^t u \geq c \quad \text{viável dual} \\ x \geq 0 \quad \text{viável primal} \end{array}\right\} \Rightarrow x^t A^t u \geq x^t c = c^t x$

Assim: $c^t x \leq x^t A^t u = \left(x^t A^t u\right)^t = u^t(Ax) \leq b^t u$

Dualidade

Exemplo:

Primal	Dual
$\begin{array}{lrrr} \max & 2x_1 & +3x_2 & \\ & x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & 2x_1 & -x_2 & \leq 3 \\ & x_1 & +3x_2 & \leq 5 \\ & & x_j \geq 0 & \end{array}$	$\begin{array}{lrrrr} \min & 2y_1 & +3y_2 & +5y_3 & \\ & y_1 & +2y_2 & +y_3 & \geq 2 \\ & y_1 & -y_2 & +3y_3 & \geq 3 \\ & & y_j \geq 0 & & \end{array}$

Considere $x^t = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array}\right]$ viável primal, e $y^t = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$, viável dual. Substituindo, $z = 5 \leq 10 = w$

Propriedades dos problemas duais

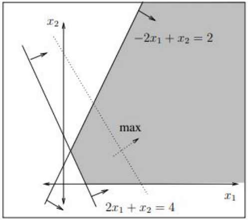
- **Corolários**

  Pelo Teorema da dualidade fraca:
  - Se o Primal for ilimitado, o dual é inviável.
  - Se o dual for ilimitado, o primal é inviável.

Dualidade

Primal ilimitado e dual inviável

Primal				Dual			
max	$3x_1$	$+2x_2$		min	$2y_1$	$+4y_2$	
	$-2x_1$	$+x_2$	≤ 2		$-2y_1$	$+2y_2$	≥ 3
	$2x_1$	$+x_2$	≥ 4		y_1	$+y_2$	≥ 2
		$x_j \geq 0$			$y_1 \geq 0$	$y_2 \leq 0$	



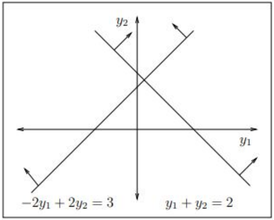


Figura: Primal ilimitado e dual inviável

Dualidade

Propriedades dos problemas duais

- **Corolários**

  Pelo Teorema da dualidade fraca:

  - O valor da função objetivo do Primal (max) é um limite inferior para o valor ótimo da função objetivo do dual
  - O valor da função objetivo do Dual (min) é um limite superior para o valor ótimo da função objetivo do primal

$$\frac{\text{Valor da função objetivo do problema de mínimo} \downarrow}{\text{Valor da função objetivo do problema de máximo} \uparrow}$$

Propriedades dos problemas duais

- **Teorema** :
  Se $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é viável no primal, $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ é viável dual e $z(\bar{x}) = w(\bar{u})$ então $\bar{x}$ é solução ótima do primal e $\bar{u}$ é solução ótima do dual
  Prova:
  Seja w uma ponto viável primal qualquer. Pelo teorema fraco de dualidade, $c^t w \leq b^t \bar{u} = c^t \bar{x}$. Logo, $\bar{x}$ é solução ótima. A prova de que $\bar{u}$ é ótimo do problema dual é análoga.

No exemplo anterior considere os pontos viáveis (primal e dual) $x^t = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right]$ viável primal, e $y^t = \left[\begin{array}{ccc} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$
O valor ótimo nos dois pontos é o mesmo, $z^* = 11$ logo as soluções são ótimas

- **Teorema forte da dualidade** :
  Se um problema de programação linear possui uma solução ótima, então seu dual também possui solução ótima e os valores ótimos dos dois problemas são iguais.

Dualidade

Teorema

Considere um par de problemas primal dual, e seja B uma base ótima do Primal, com $\bar{z} = c_B^t B^{-1} b$ o correspondente valor ótimo do Primal. Então $u^t = c_B^t B^{-1}$ é solução ótima do Dual.

Exemplo- produção de refrigerante

$$\begin{array}{llllll}
\text{max z} = & 60x_1 & +\ 30x_2 & +\ 20x_3 & \\
\text{s.a} & 8x_1 & +\ 6x_2 & +\ x_3 & \leq 48 \\
 & 4x_1 & +\ 2x_2 & +\ 1.5x_3 & \leq 20 \\
 & 2x_1 & +\ 1.5x_2 & +\ 0.5x_3 & \leq 8 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 &
\end{array}$$

Tabela ótima

Básicas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
z	1	0	5	0	0	10	10	280
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	24
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	0	1	$1,25$	0	0	$-0,5$	$1,5$	2

Base ótima associada às variáveis s_1, x_3 e x_1

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$c_B^t B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 60 \end{bmatrix} B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

Essa solução é ótima no dual!!!

Dualidade

Considere o par de problemas primal dual

$$\begin{array}{ll} \text{max z} = & c^t x \\ \text{s.a} & \text{Ax} \leq \text{b} \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{min w} = & b^t u \\ \text{s.a} & A^t u \geq c \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Ou ainda

$$\begin{array}{ll} \text{max z} = & c^t x \\ \text{s.a} & \text{Ax + Is = b} \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{min w} = & b^t u \\ \text{s.a} & A^t u - Ie = c \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Dualidade

Teorema - Folgas complementares

Dado um par de problemas primal dual (conforme definição acima), e sejam $\bar{x}$ viável primal e $\bar{u}$ viável dual.
Então $\bar{x}$ solução ótima primal e $\bar{u}$ solução ótima dual $\iff$

$$\bar{e}_j \bar{x}_j = 0 \quad j \in \{1, 2, ...n\}$$

$$\bar{s}_i \bar{u}_i = 0 \quad i \in \{1, 2, ...m\}$$

Ou seja:

$$\bar{x}_j^t (A^t \bar{y} - c)_j = 0 \quad j \in \{1, 2, ...n\}$$

$$\bar{y}_i^t (b - Ax)_i = 0 \quad i \in \{1, 2, ...m\}$$

Dualidade

Dessa forma, o produto de dois fatores não negativos é nulo, o que implica que se um deles é positivo, o outro é necessariamente igual a zero. Assim:

1. Se uma variável primal é positiva, a correspondente restrição no dual é satisfeita com igualdade.

$$\bar{x}_j > 0 \Rightarrow (A^t\bar{y} - c)_j = 0$$

2. Se uma restrição no primal não está ativa, isto é, se não vale a igualdade, então a correspondente variável dual é nula

$$(A\bar{x})_i < b_i \Rightarrow \bar{y}_i = 0$$

3. Se uma variável dual é positiva, a correspondente restrição no primal é satisfeita com igualdade.

$$\bar{y}_i > 0 \Rightarrow (A\bar{x} - b)_j = 0$$

4. Se uma restrição no dual não está ativa, isto é, se não vale a igualdade, então a correspondente variável primal é nula

$$(A^t\bar{y})_j > c_j \Rightarrow x_j = 0$$

Exemplo

Primal: $$\left\{\begin{array}{lllll} \max & 3x_1 & +2x_2 & -2x_3 & \\ & x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 5 \\ & 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & \leq 4 \\ & & x_j \geq 0 & & \end{array}\right.$$

Solução ótima: $\hat{x}^t = \left[\begin{array}{ccc} \frac{13}{5} & \frac{6}{5} & 0 \end{array}\right]$

Dual: $$\left\{\begin{array}{llll} \min & 5y_1 & +4y_2 & \\ & y_1 & +2y_2 & \geq 3 \\ & 2y_1 & -y_2 & \geq 1 \\ & 2y_1 & +3y_2 & \geq -2 \\ & & y_j \geq 0 & \end{array}\right.$$

Dualidade

Introduzindo variáveis de folga

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
\min & 5y_1 & +4y_2 & & & & \\
 & y_1 & +2y_2 & -e_1 & & & = 3 \\
 & 2y_1 & -y_2 & & -e_2 & & = 1 \\
 & 2y_1 & +3y_2 & & & -e_3 & = -2 \\
 & & y_j \geq 0 & & & &
\end{array}
$$

Com base em folgas complementares, vamos determinar uma solução do dual:

$$
\begin{array}{lclcl}
\text{Variável Primal} & & \text{Restrição Dual} & & \\
\hat{x}_1 = \frac{13}{5} > 0 & \Rightarrow & \hat{y}_1 + 2\hat{y}_2 = 3 & \Rightarrow & \hat{e}_1 = 0 \\
\hat{x}_2 = \frac{6}{5} > 0 & \Rightarrow & 2\hat{y}_1 - \hat{y}_2 = 1 & \Rightarrow & \hat{e}_2 = 0 \\
\hat{x}_3 = 0 & \Rightarrow & 2\hat{y}_1 + 3\hat{y}_2 - \hat{y}_5 = -2 & &
\end{array}
$$

Restrição Primal		Variável Dual
$\frac{13}{5} + 2 \times \frac{6}{5} = 5$	$\Rightarrow$	Calculo $\hat{y}_1$
$\frac{13}{5} \times 2 - \frac{6}{5} = 4$	$\Rightarrow$	Calculo $\hat{y}_2$

Substituo $\hat{y}_3$ e $\hat{y}_4$ no conjunto de restrições do dual e resolvo o sistema resultante :

$$\hat{y}_1 = 1, \quad \hat{y}_2 = 1, \quad \hat{e}_1 = 0, \quad \hat{e}_2 = 0, \quad \hat{e}_3 = 6.$$

$\boxed{\text{Essa solução é ótima!}}$

Dualidade

Interpretação: $\bar{u}_i$ indica quanto ganho se aumentar 1 unidade do recurso i

- Se $\bar{s}_i > 0 \Rightarrow$ Sobrou recurso i $\Rightarrow \bar{u}_i = 0$
- Se $\bar{s}_i = 0 \Rightarrow$ não sobrou recurso i $\Rightarrow \bar{u}_i > 0$

Shadow price Os shadow prices estão associados às restrições de um pl. O shadow price da i-ésima restrição de um pl é o montante em que o valor ótimo muda se o lado direito da i-ésima restrição aumenta em uma unidade.

Exercício Analise o que ocorre para o problema de produção de refrigerantes

MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS DE PRODUÇÃO

Celma de Oliveira Ribeiro

PRO - EPUSP

Aula 8 - 2020

Simplex dual

Simplex primal

- O simplex (primal) em cada iteração encontra uma solução viável e busca otimalidade. E temos também um candidato a solução dual $u^t = c_B^t B^{-1}$
- Na tabela do simplex, a **Linha 0** indica se a solução básica viável é ótima. Ou ainda, se a solução dual é viável

Simplex dual

- O simplex dual encontra, em cada iteração, uma solução ótima (primal), mas não necessariamente viável .
- O método garante otimalidade em cada iteração e busca viabilidade
- Parte de uma solução na qual a **Linha 0** é não negativa e há alguma coordenada negativa no lado direito da tabela
- Equivale a empregar o simplex no problema dual

Simplex dual

Considere a tabela do Simplex.

1. Se o lado direito de todas as restrições é ≥ 0, e todos os coeficientes da Linha 0 são não negativos **pare** a solução é ótima
2. Encontre uma restrição para a qual o lado direito é negativo (mais negativa)
3. Escolha a linha com coeficiente mais negativo para realizar as operações de pivotação (digamos linha **r**).
4. Calcule
$$\delta_j = \frac{\text{Coeficiente de } x_j \text{ na Linha 0}}{\text{Coeficiente de } x_j \text{na Linha r}}$$
para as colunas da linha r cujo coeficiente seja negativo. Se não existe coluna com coeficiente negativo, **pare** o problema é inviável
Selecione para entrar na base x_j tal que $|\delta_j|$ seja mínimo.
5. Faça as operações de pivotação usuais. Volte ao passo 1

Simplex Dual

Exemplo

O Primal:

$$\begin{array}{lrrr} \min & 3x_1 & +2x_2 & \\ & x_1 & +2x_2 & \geq 3 \\ & -2x_1 & +x_2 & \geq 2 \\ & x_1 & +4x_2 & \geq 7 \\ & & x_j \geq 0 & \end{array}$$

Exemplo

O Primal:

$$\begin{array}{lrrl}
\min & 3x_1 & +2x_2 & \\
 & x_1 & +2x_2 & \geq 3 \\
 & -2x_1 & +x_2 & \geq 2 \\
 & x_1 & +4x_2 & \geq 7 \\
 & & x_j \geq 0 &
\end{array}$$

É equivalente a:

$$\begin{array}{lrrrrrl}
\max(-z) & -3x_1 & -2x_2 & & & & \\
 & -x_1 & -2x_2 & +a_1 & & & = -3 \\
 & -2x_1 & +x_2 & & +a_2 & & = -2 \\
 & -x_1 & -4x_2 & & & +a_3 & = -7 \\
 & & x_j \geq 0 & & a_i \geq 0 & &
\end{array}$$

Simplex Dual

Básicas	w	x_1	x_2	a_1	a_2	a_3	
w	1	3	2	0	0	0	0
a_1	0	-1	-2	1	0	0	-3
a_2	0	-2	1	0	1	0	-2
a_3	0	-1	-4	0	0	1	-7

O Tableaux não é primal viável pois $x_B \ngeq 0$

Simplex Dual

Básicas	w	x_1	x_2	a_1	a_2	a_3	
w	1	3	2	0	0	0	0
a_1	0	-1	-2	1	0	0	-3
a_2	0	-2	1	0	1	0	-2
a_3	0	-1	-4	0	0	1	-7

O Tableaux não é primal viável pois $x_B \ngeq 0$

Mudança de base:
Saída $min\,\{-3, -2, -7\} = -7 \quad \Rightarrow a_3$ sai da base

Simplex Dual

Básicas	w	x_1	x_2	a_1	a_2	a_3	
w	1	3	2	0	0	0	0
a_1	0	-1	-2	1	0	0	-3
a_2	0	-2	1	0	1	0	-2
a_3	0	-1	-4	0	0	1	-7

O Tableaux não é primal viável pois $x_B \not\geq 0$

Mudança de base:

Saída $min\{-3, -2, -7\} = -7 \quad \Rightarrow a_3$ sai da base

Entrada $min\left\{\left|\frac{3}{-1}\right|, \left|\frac{2}{-4}\right|\right\} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x_2$ entra na base

Simplex Dual

Básicas	w	x_1	x_2	a_1	a_2	a_3		
w	1	3	2	0	0	0	0	$\left(-\frac{1}{2}\right)$
a_1	0	-1	-2	1	0	0	-3	$\left(\frac{1}{2}\right)$
a_2	0	-2	1	0	1	0	-2	$\left(\frac{1}{4}\right)$
a_3	0	-1	**-4**	0	0	1	-7	

Nova tabela

Básicas	w	x_1	x_2	a_1	a_2	a_3	
w	1	$5/2$	0	0	0	$1/2$	$-7/2$
a_1	0	$-1/2$	0	1	0	$-1/2$	$1/2$
a_2	0	$9/4$	0	0	1	$-1/4$	$-1/4$
x_2	0	$1/4$	1	0	0	$-1/4$	$7/4$

Saída: a_2
Entrada: a_3

Simplex Dual

Básicas	w	x_1	x_2	a_1	a_2	a_3	
w	1	$5/2$	0	0	0	$1/2$	$-7/2$
a_1	0	$-1/2$	0	1	0	$-1/2$	$1/2$
a_2	0	$9/4$	0	0	1	$-1/4$	$-1/4$
x_2	0	$1/4$	1	0	0	$-1/4$	$7/4$

Nova tabela:

Básicas	w	x_1	x_2	a_1	a_2	a_3	
w	1	7	0	0	2	0	-4
a_1	0	-4	0	1	-2	0	1
a_3	0	-9	0	0	-4	1	1
x_2	0	-2	1	0	-1	0	2

Tabela ótima!

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 2, \quad z^* = 4$$

Considere o problema do refrigerante

Exemplo 1 Suponha que você incluiu a restrição $x_2 \geq 1$

A. A solução ótima permanece viável?

B. Qual a nova solução ótima?

Exemplo 2 Suponha que você incluiu a restrição $x_1 + x_2 \geq 12$

A. A solução ótima permanece viável?

B. Qual a nova solução ótima?

Exemplo 3

Suponha que você incluiu a restrição $x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$

A. A solução ótima permanece viável?

B. Qual a nova solução ótima?

Simplex Dual

Exemplo 1

Com base na tabela ótima,

Básicas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_1	
z	1	0	5	0	0	10	10	0	280
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	0	24
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	0	8
x_1	0	1	$1,25$	0	0	$-0,5$	$1,5$	0	2
e_1	0	0	-1	0	0	0	0	1	-1

Saída e_1 sai da base
Entrada x_2 entra na base

Simplex Dual

Exemplo 1

Com base na tabela ótima,

Básicas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_1	
z	1	0	5	0	0	10	10	0	280
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	0	24
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	0	8
x_1	0	1	$1,25$	0	0	$-0,5$	$1,5$	0	2
e_1	0	0	-1	0	0	0	0	1	-1

Saída e_1 sai da base
Entrada x_2 entra na base

Básicas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_1	
z	1	0	5	0	0	10	10	0	280
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	0	24
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	0	8
x_1	0	1	$1,25$	0	0	$-0,5$	$1,5$	0	2
e_1	0	0	**-1**	0	0	0	0	1	-1

Exemplo 1

Com base na tabela ótima,

Básicas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_1		
z	1	0	5	0	0	10	10	0	280	(5)
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	0	24	(-2)
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	0	8	(-2)
x_1	0	1	$1,25$	0	0	$-0,5$	$1,5$	0	2	$(1,25)$
e_1	0	0	**-1**	0	0	0	0	1	-1	

Básicas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_1	
z	1	0	0	0	0	10	10	5	275
s_1	0	0	0	0	1	2	-8	-2	26
x_3	0	0	0	1	0	2	-4	-2	10
x_1	0	1	0	0	0	$-0,5$	$1,5$	$1,25$	$0,75$
e_1	0	0	1	0	0	0	0	-1	1

Tabela ótima!

Exemplo 2

Com base na tabela ótima,

Básicas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_1	
z	1	0	5	0	0	10	10	0	280
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	0	24
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	0	8
x_1	0	1	$1,25$	0	0	$-0,5$	$1,5$	0	2
e_1	0	-1	-1	0	0	0	0	1	-12

Elimine x_1 da última restrição

Básicas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_1	
z	1	0	5	0	0	10	10	0	280
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	0	24
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	0	8
x_1	0	1	$1,25$	0	0	$-0,5$	$1,5$	0	2
e_1	0	0	$0,25$	0	0	$-0,5$	$1,5$	1	-10

Saída e_1 sai da base

Entrada s_2 entra na base

Exemplo 2

Básicas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_1		
z	1	0	5	0	0	10	10	0	280	(20)
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	0	24	(4)
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	0	8	(4)
x_1	0	1	1,25	0	0	$-0,5$	1,5	0	2	(-1)
e_1	0	0	0,25	0	0	**-0,5**	1,5	1	-10	

Fazendo a pivotação:

Básicas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_1	
z	1	0	10	0	0	0	40	20	80
s_1	0	0	-1	0	1	0	-2	4	-16
x_3	0	0	-1	1	0	0	2	4	-32
x_1	0	1	1	0	0	0	0	-1	12
s_2	0	0	$-0,5$	0	0	1	-3	-2	20

Saída x_3 sai da base

Entrada x_2 entra na base

Exemplo 2

Básicas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_1		
z	1	0	10	0	0	0	40	20	80	(10)
s_1	0	0	-1	0	1	0	-2	4	-16	(-1)
x_3	0	0	**-1**	1	0	0	2	4	-32	
x_1	0	1	1	0	0	0	0	-1	12	(1)
s_2	0	0	$-0,5$	0	0	1	-3	-2	20	$(-0,5)$

Pivotando

Básicas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	e_1	
z	1	0	0	10	0	0	60	60	-240
s_1	0	0	0	-1	1	0	-4	0	16
x_2	0	0	1	-1	0	0	-2	-4	32
x_1	0	1	0	1	0	0	2	3	-20
s_2	0	0	0	$-0,5$	0	1	-4	-4	36

Saída x_1 sai da base
Entrada Não há coeficiente negativo! $\Rightarrow$ O problema primal é inviável

Bases primais e bases duais

Considere um problema de programação linear na forma padrão e seja B uma matriz básica associada à solução $x_B = B^{-1}b$ do problema primal.

- Em cada iteração, a cada solução básica viável para o problema primal está associada a uma solução básica dual, dada por $u^* = \left(B^{-1}\right)^t c_b$
- Se u^* é viável dual, ou seja, $A^t u^* \geq c$, então u é uma solução básica viável do problema dual.

Soluções básicas

Primal	Dual
$B^{-1}b$	$\left(B^{-1}\right)^t c_b$

Exemplo: [1]

Considere o par primal dual:

Primal - minimização

$$
\begin{array}{llll}
\text{min z} = & x_1 & + x_2 & \\
\text{s.a} & 1x_1 & + 2x_2 & \geq 2 \\
 & 1x_1 & & \geq 1 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

Dual - máximização

$$
\begin{array}{llll}
\text{max z} = & 2p_1 & + p_2 & \\
\text{s.a} & 1p_1 & + p_2 & \leq 1 \\
 & 2p_1 & & \leq 1 \\
 & p_1 \geq 0 & p_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

[1] ref; material de aula de Marina Andretta (ICMC-USP) sme0211 - Otimização linear

Simplex Dual

Considero o Primal e resolvo através do simplex dual

Básicas	z	x_1	x_2	s_1	s_2	
z	1	1	1	0	0	0
s_1	0	-1	-2	1	0	-2
s_2	0	-1	0	0	1	-1

Base: $\{s_1, s_2\}$

Saída da base $min\left\{\frac{1}{|-1|}; \frac{1}{|-2|}\right\} \Rightarrow$ Sai s_1 Entra na base: x_2

Básicas	z	x_1	x_2	s_1	s_2	
z	1	1	1	0	0	0
s_1	0	-1	-2	1	0	-2
s_2	0	-1	0	0	1	-1

Simplex Dual

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	
z	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	-1
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	1
s_2	0	-1	0	0	1	-1

Base: $\{x_2, s_2\}$
Solução não é ótima! Sai : s_2 Entra na base: x_1

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	
z	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_1	0	1	0	0	-1	1

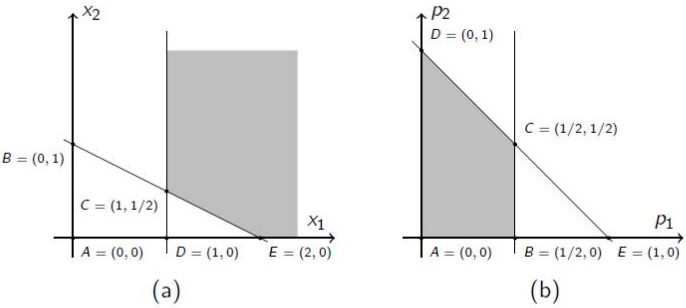
Base: $\{x_2, x_1\}$

Solução é ótima

Para cada uma das bases acima temos:

Primal	Dual	Ponto
$x^t = (0;0;-2;-1)$ inviável	$p^t = (0;0)$ Viável	A
$x^t = (0;1;0;-1)$ inviável	$p^t = (\frac{1}{2};0)$ Viável	B
$x^t = (1;\frac{1}{2};0;0)$ viável	$p^t = (\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ Viável	C

Graficamente:



As 5 bases diferentes do problema primal (A, B, C, D e E) da Figura (b) correspondem às 5 soluções básicas no problema dual (pontos A, B, C, D e E da Figura a).