PQI-5884 - Programação Inteira Mista aplicada à Otimização de Processos
3º Período 2023

Data	Atividade	Conteúdo
14/set	Aula 1	Introdução, formulação, classes, representação
21/set	Aula 2	Condições de otimalidade
28/set	Aula 3	Condições KKT, multiplicadores
06/out*	Aula 4	Otimização irrestrita
19/out	**Aula 5**	**LP**
26/out	Aula 6	NLP
09/out	Aula 7	MILP
17/nov*	Aula 8	MILP, problemas clássicos
23/nov	Aula 9	MILP, problema de scheduling
30/nov	Aula 10	MINLP, problema de síntese
07/dez	-	Apresentações

OTIMIZAÇÃO MULTIVARIÁEL COM RESTRIÇÕES

I) PROGRAMAÇÃO LINEAR (LP)

- Simplex
- Ponto-Interior

II) PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR (NLP)

- Multiplicadores de Lagrange
- Programação Linear Sucessiva (SLP)
- Gradiente Reduzido Generalizado (GRG)
- Programação Quadrática Sucessiva (SQP)

Exemplo LP / IP

2) Uma agência de correio requer diferentes quantidades de funcionários em tempo integral em diferentes dias da semana. Regras do sindicato impõem que cada funcionário trabalhe cinco dias consecutivos e receba dois dias de folga.

Dia	Dia da semana	Número de funcionários
1	Segunda-feira	17
2	Terça-feira	13
3	Quarta-feira	15
4	Quinta-feira	19
5	Sexta-feira	14
6	Sábado	16
7	Domingo	11

Qual o número mínimo de funcionários necessário?

Variáveis: x_j = número de funcionários que iniciam o trabalho no dia i (i = 1, 2, ... 7)

Objetivo: minimizar N, número de funcionários

Restrições: ter o número mínimo de funcionários disponíveis a cada dia, sendo que cada funcionário trabalha 5 dias consecutivos.

Formulação:

$$
\begin{array}{lll}
\text{min} & N = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & \\
\text{s.a.:} & x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17 & \text{(dia 1 segunda)} \\
 & x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13 & \text{(dia 2 terça)} \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 15 & \text{(dia 3 quarta)} \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 19 & \text{(dia 4 quinta)} \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 14 & \text{(dia 5 sexta)} \\
 & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 16 & \text{(dia 6 sábado)} \\
 & x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11 & \text{(dia 7 domingo)} \\
 & x_i \geq 0 , \quad i = 1, 2, \ldots 7 &
\end{array}
$$

Solução:

Real	Inteira
$N = 22{,}33$	$N = 23$
$x_1 = 6{,}33$	$x_1 = 7$
$x_2 = 5{,}00$	$x_2 = 5$
$x_3 = 0{,}33$	$x_3 = 0$
$x_4 = 7{,}33$	$x_4 = 7$
$x_5 = 0{,}00$	$x_5 = 0$
$x_6 = 3{,}33$	$x_6 = 4$
$x_7 = 0{,}00$	$x_7 = 0$

problema relaxado

Resolução como LP em GAMS

```
******** Declaração de Variáveis e Equações **********
FREE VARIABLES      N ;
POSITIVE VARIABLES X1, X2, X3, X4, X5, X6, X7 ;
EQUATIONS          OBJ, R1, R2, R3, R4, R5, R6, R7 ;

******************** Equações ************************
OBJ.. N -X1 -X2 -X3 -X4 -X5 -X6 -X7      =E= 0 ;
R1..    -X1         -X4 -X5 -X6 -X7 +17  =L= 0 ;
R2..    -X1 -X2         -X5 -X6 -X7 +13  =L= 0 ;
R3..    -X1 -X2 -X3         -X6 -X7 +15  =L= 0 ;
R4..    -X1 -X2 -X3 -X4         -X7 +19  =L= 0 ;
R5..    -X1 -X2 -X3 -X4 -X5         +14  =L= 0 ;
R6..        -X2 -X3 -X4 -X5 -X6     +16  =L= 0 ;
R7..            -X3 -X4 -X5 -X6 -X7 +11  =L= 0 ;

*******************  Solução  ************************
MODEL Problema / ALL / ;
SOLVE Problema USING LP MINIMIZING N;

******************************************************
```

```
Optimal solution found.
Objective :          22.333333

                      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ            .         .         .        1.000
---- EQU R1           -INF    -17.000   -17.000     -0.333
---- EQU R2           -INF    -14.667   -13.000       .
---- EQU R3           -INF    -15.000   -15.000     -0.333
---- EQU R4           -INF    -19.000   -19.000     -0.333
---- EQU R5           -INF    -19.000   -14.000       .
---- EQU R6           -INF    -16.000   -16.000     -0.333
---- EQU R7           -INF    -11.000   -11.000      EPS

                      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR N            -INF     22.333     +INF        .
---- VAR X1             .       6.333     +INF        .
---- VAR X2             .       5.000     +INF        .
---- VAR X3             .       0.333     +INF        .
---- VAR X4             .       7.333     +INF        .
---- VAR X5             .         .       +INF       0.333
---- VAR X6             .       3.333     +INF        .
---- VAR X7             .         .       +INF    -5.55E-17
```

Análise das restrições

```
Optimal solution found.
Objective :          22.333333

                        LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ              .         .         .        1.000
---- EQU R1             -INF    -17.000   -17.000     -0.333
---- EQU R2             -INF    -14.667   -13.000       .
---- EQU R3             -INF    -15.000   -15.000     -0.333
---- EQU R4             -INF    -19.000   -19.000     -0.333
---- EQU R5             -INF    -19.000   -14.000       .
---- EQU R6             -INF    -16.000   -16.000     -0.333
---- EQU R7             -INF    -11.000   -11.000      EPS
```

Folga

-1×Multiplic.

Restrições fortemente ativas:
R1, R3, R4, e R6
$\mu > 0{,}000$
Folga = 0,000

Restrições inativas:
R2 e R5
$\mu = 0{,}000$
Folga > 0,000

Restrições fracamente ativas:
R7
$\mu = 0{,}000$
Folga = 0,000

Resolução como MILP em GAMS

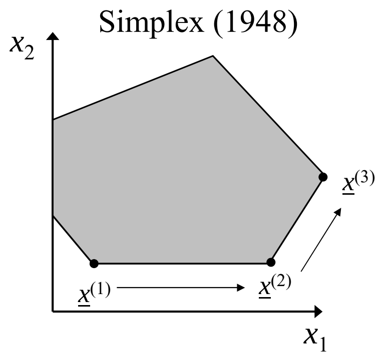
```
******* Declaração de Variáveis e Equações **********
FREE VARIABLES      N ;
INTEGER VARIABLES X1, X2, X3, X4, X5, X6, X7 ;
EQUATIONS           OBJ, R1, R2, R3, R4, R5, R6, R7 ;

******************** Equações ************************
OBJ.. N -X1 -X2 -X3 -X4 -X5 -X6 -X7      =E= 0 ;
R1..    -X1         -X4 -X5 -X6 -X7 +17  =L= 0 ;
R2..    -X1 -X2         -X5 -X6 -X7 +13  =L= 0 ;
R3..    -X1 -X2 -X3         -X6 -X7 +15  =L= 0 ;
R4..    -X1 -X2 -X3 -X4         -X7 +19  =L= 0 ;
R5..    -X1 -X2 -X3 -X4 -X5         +14  =L= 0 ;
R6..        -X2 -X3 -X4 -X5 -X6     +16  =L= 0 ;
R7..            -X3 -X4 -X5 -X6 -X7 +11  =L= 0 ;

*******************  Solução  ************************
MODEL Problema / ALL / ;
SOLVE Problema USING MIP MINIMIZING N;

******************************************************
```

```
Proven optimal solution.

MIP Solution:          23.000000    (5 iterations, 0 nodes)
Final Solve:           23.000000    (0 iterations)

Best possible:         23.000000
Absolute gap:           0.000000
Relative gap:           0.000000

                      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJ            .         .         .        1.000
---- EQU R1           -INF    -18.000   -17.000      .
---- EQU R2           -INF    -14.000   -13.000      .
---- EQU R3           -INF    -15.000   -15.000      .
---- EQU R4           -INF    -19.000   -19.000      .
---- EQU R5           -INF    -19.000   -14.000      .
---- EQU R6           -INF    -17.000   -16.000      .
---- EQU R7           -INF    -13.000   -11.000      .

                      LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR N            -INF     23.000     +INF        .
---- VAR X1             .       6.000     +INF       1.000
---- VAR X2             .       4.000     +INF       1.000
---- VAR X3             .       1.000     +INF       1.000
---- VAR X4             .       8.000     +INF       1.000
---- VAR X5             .         .       +INF       1.000
---- VAR X6             .       4.000     +INF       1.000
---- VAR X7             .         .       +INF       1.000
```

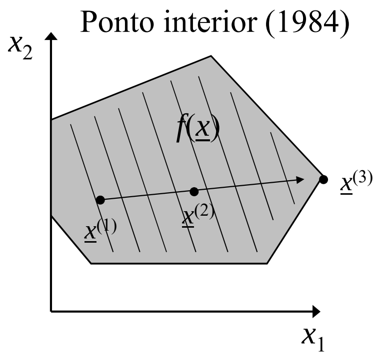
MILPs e LPs têm solução única (ótimo global), mas podem ocasionalmente ter <u>múltiplas soluções</u>

Soluções do LP		Soluções do MILP	
$N = 22{,}33$	$N = 22{,}33$	$N = 23$	$N = 23$
$x_1 = 6{,}33$	$x_1 = 6{,}00$	$x_1 = 7$	$x_1 = 6$
$x_2 = 5{,}00$	$x_2 = 5{,}33$	$x_2 = 5$	$x_2 = 6$
$x_3 = 0{,}33$	$x_3 = 0{,}00$	$x_3 = 0$	$x_3 = 0$
$x_4 = 7{,}33$	$x_4 = 7{,}33$	$x_4 = 7$	$x_4 = 7$
$x_5 = 0{,}00$	$x_5 = 0{,}00$	$x_5 = 0$	$x_5 = 0$
$x_6 = 3{,}33$	$x_6 = 3{,}33$	$x_6 = 4$	$x_6 = 3$
$x_7 = 0{,}00$	$x_7 = 0{,}33$	$x_7 = 0$	$x_7 = 1$

Programação Linear (LP: Linear Programming)



tragetória pelos vértices da região viável
tempo exponencial: $t \approx 2^n$



tragetória interna à região viável
tempo polinomial: $t \approx n^a$

Método SIMPLEX

Forma padrão LP:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & z = \underline{c}^{\mathrm{T}}.\underline{x} \\ \text{sujeito a} & \underline{A}.\underline{x} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \\ & \underline{x} \in \Re^n \end{array}$$

em que:

z	função objetivo, escalar
$\underline{x}$	vetor de variáveis com dimensão n
$\underline{A}$	matriz de coeficientes $m \times n$, com $m < n$
$\underline{b}$	vetor de termos constantes <u>positivos</u> com dimensão m
$\underline{c}$	vetor de coeficientes da função objetivo com dimensão n

Ajustes para obter o formato padrão

- Inequações podem ser convertidas em equações com variáveis de folga s, com $s \geq 0$

$$g_j(\underline{x}) \leq 0 \quad \rightarrow \quad g_j(\underline{x}) + s_j = 0, \quad s_j \geq 0$$

- Variáveis irrestritas ($x_i \in \Re^1$) são separadas em duas variáveis positivas

$$x_i \quad \rightarrow \quad (x_i^p - x_i^n), \quad x_i^p \geq 0, \quad x_i^n \geq 0$$

Método SIMPLEX

Separação das n variáveis em:
m variáveis dependentes (básicas)
$(n–m)$ variáveis independentes (não básicas)

$$\underline{\underline{A}}.\underline{x} = \left[\underline{\underline{B}} \quad \underline{\underline{N}}\right].\begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix} = \underline{\underline{B}}.\underline{x}_B + \underline{\underline{N}}.\underline{x}_N = \underline{b}$$

$\underline{\underline{B}}$ matriz quadrada $m \times m$

$$\underline{x}_B = \underline{\underline{B}}^{-1}.\underline{b} - \underline{\underline{B}}^{-1}.\underline{\underline{N}}.\underline{x}_N$$

variáveis dependentes

Método SIMPLEX

Teorema 1:

Fazendo $\underline{x}_N = \underline{0}$ tem-se:
$\underline{x}_B = \underline{\underline{B}}^{-1}.\underline{b}$

O ponto obtido é um vértice do problema.
Se $\underline{x}_B \geq 0$, então o vértice é viável.

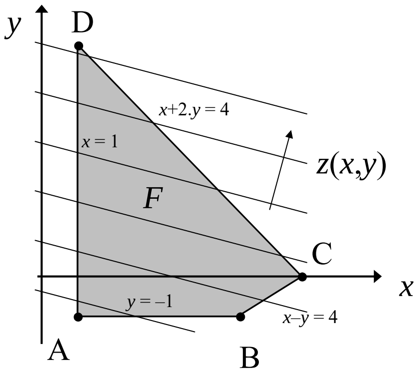
Teorema 2:

A solução ótima $\underline{x}^*$ encontra-se em um vértice.

Vértices do problema: $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!.(n-m)!}$

Exemplo LP

max $z = 2.x + 5.y$
s.a.: $x + 2.y \leq 4$
$x - y \leq 4$
$x \geq 1$
$y \geq -1$



Vértices:

A = $[1\ \ -1]^T$ → z(A) = –3,0 (mínimo de z)

B = $[3\ \ -1]^T$ → z(B) = 1,0

C = $[4\ \ 0]^T$ → z(C) = 8,0

D = $[1\ \ {}^3/_2]^T$ → z(D) = 9,5 (máximo de z)

Formato padrão LP

max $z = 2.x + 5.y$
s.a.: $x + 2.y \le 4$
$x - y \le 4$
$x \ge 1$
$y \ge -1$

$y = (y_p - y_n)$

min $z^{`} = -2.x - 5.(y_p - y_n)$
s.a.: $x + 2.(y_p - y_n) + s_1 = 4$
$x - (y_p - y_n) + s_2 = 4$
$x - s_3 = 1$
$-(y_p - y_n) + s_4 = 1$
$x, y_p, y_n, s_1, s_2, s_3, s_4 \ge 0$

min $\underline{c}^T.\underline{x}$
s.a.: $\underline{A}.\underline{x} = \underline{b}$
$\underline{x} \ge 0$

$n = 7$ variáveis
$m = 4$ equações
NGL = 3
→ 3 variáveis não básicas e 4 básicas

em que: $\underline{x}^T = [\ x\ \ y_p\ \ y_n\ \ s_1\ \ s_2\ \ s_3\ \ s_4\ ]$

$\underline{c}^T = [\ -2\ -5\ \ 5\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ ]$

$\underline{b}^T = [\ 4\ \ 4\ \ 1\ \ 1\ ]$

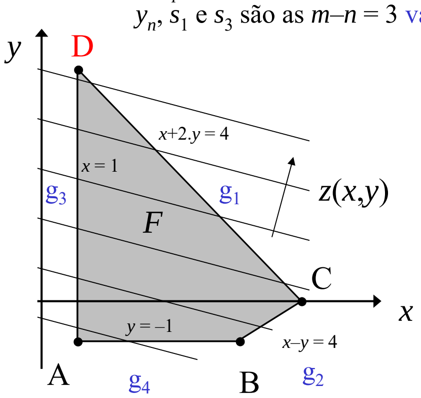
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & +1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vértice D:

$s_1 = s_3 = 0$ já que está no limites das respectivas restrições,
$y_n = 0$ pois y é positivo em D

$\underline{x}(D)^T = [\ 1\ \ \ 1{,}5\ \ \ 0\ \ \ 0\ \ \ 4{,}5\ \ \ 0\ \ \ 2{,}5\ ]$
$[\ x\ \ \ y_p\ \ y_n\ \ s_1\ \ s_2\ \ s_3\ \ s_4\ ]$

x, y_p, s_2 e s_4 são as $m = 4$ variáveis básicas
y_n, s_1 e s_3 são as m–n = 3 variáveis não-básicas



Método SIMPLEX

min $\quad z = \underline{c}^{\mathrm{T}}.\underline{x}$

s.a. $\quad \underline{\underline{A}}.\underline{x} = \underline{b}$

$\quad \underline{x} \geq \underline{0}$

$\quad \underline{x} \in \Re^{n}$

$\Downarrow$ Escolha da base

min $\quad z = \underline{c}_B^{\mathrm{T}}.x_B + \underline{c}_N^{\mathrm{T}}.x_N$

s.a. $\quad \underline{\underline{B}}.x_B + \underline{\underline{N}}.x_N = \underline{b}$

$\quad \underline{x} \geq \underline{0}$

$\quad \underline{x} \in \Re^{n}$

Algoritmo SIMPLEX

Tableau simplex:

$$
\begin{aligned}
z - \underline{c}_B^{\mathrm{T}}.x_B - \underline{c}_N^{\mathrm{T}}.x_N &= 0 \\
\underline{\underline{B}}.x_B + \underline{\underline{N}}.x_N &= \underline{b}
\end{aligned}
$$

	x_{B1} x_{B2} … x_{Bm}	x_{N1} x_{N2} … x_{Nt}	
z	$-\underline{c}_B^{\mathrm{T}}$	$-\underline{c}_N^{\mathrm{T}}$	0
x_{B1} x_{B2} … x_{Bm}	$\underline{\underline{B}}$	$\underline{\underline{N}}$	$\underline{b}$

	x_{B1} x_{B2} … x_{Bm}	x_{N1} x_{N2} … x_{Nt}	
z	$-\underline{c}_B^{T}$	$-\underline{c}_N^{T}$	0
x_{B1} x_{B2} … x_{Bm}	$\underline{\underline{B}}$	$\underline{\underline{N}}$	$\underline{b}$

1) Multiplicar restrições por $\underline{\underline{B}}^{-1}$
2) Somar à primeira linha as restrições multiplicadas por $\underline{c}_B^{T}$

	x_{B1} x_{B2} … x_{Bm}	x_{N1} x_{N2} … x_{Nt}	$\underline{b}$
z	$\underline{0}$	$\underline{c}_B^{T}.\underline{\underline{B}}^{-1}.\underline{\underline{N}} - \underline{c}_N^{T}$	$\underline{c}_B^{T}.\underline{\underline{B}}^{-1}.\underline{b}$
x_{B1} x_{B2} … x_{Bm}	$\underline{\underline{I}}$	$\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{B}}^{-1}.\underline{\underline{N}}$	$\underline{b}' = \underline{\underline{B}}^{-1}.\underline{b}$

Alternativas: pivotação de matrizes ou aproveitar formato inicial

Cada Tableau corresponde a um vértice viável

	x_{B1} x_{B2} … x_{Bm}	x_{N1} x_{N2} … x_{Nt}	$\underline{b}$
z	$\underline{0}$	$-\nabla z_{red}$	$\underline{c}_B^{T}.\underline{\underline{B}}^{-1}.\underline{b}$
x_{B1} x_{B2} … x_{Bm}	$\underline{\underline{I}}$	$\underline{\underline{Y}}$	$\underline{b}'$

Fazendo $\underline{x}_N = 0$ tem-se $\underline{x}_B$ e z

∇z_{red} é o gradiente da função objetivo expresso nas variáveis independentes $\underline{x}_N$.

Quando um termo do vetor ∇z_{red} é negativo, tem-se uma direção de minimização.

Escolher o maior valor positivo de $-\nabla z_{red}$ qual $\underline{x}_{Nj}$ entra na base?

Qual $\underline{x}_{Bi}$ deixa a base?
O primeiro a se tornar nulo com o avanço da $\underline{x}_{Nj}$ escolhida:

	x_{B1} x_{B2} … x_{Bm}	x_{N1} x_{N2} … x_{Nt}	b
z	$\underline{0}$	$-\nabla z_{red}$	$\underline{c}_B^{\mathrm{T}}.\underline{\underline{B}}^{-1}.\underline{b}$
x_{B1}, x_{B2}, …, x_{Bm}	$\underline{\underline{I}}$	$\underline{\underline{Y}}$	$\underline{b}'$

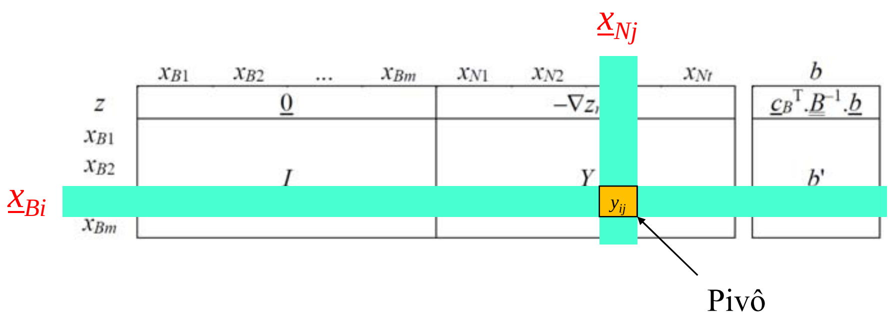
$$x_{B,i} + y_{i,j}.x_{N,j} = b_i'$$

Para garantir $x_B \geq 0$ (viabilidade) caso $y_{i,j}$ positivo:

$$x_{B,i} = b_i' - y_{i,j}.x_{N,j} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{N,j} \leq b_i'/y_{i,j}$$

Teste da razão mínima: escolher o menor valor positivo de $\dfrac{b_i'}{y_{i,j}}$

Atualização do Tableau por pivotação



Para avançar para o próximo vértice

Exemplo Simplex

min $z = -x_1 - 2.x_2$
s.a.: $-x_1 + 2.x_2 \le 4$
$2.x_1 - x_2 \le 4$
$x_1, x_2 \ge 0$

$\rightarrow$

min $z = -x_1 - 2.x_2$
s.a.: $-x_1 + 2.x_2 + s_1 = 4$
$2.x_1 - x_2 + s_2 = 4$
$x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0$

base

	x_1	x_2	s_1	s_2	b	b/y
z	1	2	0	0	0	
	–1	2	1	0	4	+2
	2	–1	0	1	4	–4

$\longrightarrow$ s_1 deixa a base
(menor razão positiva)

x_2 entra na base
(maior coef. positivo)

Vértice 1: $\underline{x} = [\ 0\ \ 0\ ]^T$, $\underline{s} = [\ 4\ \ 4\ ]^T$ com $z = 0$

	x_1	x_2	s_1	s_2	b	b/y
z	1	2	0	0	0	
s_1	–1	(2)	1	0	4	2
s_2	2	–1	0	1	4	–4

pivotação

	x_1	x_2	s_1	s_2	b	b/y
z	2	0	–1	0	–4	
	$-^1/_2$	1	$^1/_2$	0	2	–4
	$^3/_2$	0	$^1/_2$	1	6	+4

base

$\longrightarrow$ s_2 deixa a base
(menor razão positiva)

x_1 entra na base
(maior coef. positivo)

Vértice 2: $\underline{x} = [\ 0\ \ 2\ ]^T$, $\underline{s} = [\ 0\ \ 6\ ]^T$ com $z = -4$

	x_1	x_2	s_1	s_2	b	b/y
z'	2	0	–1	0	–4	
x_2	$-^1/_2$	1	$^1/_2$	0	2	–4
s_2	($^3/_2$)	0	$^1/_2$	1	6	4

pivotação

	x_1	x_2	s_1	s_2	b
z'	0	0	$-^5/_3$	$-^4/_3$	–12 z^*
x_2	0	1	$^2/_3$	$^1/_3$	4
x_1	1	0	$^1/_3$	$^2/_3$	4

Vértice 3: $\underline{x}^* = [\ 4\ \ 4\ ]^T$, $\underline{s} = [\ 0\ \ 0\ ]^T$ com $z^* = -12$
não-básicas básicas

Visualizando o progresso