Principais Distribuições

Vicente Garibay Cancho

17 de outubro de 2023

Principais modelos Discretos e Contínuos

Modelos discretos

- Uniforme
- Bernoulli
- Binomial
- Geométrico
- Binomial Negativa
- Poisson
- Hipergeometrica

Modelos contínuos

- Uniforme
- Exponencial
- Gama
- Weibull
- Beta
- Normal

Principais Modelos Contínuos

Modelo uniforme

Uma v.a. X tem distribuição Uniforme com parâmetros α e β, se sua função densidade de probabilidade (f.d.p.) é dada por:

$$f_X(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha}, & \text{se } \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Notação: $X \sim U(\alpha,\beta),\ \alpha < \beta$.
A função distribuição acumulada (f.d.a) de $X \sim \mathrm{U}(\alpha,\beta)$ é dada por:

$$F_X(x;\alpha,\beta) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \text{se } \alpha \leq x \leq \beta \\ 1, & \text{se } x \geq \beta. \end{cases}$$

Modelo uniforme

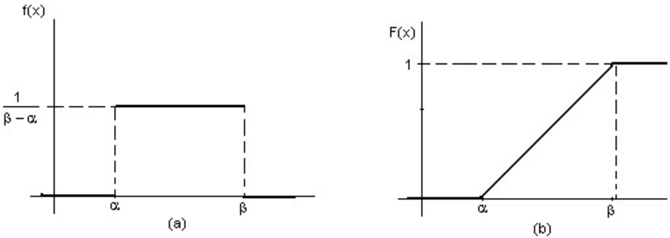


Figura: Função de: (a) densidade e (b) distribuição acumulada, da distribuição uniforme

As f.d.p, f.d.a, função quantil e a função geradora da v.a $X \sim U(\alpha, \beta)$ no R.

```
dunif(x, min = 0, max = 1, log = FALSE)
punif(q, min = 0, max = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qunif(p, min = 0, max = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
runif(n, min = 0, max = 1)
```

Modelo uniforme

Propriedades

Se $X \sim U(\alpha, \beta)$, então

- $E[X] = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ e $Var(X) = \dfrac{(\beta - \alpha)^2}{12}$.
- A função quantil é dada por

$$Q_X(p) = \alpha + p(\beta - \alpha), \; 0 < p < 1.$$

- a mediana é dada por

$$Q_X(1/2) = x_{0,5} = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

- a f.g.m

$$m_X(t) = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha}, \; t \neq 0$$

A transformada integral de probabilidade

Teorema

Suponha que uma variável aleatória X tem uma distribuição contínua para a qual a função de distribuição cumulativa (FDA) é $F_X(x)$. Então a variável aleatória definido como $Y = F_X(X)$ tem uma distribuição uniforme padrão, ou seja, $Y \sim U(0,1)$.

Demostração: Dada qualquer variável aleatória contínua X, definir $Y = F_X(X)$. Dado $y \in [0,1]$, $F_X^{-1}(y)$ existe pois X é uma v.a. contínua, então

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P[Y \leq y] = P[F_X(X) \leq y] \\
&= P[X \leq F_X^{-1}(y)] = F_X(F^{-1}(y)) \\
&= y
\end{aligned}
$$

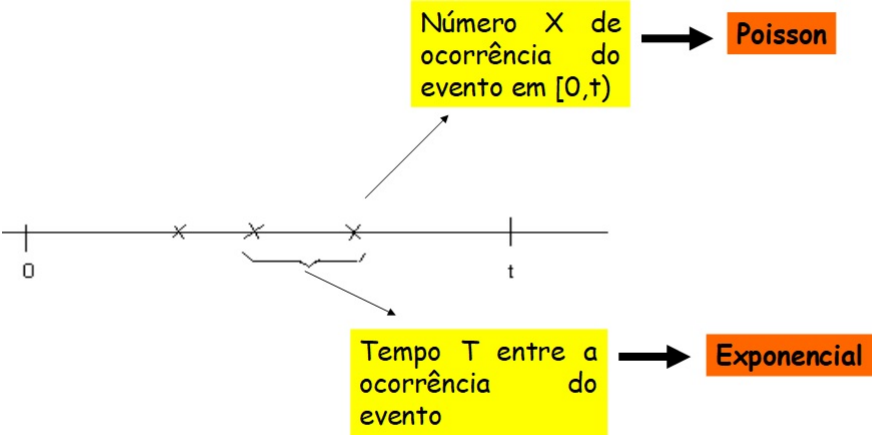
Dai

$$
F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leq y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow Y \sim U(0,1)
$$

Exercício: Mostre, se $U \sim U(0,1)$, $X = \alpha + u(\beta - \alpha) \sim U(\alpha, \beta)$ com $\alpha < \beta \in R$

Modelo Exponencial

Relação entre modelo Poisson e o modelo Exponencial



Modelo Exponencial

- Considere os eventos equivalentes:

Nenhuma ocorrência em [0,t] $\longleftrightarrow$ **A primeira ocorrência ser depois do tempo t**

- Sejam as variáveis:
  - X : Número de eventos discretos no intervalo [0,t); e
  - T : Tempo entre as ocorrência dos eventos
- Se λ for a média de eventos discretos em uma unidade de tempo, então $X \sim Po(\lambda t)$
- Os eventos equivalentes:

$$[X = 0] \Longleftrightarrow [T > t] \Longrightarrow P[X = 0] = P[T > t]$$

- Logo,

$$P[X = 0] = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t} = P[T > t]$$

Modelo Exponencial

A função de distribuição acumulada da v.a T

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}, \ t > 0.$$

A função de densidade de probabilidade da v.a T é dada por

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, \ c.c \end{cases}$$

Exemplo-6

Em uma grande rede corporativa de computadores, as conexões dos usuários ao sistema podem ser modelados como um processo de Poisson, com uma média de 25 conexões por hora.

(a) Qual é a probabilidade de não haver conexões em um intervalo de 6 minutos?

(b) Qual é a probabilidade de que o tempo até a próxima conexão esteja entre 2 a 3 minutos?

Modelo Exponencial

Solução:

Se T : tempo (em horas) do inicio do intervalo até a primeira conexão. Então a v.a tem f.d.a. dada por:

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-10t}, & t > 0 \\ 0, \ c.c \end{cases}$$

(a) Qual é a probabilidade de não haver conexões em um intervalo de 6 minutos?

$$P(T > 6/60) = 1 - F(1/10) = 0,082$$

(b) Qual é a probabilidade de que o tempo até a próxima conexão esteja entre 2 a 3 minutos?

$$P(2/60 < T < 3/60) = F(1/20) - F(1/30) = 0,152.$$

Modelo Exponencial

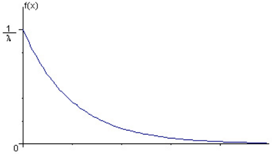
A v.a. X tem distribuição Exponencial com parâmetros $\lambda > 0$, se sua f.d.p. é dada por:

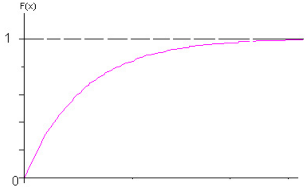
$$f_X(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Notação: $X \sim \text{Ex}(\theta)$.
A função de distribuição acumulada da v.a $X \sim Ex(\lambda)$ é dada por

$$F_X(x;\lambda) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0. \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Representação gráfica da f.d.p e f.d.a da v.a $X \sim Ex(\lambda)$.





Modelo Exponencial

Propriedades

Se $X \sim \text{Ex}(\lambda)$, tem-se

1) a média e variância : $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ e $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

2) A função quantil é dado por: $Q_X(q) = \frac{-\log(1-q)}{\lambda}, \quad 0 < q < 1.$

3) a mediana: $Q_X(1/2) = x_{0,5} = \frac{\log(2)}{\lambda}$.

4) A f.g.m. é dada por:

$$m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda.$$

5) Falta de memória

$$P(X > t + s | X > s) = P(X > t)$$

Modelo Exponencial

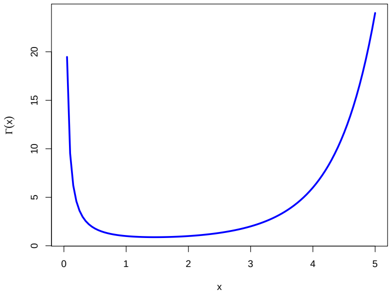
A f.d.p, f.d.a., função quantil e a função geradora da v.a $X \sim \text{Ex}(\lambda)$ no aplicativo R são dados por

```
dexp(x, rate = 1, log = FALSE)
pexp(q, rate = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qexp(p, rate = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rexp(n, rate = 1)
```

Função Gama

A função gama é definida por

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx.$$



Propriedades

- $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a),\ a > 0,$
- $\Gamma(n+1) = n!$, se n é enteiro.
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$

A função Gama Incompleta

Definição (Função gama incompleta)

A função gama incompleta inferiormente e superiormente são definidas por

$$\begin{aligned}\gamma(a,x) &= \int_0^x u^{a-1}e^{-u}du, \text{ e}\\ \Gamma(a,x) &= \int_x^\infty u^{a-1}e^{-u}du\end{aligned}$$

respectivamente.

Propriedades

- $\gamma(s+1,x) = s\gamma(s,x) - x^s e^{-x}$
- $\Gamma(s+1,x) = s\Gamma(s,x) + x^s e^{-x}$
- $\gamma(s+1,x) + \Gamma(s,x) = \Gamma(s)$
- $\Gamma(s) = \Gamma(s,0') = \lim_{x\to\infty} \gamma(s,x)$.

Modelo gama

A v.a. X tem distribuição Gama com parâmetros $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$, se sua f.d.p. é dada por:

$$f_X(x;\alpha,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

onde α é o parâmetro de forma e λ o parâmetro de escala e $\Gamma(\cdot)$ é a função gama.

Notação: $X \sim \text{Gama}(\alpha,\lambda)$. Da f.d.p da distribuição gama tem-se

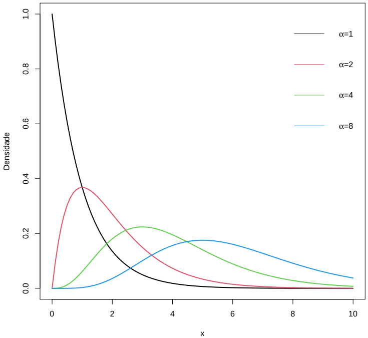
$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}.$$

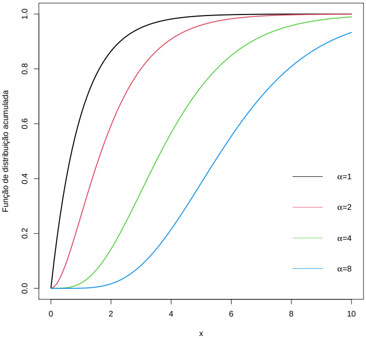
Modelo Gama

A função de distribuição acumulada da v.a $X \sim \text{Gama}(\alpha, \lambda)$.
é dado por

$$F_X(x; \alpha, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\gamma(a, \lambda x)}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

Representação gráfica da f.d.p e f.d.a da v.a. $X \sim \text{Gama}(\alpha, 1)$.





Modelo Gama

Propriedades

Se $X \sim Gama(\alpha, \beta)$, tem-se

1) $E[X] = \dfrac{\alpha}{\lambda}$ e $Var(X) = \dfrac{\alpha}{\lambda^2}$.

2) A f.g.m. é dada por: $m_X(t) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha} = \left(1 - \dfrac{t}{\lambda}\right)^{-\alpha}$.

3) Se $\alpha = 1$, então $X \sim Ex(\lambda)$.

A f.d.p, f.d.a, função quantil e função geradora da v.a $X \sim Gama(\alpha, \beta)$

```
dgamma(x, shape, rate = 1, scale = 1/rate, log = FALSE)
pgamma(q, shape, rate = 1, scale = 1/rate, lower.tail = TRUE,log.p = FALSE)
qgamma(p, shape, rate = 1, scale = 1/rate, lower.tail = TRUE,log.p = FALSE)
rgamma(n, shape, rate = 1, scale = 1/rate)
```

Modelo Gama

Observação (Distribuição qui-quadrado)

Se $X \sim Gama(\alpha, \beta)$ com $\alpha = k/2$ e $\lambda = 1/2$, $k \in \mathbb{Z}_+$, a v.a X tem distribuição qui-quadrado com k graus de liberdade e sua f.d.p. é dada por:

$$f_X(x; k) = \begin{cases} \dfrac{x^{k/2-1} e^{-x}}{(k/2)\Gamma(1/2)}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Notação: $X \sim \chi^2_{(k)}$.

Propriedades

Se $X \sim \chi^2_{(k)}$, tem-se

1) $E[X] = k$ e $Var(X) = 2k$.
2) A f.g.m. é dada por: $m_X(t) = (1 - 2t)^{-k/2}$, $t < 1/2$.

Distribuição de uma função de uma v.a.

- Suponha X é uma v.a contínua com $f_X(x)$, e temos interesse em determinar a distribuição de probabilidade de uma V.A. Y definida por: $Y = g(X)$, onde $g(\cdot)$ é uma função continua e diferenciável.
- Como determinar a distribuição Y?
  - a função de distribuição da v.a Y;
  - a f.g.m da v.a Y.

Exemplo (1)

Suponha que $X \sim Gama(\alpha, \lambda)$. Determinar a f.d.p. da V.A. $Y = cX$, $c > 0$.

Solução:

- O suporte de X é dada por $R_X = \{x; x > 0\}$ e da v.a. Y é $R_Y = \{y; y > 0\}$.
- Para $y \in R_Y$, a função de probabilidade acumulada é:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(cX \leq y) = P(X \leq y/c) = F_X(y/c).$$

Distribuição de uma função de uma v.a.

- Daí,

$$f_Y(y) = \frac{1}{c} f_X(y/c) = \frac{1}{c} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{y}{c}\right)^{\alpha-1} e^{-\lambda y/c}$$
$$= \frac{(\lambda/c)^\alpha y^{\alpha-1} e^{-\lambda y/c}}{\Gamma(\alpha)}, y > 0.$$

- Portanto, $Y \sim Gama(\alpha, \lambda/c)$.

Outra forma,

$$M_Y(t) = E[e^{tY}] = E[e^{tcX}] = M_X(tc) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - tc}\right)^\alpha = \left(\frac{\lambda/c}{\lambda/c - t}\right)^\alpha$$

Daí tem-se que $Y \sim Gama(\alpha, \lambda/c)$.

Distribuição de uma função de uma v.a.

Teorema

Suponha que X é uma V.A. contínua com f.d.p. $f_X(x)$; *seja* $R_X = \{x; f_X(x) > 0\}$ *o suporte da V.A. Assuma que:*

i) $Y = H(X)$ *define uma transformação* 1 *a* 1 *de* R_X *em* R_Y *(suporte* Y*).*

ii) *A derivada de* $x = H^{-1}(y)$ *em relação à* y *é contínua e diferente de zero para* $y \in R_Y$, *onde* $H^{-1}(y)$ *é a função inversa de* $H(x)$, *isto é,* $H^{-1}(y)$ *é o valor de* x *que corresponde* $H(x) = y$. *Então,* Y *é uma V.A. contínua com f.d.p.:*

$$f_Y(Y) = |\frac{d}{dy}H^{-1}(y)|f_X(H^{-1}(y))I_{R_Y}(y).$$

Distribuição de uma função de uma v.a.

Suponha que R_X é um intervalo e $H(x)$ é uma função monótona (crescente ou decrescente) sobre x.

- Crescente: $H'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dy}H^{-1}(y) > 0$ sobre R_Y. Para $y \in R_Y$,

  $$F_y(Y) = P(Y \leq y) = P(H(X) \leq y) = P(X \leq H^{-1}(y))$$

  Daí

  $$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}H^{-1}(y)f_X(H^{-1}(y)).$$

- Decrescente: $H'(x) < 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{d}{dy}H^{-1}(y) < 0$ sobre R_Y. Para $y \in R_Y$,

  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(H(X) \leq y) = P(X > H^{-1}(y)) = 1 - P(X \leq H^{-1}$
  $\Rightarrow F_Y(y) = 1 - F_X(H^{-1}(y)).$

  Daí, $f_Y(y) = -\dfrac{d}{dy}H^{-1}(y)f_X(H^{-1}(y))I_{R_Y}(y).$

Exemplo (Gama-Inversa)

Suponha $X \sim \text{Gama}(\alpha, \lambda)$. Determine a f.d.p. da v.a. $Y = 1/X$.
Solução: Note que $y = H(x) = 1/x \Rightarrow x = \frac{1}{y} = H^{-1}(y)$.

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y^2}$$

Pelo teorema anterior a f.d.p. de Y é

$$f_Y(y) = |\frac{d}{dy}(H^{-1}(y))| f_X(H^{-1}(y))$$

onde $f_X(x) = \dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} I_{R_X}(x)$ com suporte $R_X = \{x; x > 0\}$. Daí,

$$f_Y(y) = \frac{1}{y^2}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\frac{\lambda}{y}},\ y > 0 \quad \Rightarrow \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\lambda}{y}} & ,\ y > 0 \\ 0 & ,\ c.c. \end{cases}$$

A distribuição da V.A. Y é conhecida como a distribuição Gama-Inversa.

Modelo Weibull

Uma v.a. X tem distribuição Weibull com parâmetros $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$, se sua f.d.p. é dada por:

$$f_X(x;\alpha,\lambda) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\lambda^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha}, & x > 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Notação: $X \sim Weibull(\alpha, \lambda)$.
A f.d.a. da distribuição Weibull(α, λ) é dada por:

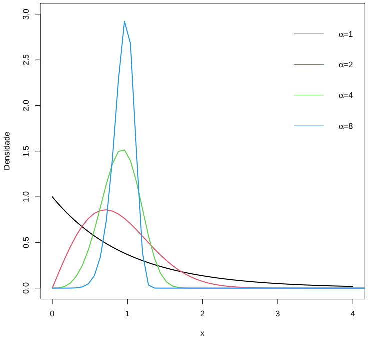
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

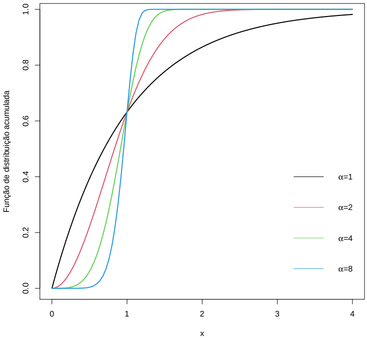
No aplicativo R as f.d.p, f.d.a, a função quantil e função geradora da distribuição Weibull são respectivamente,

```
dweibull(x, shape, scale = 1, log = FALSE)
pweibull(q, shape, scale = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qweibull(p, shape, scale = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rweibull(n, shape, scale = 1)
```

Modelo Weibull

Representação gráfica da f.d.p e f.d.a da v.a. $X \sim \text{Weibull}(\alpha, 1)$.





Modelo Weibull

Propriedades

Se $X \sim Weibull(\alpha, \lambda)$, tem-se

1) r-ésimo momento

$$\mu'_r = E(X^r) = \lambda^r \Gamma(1 + r/\alpha)$$

2) A media e variância são:

$$E[X] = \lambda\Gamma(1{+}1/\alpha),\ ee; Var(X) = \lambda^2 \left(\Gamma(1+2/\alpha) - \Gamma(1+1/\alpha)^2\right).$$

3) A função quantil

$$Q_X(p) = -\lambda \log(1-q)^{\alpha},\ 0 < q < 1;$$

4) A mediana

$$Q_X(1/2) = x_0.5 = \lambda \log(2)^{\alpha}.$$

Modelo Weibull

Exemplo

O tempo de vida de um certo tipo de capacitor tem distribuição Weibull com parâmetros $\lambda = 100.000$ horas e $\alpha = 0,5$.

(a) Qual é a probabilidade de um capacitor operar por um tempo superior a 1 ano?

(b) Determine o tempo médio de vida do capacitor.

Solução:

- Se X representa o tempo de vida de capacitores, então $X \sim \text{Weibull}(\alpha = 0,5, \lambda = 100.000)$
- Assim,

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x}{100.000}\right)^{0,5}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Modelo Weibull

(a) Qual é a probabilidade de um capacitor operar por um tempo superior a 1 ano?

$$P(X > 365 \times 24) = 1 - F_X(8760) = \exp\left\{-\left(\frac{8760}{100.000}\right)^{0,5}\right\} = 0.743$$

No R:= 1-pweibull(8760,shape=0.5, scale=10000)

(b) Determine o tempo médio de vida do capacitor.

$$\begin{aligned} E[X] &= \lambda\Gamma(1 + 1/\alpha) \\ &= 100.000\Gamma(1 + 1/0,5) = 100.000 \times 2! = 200.000h \end{aligned}$$

Observação

Se $X \sim$ *Weibull*$(\alpha = 1, \lambda)$, *então* $X \sim$ *Ex*(λ)

Modelo Beta

Uma v.a. X tem distribuições Beta com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, se a f.d.p. é dada por:

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} I_{(0,1)}(x),$$

onde, $B(\alpha, \beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

Notação: $X \sim Beta(\alpha, \beta)$. A FDA da distribuição é dada por

$$\begin{aligned} F(x; \alpha, \beta) &= \frac{\int_0^x t^{a-1}\,(1-t)^{b-1}\,dt}{B(\alpha, \beta)} \\ &= \frac{B(x; \alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)} \\ &= I_x(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

onde $\mathrm{B}(x; \alpha, \beta)$ é a função beta incompleta e $I_x(\alpha, \beta)$ é a função beta incompleta regularizada.

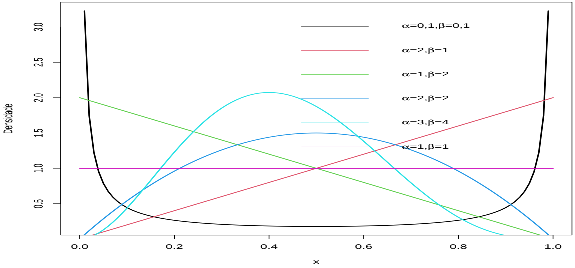
Modelo Beta

Observação

Das propriedades da f.d.p da distribuição Beta, tem-se

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

A representação gráfica da f.d.p da $X \sim Beta(\alpha, \beta)$



Modelo Beta

Propriedades

Se $X \sim Beta(\alpha, \beta)$, tem-se

1) O r-ésimo momento de X é

$$E[X^r] = \int_0^1 \frac{x^r x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} dx$$
$$= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+r-1}(1-x)^{\beta-1} dx = \frac{B(\alpha+r,\beta)}{B(\alpha,\beta)},$$

onde $r = 1, 2, 3, \ldots$.

2) De (1), tem-se

$$E[X] = \frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

Modelo Beta

Exercício

Considere que a v.a $X \sim Beta(\alpha, \beta)$. Determine

(a) a f.d.p da v.a. $Y = cX$, $c > 0$

(b) a f.d.p da v.a. $Y = -\log X$, quando $\beta = 1$.

No aplicativo R, as f.d.p, f.d.a., função quantil e gerador do modelo são respectivamente

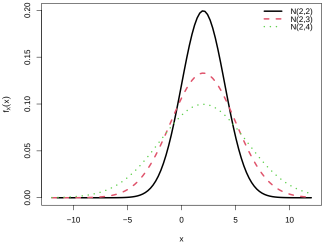
```
dbeta(x, shape1, shape2, ncp = 0, log = FALSE)
pbeta(q, shape1, shape2, ncp = 0, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qbeta(p, shape1, shape2, ncp = 0, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rbeta(n, shape1, shape2, ncp = 0)
```

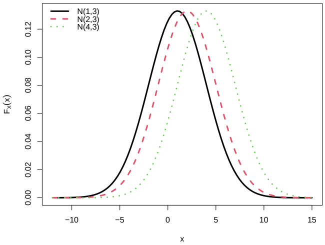
Modelo Normal

Uma v.a. X tem distribuição Normal com parâmetros $\mu \in \mathcal{R}$ e $\sigma^2 > 0$, se sua f.d.p. é dada por:

$$f_X(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathcal{R} \tag{1}$$

Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.





Modelo Normal

Propriedades

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então:

(i) $E[X] = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$.

(ii) A f.g.m. é $m_X(t) = e^{\mu t + t^2\sigma^2/2}$.

(iii) O coeficiente de assimetria, $S_k = 0$

(iv) O coeficiente de curtose, $C_x = 3$

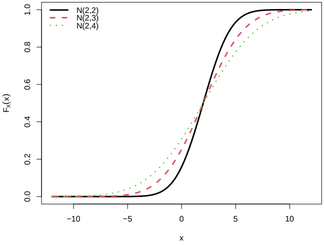
(v)

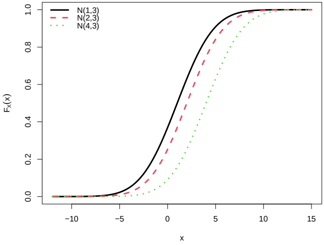
$$
\begin{aligned}
P[\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma] &= 0,6826 \\
P[\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma] &= 0,9544 \\
P[\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma] &= 0,9973
\end{aligned}
$$

Modelo Normal

A FDA de uma v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ é dada por

$$F_X(x; \mu, \sigma^2) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt.$$





Modelo Normal Padrão

Se Z é uma variável aleatória normal com média zero e variância um, então Z é chamado de uma v.a. normal padrão ou reduzida e sua f.d.p é dada por:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2}, \; z \in R$$

A FDA de a v.a. $Z \sim N(0,1)$, é representada por

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-t^2} dt$$

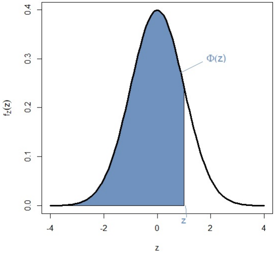


Tabela Normal Padrão

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420
0,3	0,617911	0,621719	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805106	0,807850
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,878999
1,2	0,884930	0,886860	0,888767	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958
1,3	0,903199	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914656
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219
1,5	0,933193	0,934478	0,935744	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959071	0,959941	0,960796	0,961636
1,8	0,964070	0,964852	0,965621	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258
1,9	0,971284	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915
2,6	0,995339	0,995473	0,995603	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511
3,0	0,998650	0,998694	0,998736	0,998777	0,998817	0,998856	0,998893	0,998930
3,1	0,999032	0,999064	0,999096	0,999126	0,999155	0,999184	0,999211	0,999238
3,2	0,999313	0,999336	0,999359	0,999381	0,999402	0,999423	0,999443	0,999462
3,3	0,999517	0,999533	0,999550	0,999566	0,999581	0,999596	0,999610	0,999624
3,4	0,999663	0,999675	0,999687	0,999698	0,999709	0,999720	0,999730	0,999740
3,5	0,999767	0,999776	0,999784	0,999792	0,999800	0,999807	0,999815	0,999821
3,6	0,999841	0,999847	0,999853	0,999858	0,999864	0,999869	0,999874	0,999879
3,7	0,999892	0,999896	0,999900	0,999904	0,999908	0,999912	0,999915	0,999918
3,8	0,999928	0,999930	0,999933	0,999936	0,999938	0,999941	0,999943	0,999946
3,9	0,999952	0,999954	0,999956	0,999958	0,999959	0,999961	0,999963	0,999964

Exemplo

Seja $Z \sim N(0, 1)$ determinar:

(a) $P(Z \leq 1.80)$

(b) $P(0.55 \leq Z < 1.80)$,

(c) $P(Z < -0, 55)$

(d) o valor de k tal que $P(Z \leq k) = 0.05$

Modelo Normal

Resultado (Transformação linear)

Suponha que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Então a V.A. $Y = a + bX$ tem distribuição Normal com média igual a $a + b\mu$ e variância dada por $b^2\sigma^2$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} m_Y(t) = E[e^{tY}] = E[e^{t(a+bX)}] = E[e^{ta}e^{tbX}] = e^{ta}E[e^{tbX}] \\ = e^{ta}m_X(tb) = e^{ta}e^{\mu bt + b^2t^2\sigma^2/2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M_Y(t) = e^{t(a+\mu b)+t^2(b^2\sigma^2)/2}.$$

Portanto, $Y \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$. ■

Corolário (Normal padrão)

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ a v.a.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Exemplos de aplicação

Exemplo

Seja $X \sim N(90, 100)$ determinar

(a) $P(90 \leq X \leq 100)$,

(b) $P(|X - 90| \leq 30)$,

(c) o valor de x_0 tal que $P(X \leq x_0) = 0,985$

Solução: (a)

$$\begin{aligned} P(90 \leq X \leq 100) &= P\left(\frac{90-90}{10} \leq \frac{X-90}{10} \leq \frac{100-90}{10}\right) \\ &= P\left(0 \leq Z \leq 1\right) = \Phi(1) - \Phi(0) \\ &= 0,841345 - 0,5 = 0,341345. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(|X - 90| \leq 30) &= P\left(\left|\frac{X-90}{10}\right| \leq \frac{30}{10}\right) \\ &= P\left(|Z| \leq 3\right) = P(-3 \leq Z \leq 3) = \Phi(3) - \Phi(-3) \end{aligned}$$

Exemplos de aplicação

Note que $\Phi(-3) = 1 - \Phi(3)$,

$$\begin{aligned} P(|X - 90| \leq 30) &= \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 \\ &= 2(0,99865) - 1 = 0,9973 \end{aligned}$$

(c)

$$P(X \leq x_0) = 0,985 \Longrightarrow P\left(\frac{X - 90}{10} \leq \frac{x_0 - 90}{10}\right) = 0,985$$

Da Tabela normal padrão $\frac{x_0 - 90}{10} = 2,17$, daí tem-se
$x_0 = 90 + 10(2,17) = 111,7$

A função quantil da distribuição normal

Seja $X \sim N(\mu, \sigma)$, a função quantil é dado por

$$Q_X(p) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(p),\ 0 < p < 1$$

onde $\Phi^{-1}(p)$ é a função quantil da distribuição normal padrão.

Observação

- $\Phi^{-1}(1/2) = 0$,
- $Q_X(1/2) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(1/2) = \mu = x_{md}$

Exemplos de aplicação

No aplicativo R, as f.d.p, f.d.a., função quantil e gerador do modelo são respectivamente

```
dnorm(x, mean = 0, sd = 1, log = FALSE)
pnorm(q, mean = 0, sd = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qnorm(p, mean = 0, sd = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rnorm(n, mean = 0, sd = 1)
```

Cálculo das probabilidades com o software R

```
(a) P(90<X<100)=pnorm(100, 90,10)-pnorm(90, 90,10)=0,3413447

(b) P(|X-90|\leq 30 )=P(-39<X-90<30)
                     =pnorm(30,0,10)-pnorm(30,0,10)= 0,9973002

 (c) P(X<= x_0)=F_X(x_0)= 0,985,
 x_0=Q_X(0,985)=qnorm(0.985,90,10)= 111.7009
```

Exercício

O tempo gasto no exame vestibular de uma universidade tem distribuição normal com média 120 minutos e desvio padrão 15 minutos. Sorteando-se um aluno ao acaso, qual é probabilidade dele terminar o exame antes de 100 minutos?

(a) Sorteando-se um aluno ao acaso, qual é probabilidade dele terminar o exame antes de 100 minutos?

(b) Qual deve ser o tempo de prova de modo que permita o 95% dos vestibulandos terminem no prazo estipulado?

(c) Qual o intervalo central de tempo, tal que 80

Resultado (Distribuição qui-quadrado)

Se $X \sim N(0,1)$, então a v.a. $Y = X^2$ tem distribuição qui–quadrado com 1 grau de liberdade.

Demonstração:

(i) Se $X \sim N(0,1)$, temos que $f_X(x) = (\sqrt{2\pi})^{-1} e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$;

(ii) Já que $Y = X^2$ o suporte da v.a Y é $R_Y = \{y : y > 0\}$;

(iii) Para $y \in R_Y$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y}) \\ F_Y(y) &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}), \end{aligned}$$

(iv) Derivando, $\dfrac{d}{dy} F_Y(y) = \dfrac{d}{dy} F_X(\sqrt{y}) - \dfrac{d}{dy} F_X(-\sqrt{y})$.

(iv) Obtém-se

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}2^{1/2}} y^{1/2-1} e^{-y/2} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1/2)2^{1/2}} y^{1/2-1} e^{-y/2}, \quad y > 0. \end{aligned}$$

Portanto, $Y \sim \chi^2_{(1)}$.