

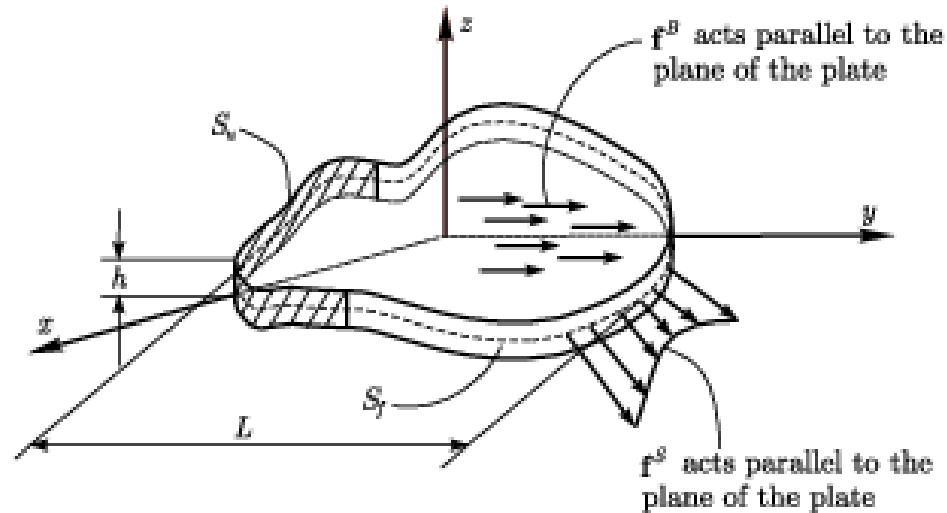
Elasticidade Plana: Estado Plano de Tensão (EPT)

Prof. Alfredo Gay Neto

Prof. Miguel Luiz Bucalem

*Livro *The Mechanics of Solids and Structures-Hierarchical Modeling and the Finite Element Solution*, pág. 187*

Motivação: Chapa delgada com carregamento atuando no plano da chapa



Hipóteses em relação ao campo de tensões:

$$\tau_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

E, levando em conta que a chapa é delgada, admite-se ainda que:

$$\tau_{xx} = \tau_{xx}(x, y); \tau_{yy} = \tau_{yy}(x, y); \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)$$

Considerando-se as equações diferenciais de equilíbrio:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x^b &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y^b &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + f_z^b &= 0\end{aligned}$$

Estas simplificam-se para:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x^b &= 0 \Rightarrow f_x^b = f_x^b(x, y) \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + f_y^b &= 0 \Rightarrow f_y^b = f_y^b(x, y) \\ f_z^b &= 0\end{aligned}$$

Relações constitutivas

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\tau_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} \tau_{yy}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\tau_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} \tau_{xx}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\tau_{xx} + \tau_{yy})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 0$$

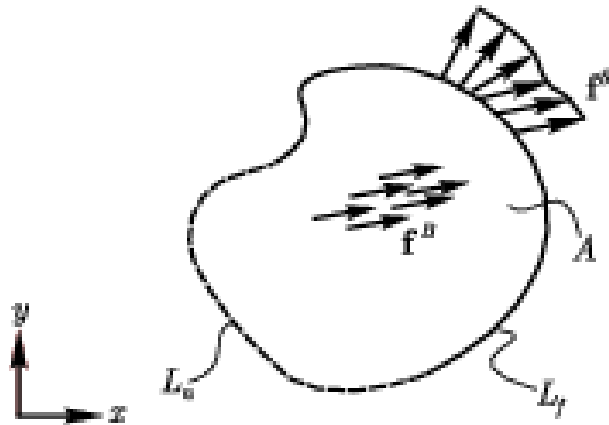
$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0$$

Utilizando a notação $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\boldsymbol{\tau}$ e $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$ ($\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}$), resulta:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Formulação diferencial do modelo do estado plano de tensão



Dados:

$$f_x^b = f_x^b(x, y) \text{ e } f_y^b = f_y^b(x, y), \text{ definidos em } A$$

Determinar:

$$u(x, y); v(x, y); \tau_{xx}(x, y); \tau_{yy}(x, y); \tau_{xy}(x, y); \\ \varepsilon_{xx}(x, y); \varepsilon_{yy}(x, y); \gamma_{xy}(x, y).$$

Tal que:

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x^b = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + f_y^b = 0$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\left. \vphantom{\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}} \right\} \forall \mathbf{x} \in A$$

$$f_x^s = \hat{f}_x^s(x, y)$$

$$f_y^s = \hat{f}_y^s(x, y)$$

$$\left. \vphantom{f_x^s = \hat{f}_x^s(x, y)} \right\} \forall \mathbf{x} \in L_f$$

$$u = \hat{u}(x, y)$$

$$v = \hat{v}(x, y)$$

$$\left. \vphantom{u = \hat{u}(x, y)} \right\} \forall \mathbf{x} \in L_u$$

Quando a solução para este problema plano é determinada, a solução do problema 3D é obtida considerando-se, adicionalmente:

$$\tau_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\tau_{xx} + \tau_{yy})$$

A solução de EPT para o problema 3D não é exata.

De fato:

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}(x, y) \text{ e } \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_{zz}(x, y)$$

Integrando em relação a z:

$$w(x, y, z) = z\varepsilon_{zz}(x, y) + f(x, y)$$

Assumindo $w(x, y, z) = 0$, para $z=0 \rightarrow f(x, y) = 0$ e $w(x, y, z) = z\varepsilon_{zz}(x, y)$

Pode-se calcular :

$$\gamma_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = z \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y} \neq 0 \text{ (em geral)}$$

Note-se que as hipóteses iniciais

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

A solução exata do problema 3-D e aquela obtida pelo modelo EPT diferem por termos proporcionais a espessura ao quadrado da chapa => Solução de EPT é boa para chapas delgadas

Resultam em:

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

Formulação diferencial do modelo do EPD ou EPT

Dados:

$$f_x^b = f_x^b(x, y) \text{ e } f_y^b = f_y^b(x, y), \text{ definidos em } A$$

Determinar:

$$u(x, y); v(x, y); \tau_{xx}(x, y); \tau_{yy}(x, y); \tau_{xy}(x, y); \varepsilon_{xx}(x, y); \varepsilon_{yy}(x, y); \gamma_{xy}(x, y).$$

Tal que:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x^b &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + f_y^b &= 0 \end{aligned} \right\} \tau = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \forall \mathbf{x} \in A$$

$$\left. \begin{aligned} f_x^s &= \hat{f}_x^s(x, y) \\ f_y^s &= \hat{f}_y^s(x, y) \end{aligned} \right\} \forall \mathbf{x} \in L_f$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \hat{u}(x, y) \\ v &= \hat{v}(x, y) \end{aligned} \right\} \forall \mathbf{x} \in L_u$$

Considerando o \mathbf{C} aplicável para EPD ou EPT

Definindo-se os módulos efetivos E_* e ν_* :

$$\begin{array}{c} \text{EPD} \\ \\ E_* = \frac{E}{1 - \nu^2} \\ \nu_* = \frac{\nu}{1 - \nu} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{EPT} \\ \\ E_* = E \\ \nu_* = \nu \end{array}$$



$$\mathbf{C} = \frac{E_*}{1 - \nu_*^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_* & 0 \\ \nu_* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_*}{2} \end{bmatrix}$$

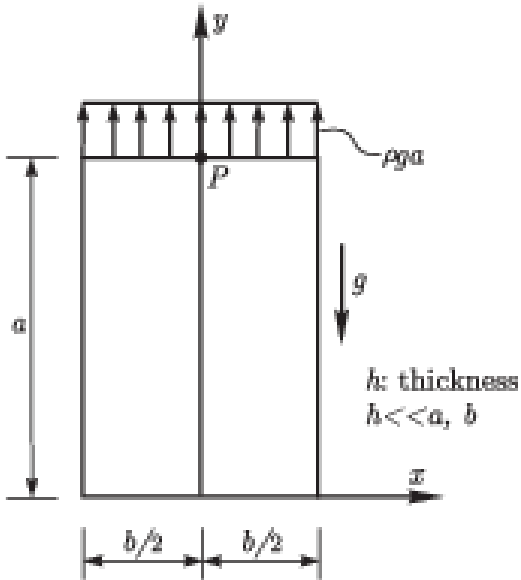
Para EPD:

$$\mathbf{C} = \frac{\frac{E}{1 - \nu^2}}{\left(1 - \frac{\nu}{1 - \nu}\right)\left(1 + \frac{\nu}{1 - \nu}\right)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \end{bmatrix}$$

Exemplo 4.1, pág. 193

Chapa delgada sob ação do peso próprio



Considera-se EPT.

Tem-se:

- $f_x^b = 0$ e $f_y^b = -\rho g$
- Para todas as bordas: $\tau_{xx} = \tau_{xy} = 0$
- Admite-se que $\tau_{xx} = \tau_{xy} = 0$ para todo o domínio

A expressão de equilíbrio

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x^b = 0 \text{ é identicamente satisfeita e}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + f_y^b = 0 \text{ leva a: } \tau_{yy} = \rho g y + f(x)$$

Em $y = a$, tem-se: $f_y^s = \rho g a = \rho g a + f(x)$. Portanto, $f(x) = 0$

Na parte inferior ($y = 0$), a condição de contorno é satisfeita, ou seja: $f_y^s(x, 0) = 0 = \tau_{yy}(x, 0)$

Podem-se obter as deformações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{xx} = \frac{\tau_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} \tau_{yy} = -\frac{\nu}{E} \tau_{yy} = -\frac{\nu}{E} \rho g y \\ \epsilon_{yy} = \frac{\tau_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} \tau_{xx} = \frac{\rho g y}{E} \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 0 \end{array} \right.$$

Para se obterem os deslocamentos, é necessário integrar as relações de compatibilidade:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \text{ que leva a } \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\nu}{E} \rho g y \Rightarrow u(x, y) = -\frac{\nu}{E} \rho g x y + f_1(y)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \text{ que leva a } \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\rho g y}{E} \Rightarrow v(x, y) = \frac{\rho g y^2}{2E} + f_2(x)$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 = -\nu k x + \frac{df_1}{dy} + \frac{df_2}{dx}, \text{ com } k = \frac{\rho g}{E} (*)$$

Para se obterem os deslocamentos, é necessário integrar as relações de compatibilidade:

Definindo-se: $g_1(x) = -vkx + \frac{df_2}{dx}$ e $g_2(y) = \frac{df_1}{dy}$

Pode-se escrever a partir da eq. (*): $g_1(x) + g_2(y) = 0$, que leva a $g_1 = C_2$ e $g_2 = -C_2$.

Então: $-vkx + \frac{df_2}{dx} = C_2$

Por integração: $f_2(x) = C_2x + \frac{vkx^2}{2} + C_3$. Ainda, $\frac{df_1}{dy} = -C_2 \Rightarrow f_1(y) = -C_2y + C_4$

Portanto:
$$\left\{ \begin{array}{l} u = -vkxy - C_2y + C_4 \\ v = \frac{ky^2}{2} + \frac{vkx^2}{2} + C_2x + C_3 \end{array} \right.$$

Impondo-se as condições cinemáticas no ponto P:

$$u(0, a) = -C_2 a + C_4 = 0$$

$$v(0, a) = \frac{ka^2}{2} + C_3 = 0$$

Considerando-se que não há movimento de rotação em relação a P:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0, a) = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}(0, a) = C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

Então:

$$C_4 = 0$$
$$C_3 = -\frac{ka^2}{2}$$

Retornando-se aos deslocamentos:

$$u = -vkxy$$

$$v = \frac{\rho g}{2E}(y^2 + vx^2 - a^2)$$

Referência Bibliográfica

BUCALEM, M. L.; BATHE, K.-J. The mechanics of solids and structures: hierarchical modeling and the finite element solution, p.187-196. Heidelberg: Springer, 2011.