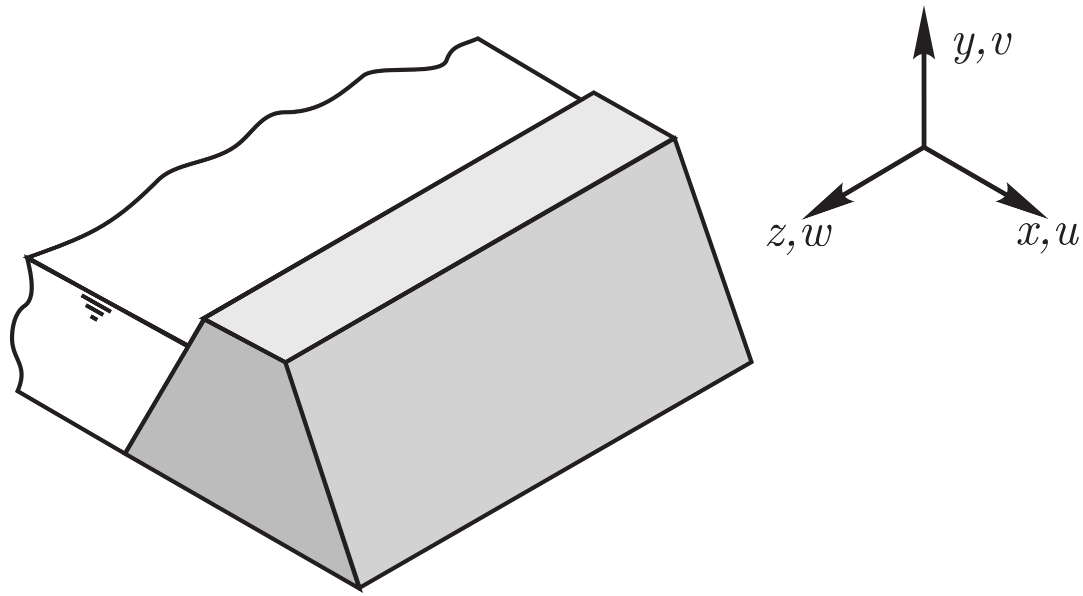
Elasticidade Plana: Estado Plano de Deformação (EPD)

Prof. Alfredo Gay Neto

Prof. Miguel Luiz Bucalem

Livro *The Mechanics of Solids and Structures-Hierarchical Modeling and the Finite Element Solution*, pág. 180

Motivação: Barragem submetida a um carregamento hidrostático



Supondo-se que os deslocamentos nas seções de extremidade sejam impedidos na direção *z*, *w*=0.

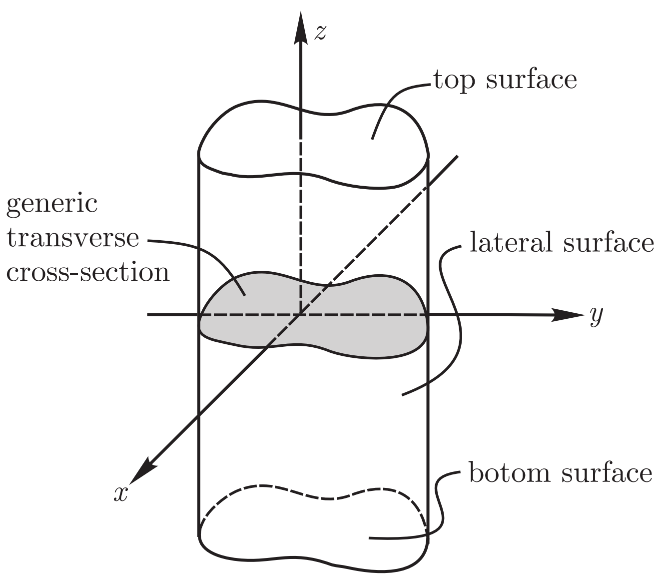
Considerando que, geometricamente, a barragem corresponde a um sólido prismático (seções idênticas para qualquer *z*) e que o carregamento também se repete para qualquer *z*, é intuitivo supor que <u>a solução do problema se repita para todo *z*</u>.

Formalmente, considera-se o método semi-inverso:

Hipótese para o campo de deslocamentos

Determina-se a classe de problemas que pode ser resolvida e é compatível com essas hipóteses

Para Estado Plano de Deformação, considera-se:



Hipóteses Cinemáticas:

$$u = u(x, y)$$
$$v = v(x, y)$$
$$w = 0$$

Relações de compatibilidade

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\gamma_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\gamma_{zx} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}(x, y)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}(x, y)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y)$$

$$\gamma_{yz} = 0$$

$$\gamma_{zx} = 0$$

$$\varepsilon_{zz} = 0$$

Relações constitutivas

$$\varepsilon_{zz} = 0 = \frac{\tau_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E}(\tau_{xx} + \tau_{yy}) \quad \Rightarrow \quad \tau_{zz} = \nu(\tau_{xx} + \tau_{yy})$$

Considerando as componentes de deformação no plano:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\tau_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E}(\tau_{yy} + \tau_{zz}) = \frac{(1-\nu^2)}{E}\tau_{xx} - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\tau_{yy}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\tau_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E}(\tau_{xx} + \tau_{zz}) = \frac{(1-\nu^2)}{E}\tau_{yy} - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\tau_{xx}$$

E a distorção: $$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$

Tem-se ainda: $$\tau_{xz} = 0$$ $$\tau_{yz} = 0$$ uma vez que $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$

Podemos definir as matrizes coluna das componentes de deformação e tensão no plano:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Pode-se definir: $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{D\tau}$

Onde: $$\boldsymbol{D} = \frac{(1+\nu)}{E} \begin{bmatrix} (1-\nu) & -\nu & 0 \\ -\nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Podemos ainda escrever: $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{C\varepsilon}$

Onde: $$C = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \dfrac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Nota-se que resulta:
$$\tau_{xx} = \tau_{xx}(x,y)$$
$$\tau_{yy} = \tau_{yy}(x,y)$$
$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(x,y)$$

Considerando o equilíbrio diferencial:

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x^b = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y^b = 0$$

Levando em consideração os resultados anteriores $\Rightarrow$

$$f_x^b = f_x^b\ (x,y)$$

$$f_y^b = f_y^b(x,y)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + f_z^b = 0 \Rightarrow f_z^b = 0$$

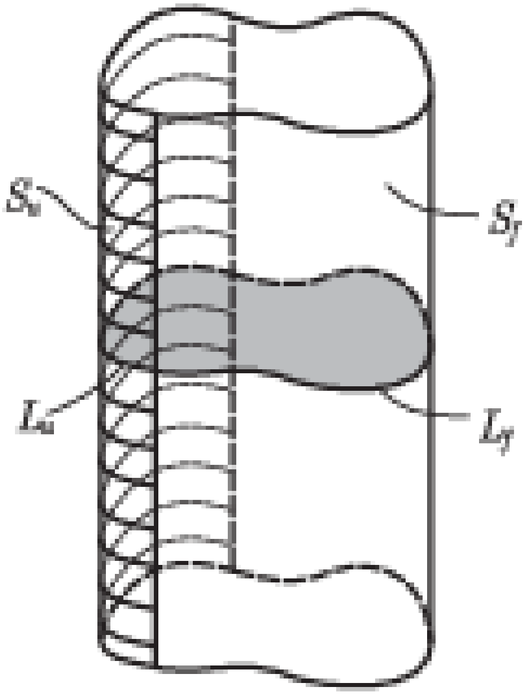
Restrições para os carregamentos externos de forma que as hipóteses relativas ao campo de deslocamento possam ser verificadas:

$$f_x^b = f_x^b\ (x,y)$$

$$f_y^b = f_y^b(x,y)$$

$$f_z^b = 0$$

Condições de contorno



Em S_u:

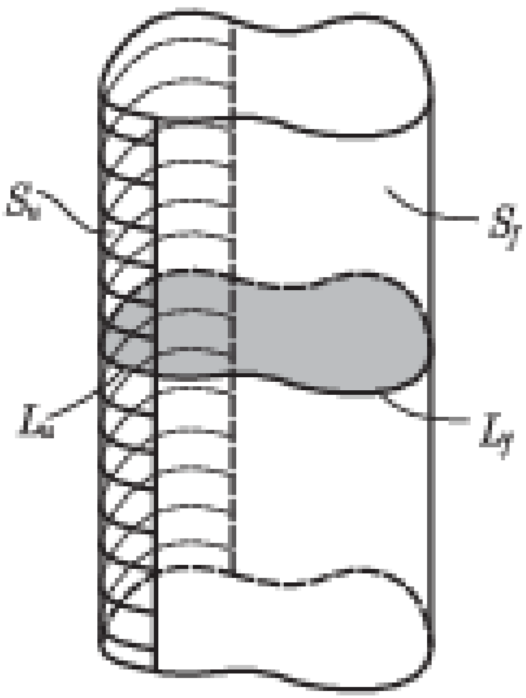
$$u(x,y,z) = \hat{u}(x,y)$$
$$v(x,y,z) = \hat{v}(x,y)$$

Em S_f:

$$\mathbf{Tn} = \boldsymbol{f}^s$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x^s \\ f_y^s \\ f_z^s \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} f_x^s &= \tau_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y \\ f_y^s &= \tau_{xy} n_x + \tau_{yy} n_y \\ f_z^s &= 0 \end{aligned}$$

Condições de contorno



Na superfície de topo:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e_z};\ \mathbf{Tn} = \boldsymbol{f^s}$$

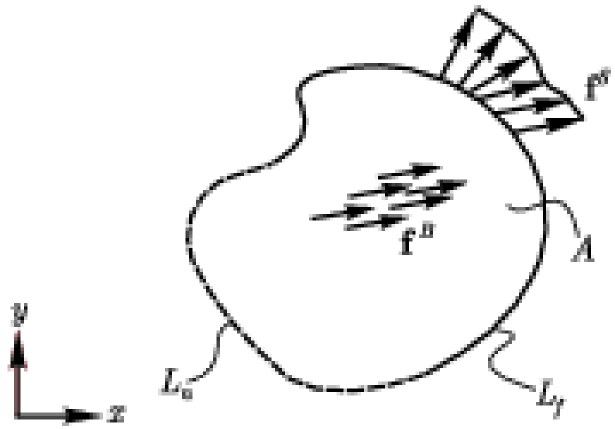
$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x^s \\ f_y^s \\ f_z^s \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} f_x^s &= 0 \\ f_y^s &= 0 \\ f_z^s &= \tau_{zz} = \nu(\tau_{xx} + \tau_{yy}) \end{aligned}$$

Analogamente, na superfície de fundo:

$$\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e_z};\ \mathbf{Tn} = \boldsymbol{f^s}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x^s \\ f_y^s \\ f_z^s \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} f_x^s &= 0 \\ f_y^s &= 0 \\ f_z^s &= \tau_{zz} = -\nu(\tau_{xx} + \tau_{yy}) \end{aligned}$$

Formulação diferencial do modelo do estado plano de deformação



Dados:

$f_x^b = f_x^b(x,y)$ e $f_y^b = f_y^b(x,y)$, definidos em A

Determinar:

u(x,y); *v*(x,y); $\tau_{xx}(\mathrm{x},\mathrm{y})$; $\tau_{yy}(\mathrm{x},\mathrm{y})$; $\tau_{xy}(\mathrm{x},\mathrm{y})$;
$\varepsilon_{xx}(\mathrm{x},\mathrm{y})$; $\varepsilon_{yy}(\mathrm{x},\mathrm{y})$; $\gamma_{xy}(\mathrm{x},\mathrm{y})$.

Tal que:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + f_x^b = 0 & \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x} & \\ & \varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial v}{\partial y} & \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{C\varepsilon} \\ \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + f_y^b = 0 & \gamma_{xy} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \end{array}\right\} \forall \boldsymbol{x} \in A$$

$$\left.\begin{array}{ll} f_x^s = \hat{f}_x^s(x,y) & f_y^s = \hat{f}_y^s(x,y) \end{array}\right\} \forall \boldsymbol{x} \in L_f$$

$$\left.\begin{array}{ll} u = \hat{u}(x,y) & v = \hat{v}(x,y) \end{array}\right\} \forall \boldsymbol{x} \in L_u$$

Quando a solução para este problema plano é determinada, a solução do problema 3D é obtida considerando-se, adicionalmente:

$$w = 0$$

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

$$\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

$$\tau_{zz} = \nu\left(\tau_{xx} + \tau_{yy}\right)$$

Referência Bibliográfica

BUCALEM, M. L.; BATHE, K.-J. **The mechanics of solids and structures: hierarchical modeling and the finite element solution**, p.180-187. Heidelberg: Springer, 2011.