10/10

Sistemas de Partículas

tb. caps 7,8 Kibble

(Cap. 4 do Symon) + Cap 9 Marion

$k = 1, \dots N$ vale $m_k \ddot{\vec{r}}_k = \frac{d\vec{p}_k}{dt} = \underbrace{\vec{F}^e_k}_{\text{resultante externa}} + \underbrace{\vec{F}^i_k}_{\text{res. interna}}$

MOMENTO

$\vec{P}_{total} = \sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k \rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_k \vec{F}^e_k + \cancel{\sum_k \vec{F}^i_k}^{\,0} \equiv \vec{F}$ ← resultante externa total

pares ação-reação!

ou: $\delta W^i = 0$ se o sistema se move por $\delta\vec{r}$ as forças int. ñ realizam trabalho $\rightarrow \sum_k \vec{F}^i_k \cdot \delta\vec{r} = 0 \rightarrow \boxed{\sum \vec{F}^i_k = 0}$

($\delta\vec{r}$: qualquer; $\sum_k$: aplicado em todas as part.)

em termos do CM: $M = \sum_k m_k$, $\vec{R}_{CM} = \sum_k \frac{m_k \vec{r}_k}{M}$ $\rightarrow \boxed{\vec{F} = \dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}}}$ 2ª lei "grupal"

$\cancel{M} \sum \frac{m_k \ddot{\vec{r}}_k}{\cancel{M}}$

(Marion)

→ mom. linear do sistema é como se toda a massa estivesse concentrada no CM

→ é constante se ñ há força externa

e.g. explosão no ar devido a forças internas conserva mom. imediatamente antes e imediatamente após explosão (única força ext. é grav.)

MOMENTO ANGULAR

$\vec{L}_Q = \vec{r} \times m\vec{v}$ — sempre em rel. a um ponto (Q)

$\vec{L}_{k,Q} = (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times m(\dot{\vec{r}}_k - \dot{\vec{r}}_Q)$ — se o pto não for a origem

torque $\vec{\tau}_{kQ} = (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times (\vec{F}^e_k + \vec{F}^i_k)$

$\frac{d\vec{L}_{k,Q}}{dt} = \underbrace{m(\dot{\vec{r}}_k - \dot{\vec{r}}_Q) \times (\dot{\vec{r}}_k - \dot{\vec{r}}_Q)}_{0} + m(\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times (\ddot{\vec{r}}_k - \ddot{\vec{r}}_Q) =$

$= (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times (\vec{F}^e_k + \vec{F}^i_k - m_k \ddot{\vec{r}}_Q)$

se Q for fixo (e.g. a origem) é $\emptyset$

somando em k: $\sum_k \frac{d\vec L_k}{dt} = \underbrace{\sum_k (\vec r_k - \vec r_Q)\times \vec F_k^e}_{\vec\tau^e} - \underbrace{\sum_k m_k(\vec r_k-\vec r_Q)\times \ddot{\vec r}_Q}_{} +$

torque das forças ext.

$= M(\vec R - \vec r_Q)\times\ddot{\vec r}_Q$

$=0$ se Q é o CM ou ref. estacionário

$+ \sum_k (\vec r_k - \vec r_Q)\times \vec F_k^i$

$\vec F_k^i = \sum_{j\neq k} \overbrace{f(|\vec r_j - \vec r_k|)}^{f(r_{jk})}(\vec r_j - \vec r_k)$

↳ forças de j sobre k → forma "forte" da 3ª lei, não apenas são iguais e opostas mas dirigidas ao longo da linha que os liga

∴ em geral $\boxed{\frac{d\vec L}{dt} = \vec\tau^e}$

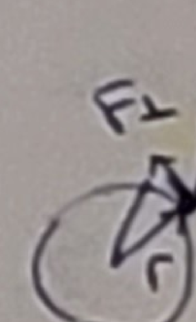
pois aí, na soma, tenho pares

$f(r_{jk})\left[(\vec r_k - \cancel{\vec r_Q})\times(\vec r_j - \vec r_k) + (\vec r_j - \cancel{\vec r_Q})\times(\vec r_k - \vec r_j)\right]$

$= f(r_{jk})(\vec r_k - \vec r_j)\times(\vec r_j - \vec r_k) = 0$

ou, como acima: δW^i p/ rodar o sistema por $\delta\theta$ deve ser zero,

∴ $\underbrace{\sum_k(\vec r_k-\vec r_Q)\times\vec F_k^i}_{\vec\tau^i \to =0}\cdot\delta\vec\theta = 0 \quad \forall$ qualquer

Lembre:  W ao longo de $r\delta\theta$ dado por $(\vec r\times\vec F)\cdot\delta\vec\theta$

↳ como $\vec\omega$

(ambos perp. à página)

ENERGIA

Se forças são conservativas tenho $V(\vec r_1, \dots \vec r_N)$ associada de forma que $F_{k_x} = -\frac{\partial V}{\partial x_k}, \dots \quad \vec F_k = \nabla_k V$

$m\frac{dv_{kx}}{dt}$

Somando: $\sum_k \frac{d}{dt}\left(m_k \frac{v_k^2}{2}\right) = \sum_k\left(-\frac{\partial V}{\partial x_k}\cdot\frac{dx_k}{dt}+\cdots\right) = -\frac{dV}{dt}$

$v_k^2 = v_{kx}^2+v_{ky}^2+v_{kz}^2$

$= \cancel{2} m_k \frac{v_{kx}}{\cancel{2}}\underbrace{\frac{dv_{kx}}{dt}}_{F_{k_x}}+\cdots$

$= \frac{d}{dt}\sum m_k\frac{v_k^2}{2} = \frac{dK}{dt}$

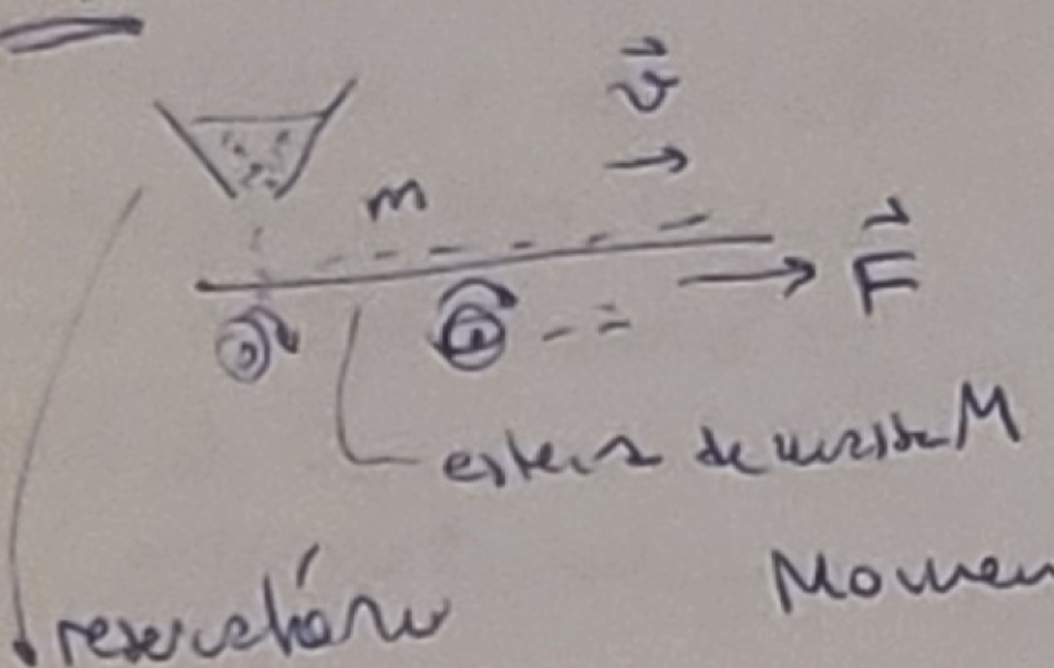
$\rightarrow \frac{d}{dt}(K+V)=0 \qquad E = \text{const.}$

e.g. se forças internas forem centrais $V(\vec r_1, \dots \vec r_N)$ será a soma dos Vs p/ os pares ij do sistema, e $\frac{d}{dt}(T+V) = \underbrace{\sum_k \vec F^e_k \cdot \vec v_k}_{\frac{dW^e}{dt}}$
↳ de $|\vec r_i - \vec r_j|$

devido ao trabalho das forças ext.

Symon 4-5

Ex: material se deposita em esteira em movimento



qual a força $\vec F$ necessária p/ manter a esteira em movimento uniforme c/ $\vec v$?

Momento total $= P = (m+M)v$
↳ muda c/ o tempo

$$F = \frac{dP}{dt} = \overset{\text{quero que seja a const.}}{v}\,\frac{dm}{dt} \rightarrow \boxed{F = v\, dm/dt}$$ ok, mas é "intuitivo"?

$$\text{potência} = Fv = v^2 \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(mv^2) = \frac{d}{dt}\left[\underbrace{(m+M)v^2}_{2K\,!!}\right]$$

$\frac{dW}{dt}$, $F.dx$

trabalho de F é igual à variação da en. cinética?

Trabalho externo é o dobro da variação da en. cinética!

O que acontece? e a gravidade? forças internas dissipativas (!?)

→ cons. de mom. é + geral, vale e ñ preciso me preocupar c/ forças dissipativas!

⇒ Foguete

$M\vec v$ ejeta material c/ velocid. $\vec u$ em relação ao foguete, e assim a massa diminui. O momento total varia de acordo c/ a força externa $\vec F$ sobre o foguete:

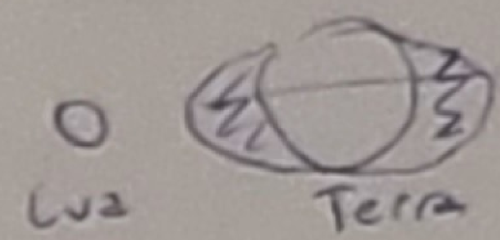
$$\vec F = \frac{d\vec P}{dt}$$ variação qdo expele dM: $\vec P = M\vec v + \underbrace{\delta m}_{\text{pqno}}(\vec u + \vec v)$, dado por $-dM$ → considero p/ variação principal de $\vec P$

$$= \frac{d}{dt}(M\vec v) - (\vec v + \vec u)\frac{dM}{dt}$$

a cada momento penso no "sistema" como o foguete e o combustível que será ejetado.

Se $\vec F = 0$: $M\frac{d\vec v}{dt} = \vec u\frac{dM}{dt} \rightarrow \boxed{\vec v - \vec v_0 = -\vec u \ln(M_0/M)}$ ou p/ $\vec u \parallel -\vec v$

⇒ **Lua e marés**: conservação do momento ang. total implica que quando a Lua se afasta (em consequência do fenômeno de marés) →



acúmulo de água + rotação da Terra causa torque sobre a Lua, que se afasta ⇒ a Terra passa a rodar + devagar!

$$L_{lua} = m r^2 \omega = \sqrt{G M m^2 r}$$ (*) demonstre!

r: raio da órbita da Lua; M: Massa da Terra

Portanto o afastamento da Lua está associado ao aumento de seu mom. ang. e à diminuição do mom. angular terrestre!

⇒ um torque interno causa "rearranjo" do mom. angular entre Lua e Terra com L_{total} const. (exceto pelos efeitos devido ao Sol)

⇒ **COLISÕES**: em geral en. (cinética) não é conservada, mas mom. linear e angular sim! (inclusive no caso relativístico)

se for, a colisão é *elástica*

ex: projétil m_1 com $\vec{v}_1$ colide com massa m_2 em repouso e "gruda". Qual o calor gerado?

$$\vec{v}_{final} = \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$ (cons. of momento) → é menor em módulo do que $\vec{v}_1$

$$Q = \frac{m_1 \vec{v}_i^{\,2}}{2} - \frac{(m_1+m_2)\vec{v}_f^{\,2}}{2} = \boxed{\frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)} \vec{v}_1^{\,2}}$$

ver abaixo

Note: se $m_2 \gg m_1$ Q é essencial a en. inicial de m_1, e $\vec{v}_{final}$ é praticamente nula

Em termos do CM:

como visto acima: $M\ddot{\vec{R}} = \sum \vec{F}^{ext}$, $M \equiv \sum m_k$, $\vec{R} \equiv \sum m_k \vec{r}_k / M$

p/ 2 part.: $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (coord. relativa), $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (massa reduzida)

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} = \vec{R} + \frac{\mu}{m_1}\vec{r}, \qquad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} = \vec{R} - \frac{\mu}{m_2}\vec{r}$$

$$\to \quad \vec{r}_1 - \vec{R} = \frac{\mu}{m_1}\vec{r} \equiv \vec{r}_1{}', \qquad \vec{r}_2 - \vec{R} = -\frac{\mu}{m_2}\vec{r} \equiv \vec{r}_2{}'$$

em rel. ao CM

check: $m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1^{\,i} + \vec{F}_1^{\,e}$

$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2^{\,i} + \vec{F}_2^{\,e}$, $\vec{F}_2^{\,i} = -\vec{F}_1^{\,i}$

→ somando: $m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_1^{\,e} + \vec{F}_2^{\,e}$ ✓

$\times m_2$, $\times m_1$, subtraindo → $m_1 m_2 \ddot{\vec{r}} = (m_1+m_2)\vec{F}_1^{\,i} + m_1 m_2 \left(\frac{\vec{F}_1^{\,e}}{m_1} - \frac{\vec{F}_2^{\,e}}{m_2}\right)$

Note: se $\frac{\vec{F}_1^{\,e}}{m_1} = \frac{\vec{F}_2^{\,e}}{m_2}$ (força ext. prop. à massa, e.g. força grav.) então $\boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_1^{\,i}}$ ⇒

(movim. visto por m_2): como se m_2 estivesse parada e $m_1 \to \mu$

De qq modo: $\vec V = \dot{\vec R} = \frac{m_1 \vec v_1 + m_2 \vec v_2}{m_1 + m_2}$; $\vec v = \dot{\vec r} = \vec v_1 - \vec v_2 \rightarrow \begin{cases} \vec v_1 = \vec V + \frac{\mu}{m_1}\vec v \\ \vec v_2 = \vec V - \frac{\mu}{m_2}\vec v \end{cases}$

Note:
⊛ verifique!

$$\left[\begin{aligned} K &= m_1\frac{\vec v_1^{\,2}}{2} + m_2\frac{\vec v_2^{\,2}}{2} = M\frac{\vec V^2}{2} + \mu\frac{\vec v^{\,2}}{2} \\ &= M\vec V^2/2 + m_1\frac{\vec v_1'^{\,2}}{2} + m_2\frac{\vec v_2'^{\,2}}{2} \end{aligned}\right.$$

energia cinética "desacopla"
= en. do CM + relativa ao CM

onde $\vec v'_{1,2} = \vec v_{1,2} - \vec V \rightarrow \begin{cases} \vec v_1' = \mu/m_1\, \vec v \\ \vec v_2' = -\mu/m_2\, \vec v \end{cases}$ (ver acima)

$$K = K_{CM} + K_{\text{em rel. ao CM}}$$

Da mesma forma: $\vec L = m_1(\vec r_1 \times \vec v_1) + m_2(\vec r_2 \times \vec v_2) = M(\vec R \times \vec V) + \mu(\vec r \times \vec v)$

⊛ verifique!
$$= \underbrace{M(\vec R \times \vec V)}_{\vec L_{CM}} + \underbrace{m_1(\vec r_1' \times \vec v_1') + m_2(\vec r_2' \times \vec v_2')}_{\vec L \text{ em rel. ao CM}}$$

→ p/ o momento linear vale simplesmente $\vec P = \vec p_1 + \vec p_2 = M\vec V$ pois o momento de cada uma em rel. ao CM é zero, por construção

$\therefore \vec P = \vec P_{CM} + \emptyset_{\vec P \text{ em rel. ao CM}}$...

NOTE: o que deduzimos acima p/ 2 partículas vale em geral, p/ N part.

$$\vec r_k' \equiv \vec r_k - \vec R \rightarrow \vec r_k = \vec r_k' + \vec R \Rightarrow \underbrace{\vec P_{tot} = M\vec V}_{\text{Momento total é como se toda massa estivesse no CM}}, \quad \underbrace{\sum_k m_k \vec v_k'}_{} = 0$$

momento em rel. ao CM é nulo
⊛ verifique!

$$K_{tot} = \underbrace{M\frac{\vec V^2}{2}}_{\text{en. cin. do CM}} + \underbrace{\sum_k m_k \frac{\vec v_k'^{\,2}}{2}}_{\text{en. cin. em relação ao CM}}$$

$\vec v_k'^{\,2} = v_k^2 + V^2 - 2\vec v_k \cdot \vec V$

⊛ verifique!

$$\vec L_{tot} = \underbrace{M(\vec R \times \vec V)}_{\vec L \text{ do CM}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} m_k(\vec r_k' \times \vec v_k')}_{\vec L \text{ em rel. ao CM}} = \sum_k m_k(\vec r_k \times \vec v_k)$$

$\vec r_k' + \vec R$ $\quad \vec v_k' + \vec V$

⊛ verifique!

No caso de en. pot. associada às forças internas, como visto acima, se V for função das distâncias $\vec r_i - \vec r_j$ basta substituir por $\vec r_i' - \vec r_j'$ (são iguais) ☺ ⇒ o sistema "desacopla" em movimento do CM e em relação a ele

2ª lei p/ as coord. relativas ao CM:

$$m_k \ddot{\vec r}_k' = \vec F_k^i + \vec F_k^e - m_k \ddot{\vec R} \longrightarrow M\ddot{\vec R} = \sum_k \vec F_k^e$$

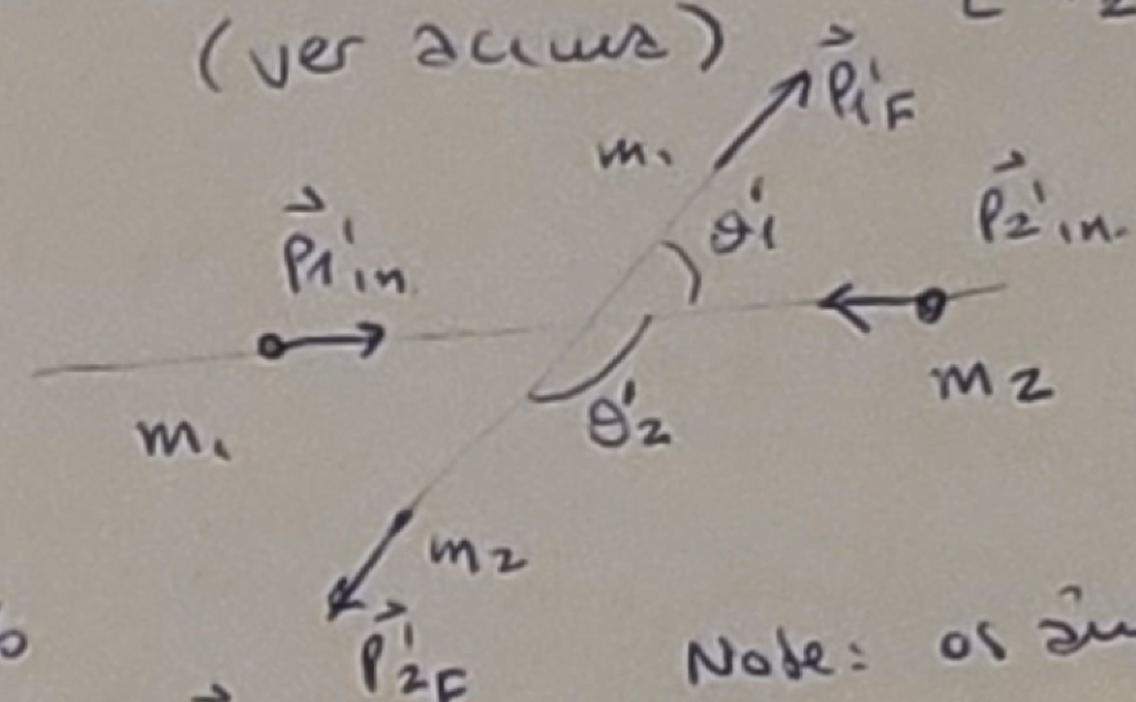
se as forças ext. forem + fracas que as int. (ou $= \emptyset$) considero apenas as coord. "internas"

Aplicações

1) Espalhamento Rutherford: em vez de pensar no alvo fixo, tomo como part. 2 inicialmente em repouso (no laboratório). Em termos das coord. relativas ao CM: $\begin{cases} \vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{R} \\ \vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_1' = \frac{\mu}{m_1}\vec{r} \\ \vec{r}_2' = -\frac{\mu}{m_2}\vec{r} \end{cases}$

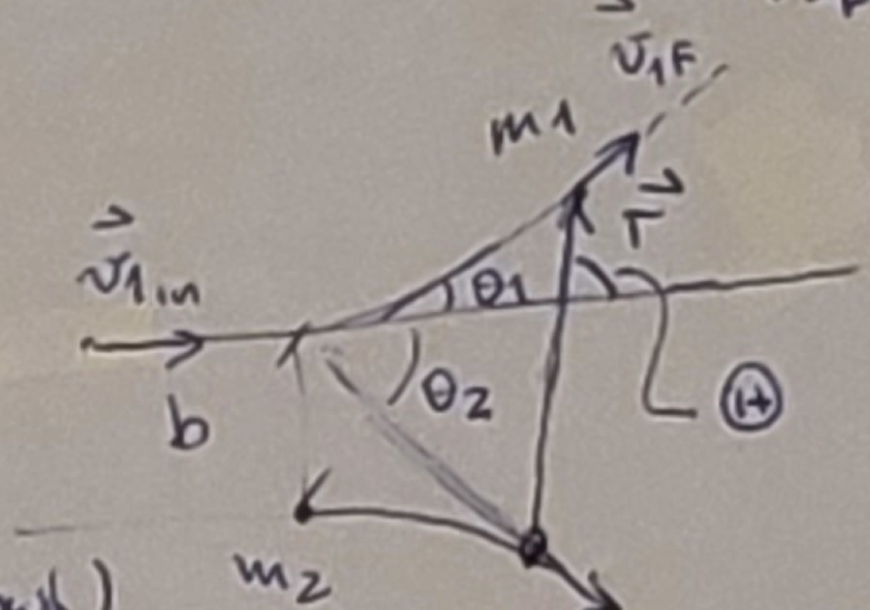
(ver acima)

No CM $\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0$:
(momentos relativos são sempre opostos)
e.g. antes e depois do espalhamento



Note: os ângulos (θ_1, θ_2), (θ_1', θ_2') não são os mesmos nos dois sistemas, MAS sabemos que θ_1' é o ang. de espalhamento Θ, pois $\vec{r}_1' \parallel \vec{r}$ (portanto $\vec{v}_1' \parallel \vec{r}$)

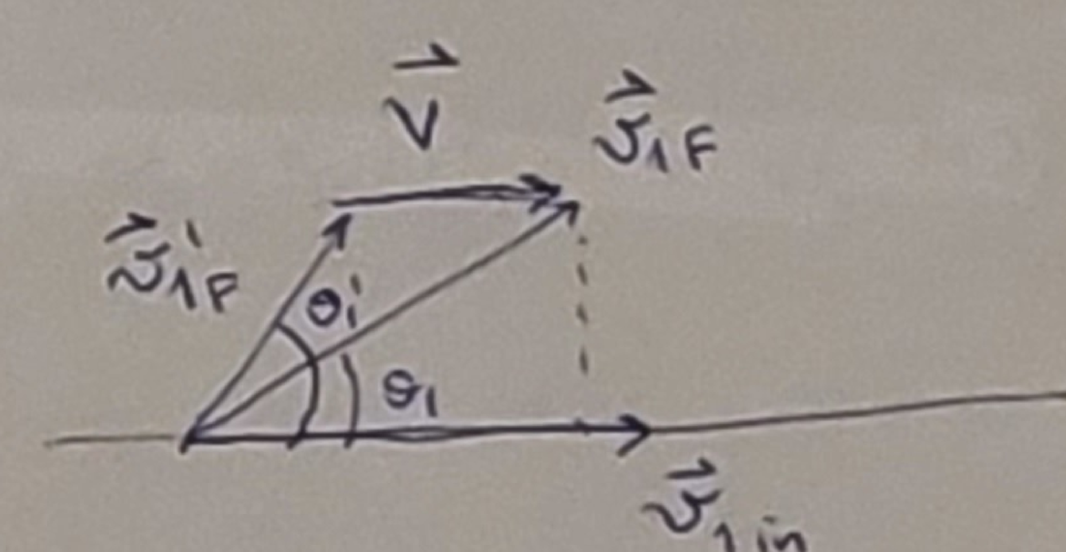
No lab:



Note que $\vec{V} = \frac{m_1 \vec{v}_{1in}}{m_1+m_2}$ do CM const. ($\vec{v}_{2in}=0$ e $\vec{P}_{CM}=$ const.)

ou seja, $\vec{V}$ é paralelo a $\vec{v}_{1in}$: $\vec{V} = \frac{\mu}{m_2}\vec{v}_{1in}$

temos:



$|\vec{v}_{1F}'|\cos\theta_1' + |\vec{V}| = |\vec{v}_{1F}|\cos\theta_1$

$|\vec{v}_{1F}'|\sin\theta_1' = |\vec{v}_{1F}|\sin\theta_1$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\overbrace{v_{1F}'}^{=\frac{\mu}{m_1}v_F}\sin\overbrace{\theta_1'}^{=\Theta}}{v_{1F}'\cos\theta_1' + \underbrace{V}_{=\frac{\mu}{m_2}v_{1in} = \frac{\mu}{m_2}v_{in}}}$$

pois $v_{2in} = 0$

$|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ inicial ou final

$$\rightarrow \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta + (m_1 v_{in}/m_2 v_F)} = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta + m_1/m_2}$$

p/ colisão elástica i.e. $v_{in} = v_F$

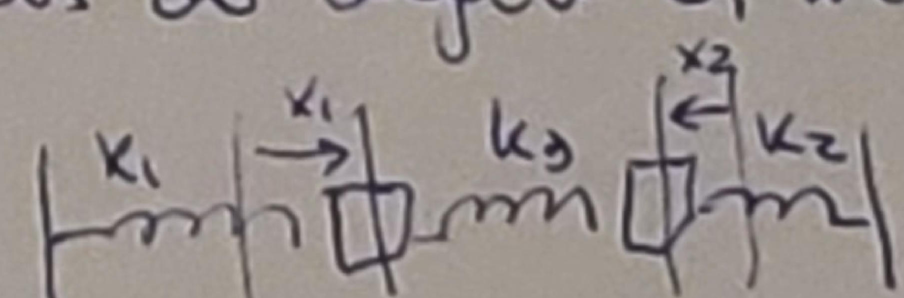
se $m_2 \gg m_1$ temos $\theta_1 = \Theta$ e voltamos ao caso de alvo fixo ✓

se $m_1 = m_2$, por ex. $\rightarrow$ $\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta + 1} = \frac{\cancel{2}\sin\Theta/2\,\cos\Theta/2}{\cancel{2}\cos^2\Theta/2} \rightarrow \theta_1 = \Theta/2$

Significa que a secção de choque $d\sigma$ deve ser reinterpretada em termos da velocid. relativa $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ e seu ângulo Θ c/ a direção inicial → reescrevendo a fórmula anterior em termos do ângulo θ_1 medido no lab.: $d\sigma = \frac{\pi |k|^2}{(m v_0^2)^2}\frac{\sin 2\theta_1 d\theta}{\sin^4\theta_1}$ (*)

(*) verifique!

2) Osciladores acoplados:



$m_1\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_3(x_1+x_2)$

$m_2\ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k_3(x_1+x_2)$

$\Rightarrow$ caso $m_1 = m_2$, $k_1 = k_2$

solução p/ $x_2(0)=0$, $x_1(0)=A$:

$x_1 = A/2(\cos\omega_+ t + \cos\omega_- t)$

$x_2 = A/2(\cos\omega_+ t - \cos\omega_- t)$

sendo $\omega_\pm^2 = k'/m \pm k_3/m$

ou: $m_1\ddot{x}_1 = -k_1' x_1 - k_3 x_2$ com $k_{1,2}' \equiv k_{1,2} + k_3$

$m_2\ddot{x}_2 = -k_2' x_2 - k_3 x_1$

Note: movim. simplifica nas coordenadas $x_\pm \equiv x_1 \pm x_2$ (oscilam independente/)