



PTC5611 - Controle Digital de Sistemas Dinâmicos  
Cap. 8: Projeto de Sistemas de Controle Digitais

---

Prof. Bruno Augusto Angélico

2021

Projeto a partir de...

Discretização da...

Projeto pelo Lugar...

Projeto pelo...

Projeto por...

Homepage

Página de Rosto



Página 1 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



# Capítulo 8 - Projeto de Sistemas de Controle Digitais

Sistemas de controle digitais serão projetados neste capítulo, utilizando diferentes abordagens.

Projeto a partir de...

Discretização da...

Projeto pelo Lugar...

Projeto pelo...

Projeto por...

Homepage

Página de Rosto



Página 2 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



# 1. Projeto a partir de Controladores Contínuos

O processo de amostragem e o segurador de ordem zero introduzem um atraso na resposta do sistema. Se tal atraso for considerável em relação às maiores constantes de tempo do sistema, a instabilidade pode ser comprometida. Como já visto, para o ZOH tem-se:

$$ZOH(s) = \frac{1 - e^{-sT_s}}{s} \quad (1)$$

O termo  $e^{-sT_s}$  pode ser escrito em uma forma racional utilizando-se uma aproximação de Padé de primeira ordem, tal que

$$e^{-sT_s} \approx \frac{1 - sT_s/2}{1 + sT_s/2} \quad (2)$$

Obviamente, aproximações de maiores ordens são melhores, mas resultam em termos mais complexos na função de transferên-

[Homepage](#)[Página de Rosto](#)

◀

▶

◀

▶

[Página 3 de 83](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



cia equivalente, o que dificulta o projeto do controlador. Assim,

$$ZOH(s) \approx \frac{1}{s} \left( 1 - \frac{2 - sT_s}{2 + sT_s} \right) = \frac{2}{s + 2/T_s} \quad (3)$$

Note, entretanto que com essa aproximação o ganho em baixas frequências não é unitário. Para considerar apenas o efeito do atraso (ou seja, fazer o ganho em baixas frequências unitário), pode-se fazer a seguinte aproximação (Bittar):

$$ZOH(s) \approx \frac{2/T_s}{s + 2/T_s} \quad (4)$$

Com isso, o controlador contínuo deve ser projetado conforme o diagrama da Figura 1.

Segundo (Franklin), o efeito do ZOH pode ser desprezado se a frequência de amostragem for maior do que 30 vezes a banda passante do sistema. Para frequências de amostragem baixas, o

Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 4 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

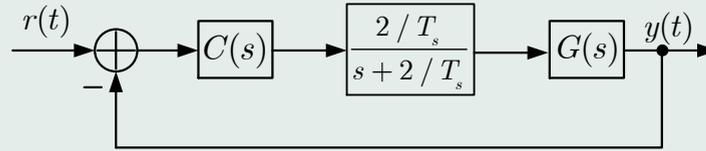


Figure 1: Sistema de controle em malha fechada com aproximação de primeira ordem para  $ZOH(s)$ .

efeito é considerável.

**Exemplo 1: Imposição algébrica de polos considerando efeito do ZOH:** Projete um controlador discreto para o seguinte sistema:

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 0,3)}$$

tal que a resposta ao degrau tenha máximo sobressinal  $M_p = 16,3\%$  e tempo de pico  $t_p = 1\text{s}$ .



Da especificação de máximo sobressinal:

$$M_p(\%) = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} 100\% \Rightarrow \xi = 0,5$$

Da especificação de tempo de pico:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 1 \Rightarrow \omega_d = \pi \text{ rad/s}$$

Assim,

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \omega_n = 3,628 \text{ rad/s}$$

A resposta transitória amortecida ao degrau de entrada apresentará oscilações com período  $T_d = 2\pi/\omega_d = 2\text{s}$ . Portanto, escolha o período de amostragem tal que  $T_s = 0,2\text{s}$ .

A função de transferência de um sistema de segunda ordem padrão é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Página 6 de 83](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



tal que os polos de malha fechada sejam dados por  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$ . De acordo com as especificações do problema,  $s_{1,2} = -1,81 \pm j\pi$ .

O projeto será inicialmente feito sem levar em conta os efeitos da amostragem e do ZOH. O controlador para este problema pode ser da forma

$$C_1(s) = K \frac{(s + z_c)}{(s + p_c)}$$

Assim, a função de transferência de malha aberta é dada por:

$$C_1(s)\mathcal{G}(s) = K \frac{(s + z_c)}{(s + p_c)} \frac{1}{s(s + 0,3)}$$

Há infinitos valores de  $K$ ,  $z_c$  e  $p_c$  que satisfazem as especificações de projeto. Uma particular consiste em cancelar o polo estável da planta ( $s = -0,3$ ) com o zero do controlador. Logo,

Projeto a partir de...

Discretização da...

Projeto pelo Lugar...

Projeto pelo...

Projeto por...

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 7 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



$$C_1(s)C(s) = K \frac{1}{s(s + p_c)}$$

Em malha fechada:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + p_c s + K}$$

Com isso, tem-se que  $K = \omega_n^2 = 13,162$  e  $p_c = 2\zeta\omega_n = 3,628$ . O seguinte controlador é obtido:

$$C_1(s) = 13,162 \frac{(s + 0,3)}{(s + 3,628)}$$

Trata-se de um avançador de fase, pois o zero está mais próximo da origem do que o polo. Ao utilizar o método mapeamento polo-zero para obter a versão discreta do controlador, chega-se em:

Projeto a partir de...

Discretização da...

Projeto pelo Lugar...

Projeto pelo...

Projeto por...

Homepage

Página de Rosto



Página 8 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



$$C_1(z) = 9,6429 \frac{(z - 0,9418)}{(z - 0,484)}$$

Será agora considerado o efeito aproximado do ZOH no projeto do controlador. O controlador a ser projetado possui a seguinte forma:

$$C_2(s) = K \frac{(s + z_c)}{(s + p_c)}$$

A função de transferência em malha aberta é dada por:

$$C_2(s) \text{ZOH}(s) G(s) = 10K \frac{(s + z_c)}{(s + p_c)(s + 10)s(s + 0,3)}$$

Assuindo novamente que o controlador cancela o polo estável da planta original, tem-se:

Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 9 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



$$C_2(s)ZOH(s)G(s) = 10K \frac{1}{(s + p_c)(s + 10)s}$$

Em malha fechada:

$$T(s) = 10K \frac{1}{s^3 + (10 + p_c)s^2 + 10p_c s + 10K}$$

O sistema é de terceira ordem. Vamos considerar que o denominador possui  $T(s)$  possui a seguinte forma:

$$T(s) = \frac{10K}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + p)} = \frac{10K}{s^3 + (2\zeta\omega_n + p)s^2 + (\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n p)s + p\omega_n^2}$$

O seguinte sistema deve ser resolvido:

$$\begin{cases} p_c - p = 2\zeta\omega_n - 10 \\ 10p_c - 2p\zeta\omega_n = \omega_n^2 \\ p\omega_n^2 - 10K = 0 \end{cases}$$

Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 10 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Assim,  $K = 15,88$ ;  $p_c = 5,69$  e  $p = 12,07$ . Para que os sistemas de segunda e terceira ordem tenham comportamentos semelhantes, o terceiro polo deve estar localizado pelo menos cinco constantes de tempo mais à esquerda dos polos dominantes, isto é  $-p \leq -5\zeta\omega_n$ . Neste exemplo,  $-p = -12,07 \leq -9,07$ , o que está de acordo.

Com isso,

$$C_2(s) = 15,88 \frac{(s + 0,3)}{(s + 5,69)}$$

Discretizando novamente pelo método casamento polo-zero, tem-se:

$$C_2(z) = 9,7698 \frac{(z - 0,9418)}{(z - 0,3205)}$$

As respostas do sistema compensado para o controle analógico e os controles digitais  $C_1(z)$  e  $C_2(z)$  são apresentados na Figura

[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 11 de 83](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



2. Note que quando a aproximação de primeira ordem do ZOH foi considerada, o projeto atendeu melhor às especificações.

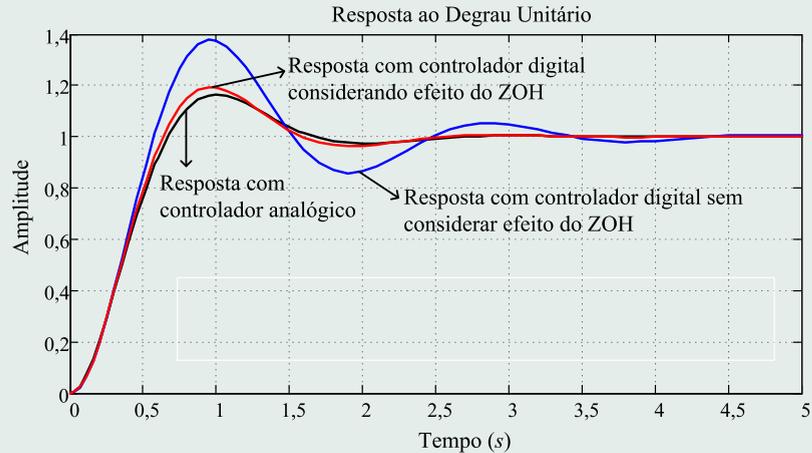


Figure 2: Respostas para o sistema compensado.

Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto

« «

» »

◀ ▶

Página 12 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



## 2. Discretização da Planta e Projeto no plano- $z$ - Introdução

Vamos tomar o exemplo anterior como motivação para esta seção. O equivalente discreto da planta do exemplo anterior com ZOH é dado por:

$$\mathcal{Z} \{ZOH(s)G(s)\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s(s + 0,3)} \right\}$$

O exemplo seguinte adota a alocação de polos do exemplo anterior, mas agora com as especificações no plano- $z$ .

**Exemplo 2: Exemplo de imposição algébrica de polos no plano- $z$ :** Utilizando o Matlab verifica-se que o equivalente discreto da planta com ZOH é dado por

$$G_D(z) = 0,0196 \frac{(z + 0,9802)}{(z - 1)(z - 0,9418)}$$

Projeto a partir de...

Discretização da...

Projeto pelo Lugar...

Projeto pelo...

Projeto por...

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 13 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



O controlador discreto possui a seguinte forma

$$C(z) = K \frac{(z + \alpha)}{(z + \beta)}$$

A função de transferência de malha aberta é dada por

$$C(z)G_D(z) = 0,0196K \frac{(z + \alpha)(z + 0,9802)}{(z + \beta)(z - 1)(z - 0,9418)}$$

Vamos considerar que o zero do controlador cancela o polo  $z = 0,9418$  da planta. Logo,

$$C(z)G_D(z) = 0,0196K \frac{(z + 0,9802)}{(z + \beta)(z - 1)}$$

Em malha fechada,

$$T(z) = \frac{0,0196K(z + 0,9802)}{z^2 + (\beta + 0,0196K - 1)z + (0,0192K - \beta)}$$

[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Página 14 de 83](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



As especificações no plano- $s$  são tais que:

$$s_0 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, \quad s_0^* = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

No plano- $z$ , com período de amostragem  $T_s$ , verifica-se que:

$$z_0 = e^{T_s(-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})}, \quad z_0^* = e^{T_s(-\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})}$$

Assim, tem-se o seguinte polinômio característico:

$$\begin{aligned}(z - z_0)(z - z_0^*) &= z^2 - (z_0 + z_0^*)z + z_0z_0^* \\ &= z^2 - \left[ 2e^{-T_s\omega_n\zeta} \cos\left(T_s\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) \right] z \\ &\quad + e^{-2T_s\omega_n\zeta}\end{aligned}$$

Ao substituir os valores de  $T_s$ ,  $\zeta$  e  $\omega_n$ , resulta em

$$(z - z_0)(z - z_0^*) = \underline{z^2 - 1,1257z + 0,4840}$$

[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Página 15 de 83](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



O seguinte sistema deve ser resolvido:

$$\begin{cases} \beta + 0,0196K = 1 - 1,1257 \\ -\beta + 0,0192K = 0,4840 \end{cases}$$

Os valores obtidos são:  $\beta = -0,3076$  e  $K = 9,2345$ , o que resulta na seguinte função de transferência discreta para o controlador:

$$C(z) = 9,2345 \frac{(z - 0,9418)}{(z - 0,3076)}$$

As respostas do sistema compensado com  $C(s)$ ,  $C_1(z)$  e  $C_2(z)$  do primeiro exemplo e  $C_3(z)$  obtido neste exemplo são apresentados na Figura 3. Note que a resposta de  $C_3(z)$  foi a que mais se aproximou da resposta de  $C(s)$ .

[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 16 de 83](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



Projeto a partir de...

Discretização da...

Projeto pelo Lugar...

Projeto pelo...

Projeto por...

Homepage

Página de Rosto



Página 17 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

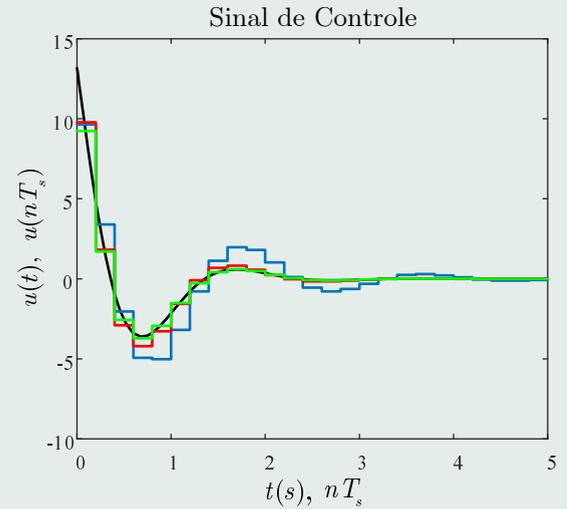
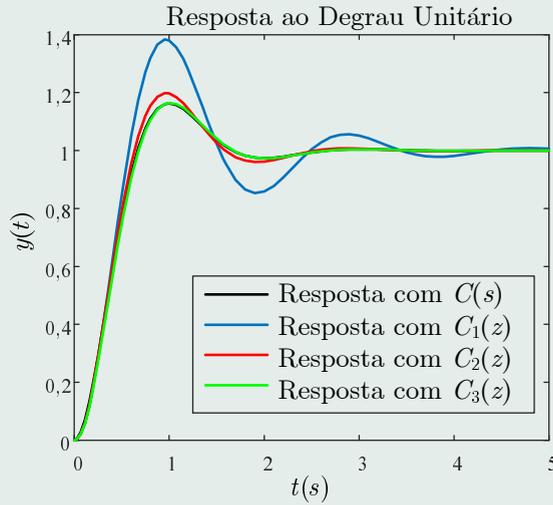


Figure 3: Respostas para o sistema compensado dos dois exemplos anteriores.



### 3. Projeto pelo Lugar das Raízes

✎ **Exemplo 3: Ajuste de ganho:** Para o sistema mostrado na Figura 4, obtenha o valor do ganho,  $K$ , que leva a um coeficiente de amortecimento  $\zeta = 0,7$ .

Solução: o lugar das raízes está apresentado na Figura 5 (a). Verifica-se, graficamente, que o ganho para que os polos de malha fechada tenham  $\zeta = 0,7$  é  $K = 0,063$ . A Figura 5 (b) ilustra graficamente o resultado.

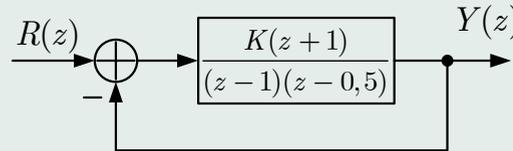


Figure 4: Sistema de controle do Exemplo 8.3.

Projeto a partir de...

Discretização da...

Projeto pelo Lugar...

Projeto pelo...

Projeto por...

Homepage

Página de Rosto



Página 18 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto



Página 19 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

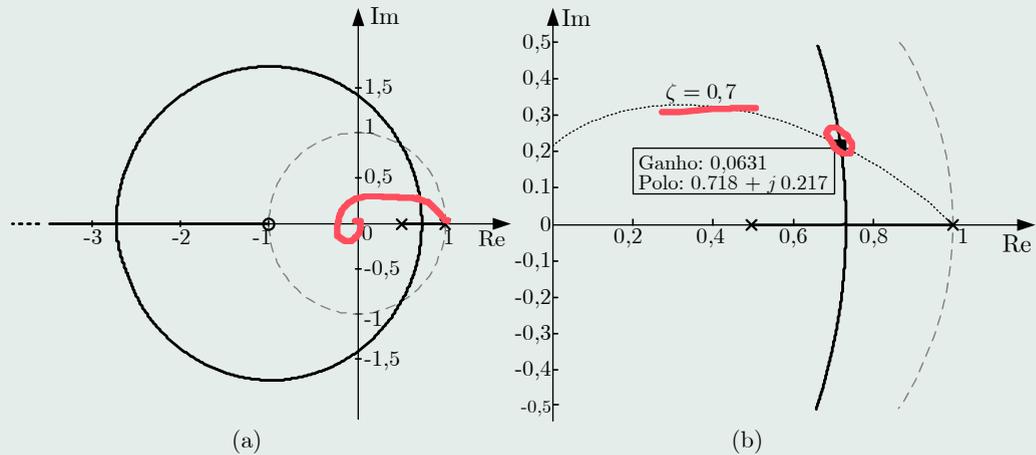


Figure 5: Exemplo 8.3: (a) lugar das raízes de  $G(z)$ ; (b) solução.



### 3.1. Compensador por Avanço de Fase

Um compensador por avanço de fase discreto pode ser dado

$$C(z) = K_c \frac{z - a}{z - b}, \quad -1 < \underline{b} < \underline{a} < 1$$


O compensador por avanço de fase é comumente utilizado para melhorar as características da resposta transitória, mas com a desvantagem de estar sujeito a ruídos de alta frequência.

Um procedimento (não único) de projeto de um compensador por avanço de fase para um sistema  $G(z)$  é o seguinte:

1. Escolhe-se a localização do polo de malha fechada do sistema,  $z_0$ , de acordo com a especificação de resposta transitória.
2. O polo e o zero do compensador devem ser escolhidos tal que a condição de fase do LR seja satisfeita em  $z = z_0$ . Há infinitas formas de resolver um problema. Uma escolha consiste em:

Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 20 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



- O zero do compensador é escolhido para cancelar um polo estável de  $G(z)$  sobre o eixo real.
- Escolhe-se a localização do polo do compensador, tal que a condição de ângulo do lugar das raízes em relação ao ponto  $z = z_0$  seja satisfeita.

3. Por fim, a condição de módulo é aplicada para se encontrar  $K_c$ , tal que:

$$K_c = \left| \frac{1}{C'(z)G_D(z)} \right|_{z=z_0}$$

onde  $C'(z) = \frac{z-a}{z-b}$ . No Matlab esse valor pode ser encontrado com o comando:

```
Kc = 1/abs(evalfr(C_*G_D,z0)); % onde C_ é C'
```

Perceba que, com este procedimento, as localizações das outras raízes da equação característica podem não ser satisfatórias. Assim algumas iterações dos passos 2 e 3 podem ser requeridas (tentativa e erro).

Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 21 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



🔗 **Exemplo 4:** Considere o sistema de controle da Figura 6, com

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

e  $T_s = 0,1$  s. Deseja-se projetar  $C(z)$  tal que os polos complexos dominantes de malha fechada possuam  $\zeta = 0,7$  e  $\omega_n = 5$ .

Solução: inicialmente o equivalente discreto  $G_D(z)$  é encontrado

$$\mathcal{Z} \{ZOH(s)G(s)\} = \frac{0,004837(z + 0,9672)}{(z - 1)(z - 0,9048)}$$

O lugar das raízes do sistema a ser compensado, juntamente com as linhas  $\zeta = 0,7$  e  $\omega_n = 5$ , e a localização desejada para os polos são apresentadas na Figura 7.

$$s_0 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = -3,5 \pm j3,57$$

$$z_0 = e^{s_0 T_s} = 0,660 + j0,246$$

O zero do compensador é fixado em  $a = 0,9048$ , o que cancela um polo estável do sistema. Pela condição angular, como visto na

Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 22 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Figura 8, o polo do compensador deve ser fixado em  $b = 0,41$ .

Aplicando a condição de módulo, tem-se que  $K_c = 18,506$ . A função de transferência do compensador é dada por

$$C_1(z) = 18,506 \frac{z - 0,9048}{z - 0,41}$$

A Figura 9 ilustra o lugar das raízes do sistema compensado, juntamente com a posição dos polos de malha fechada, situados em  $\{0,660 + j0,246; 0,660 - j0,246\}$ . Portanto, o projeto é válido. A resposta ao degrau unitário é mostrada na Figura 10.

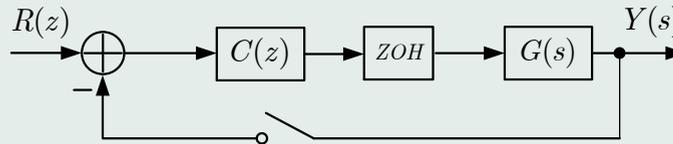


Figure 6: Sistema de controle do Exemplo 4.



Projeto a partir de...

Discretização da...

Projeto pelo Lugar...

Projeto pelo...

Projeto por...

Homepage

Página de Rosto



Página 24 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

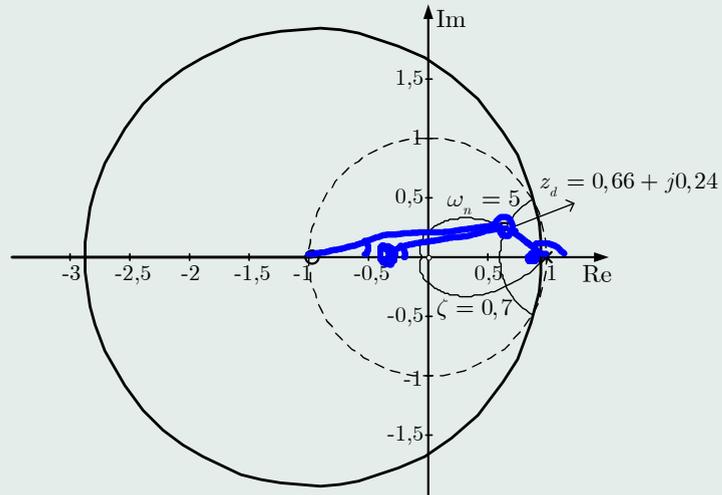


Figure 7: Lugar das raízes de  $G(z)$  do Exemplo 8.4.



Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto

Navigation arrows

Navigation arrows

Página 25 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

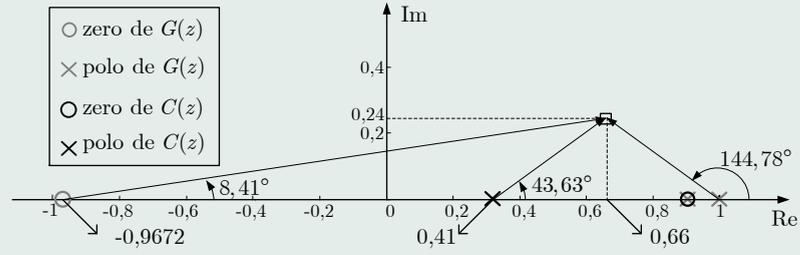


Figure 8: Polos e zeros do sistema compensado do Exemplo 8.4.

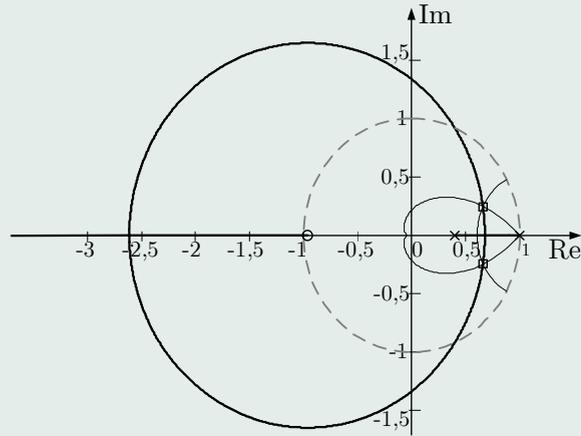


Figure 9: Lugar das raízes do sistema compensado do Exemplo 8.4.



Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto



Página 26 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

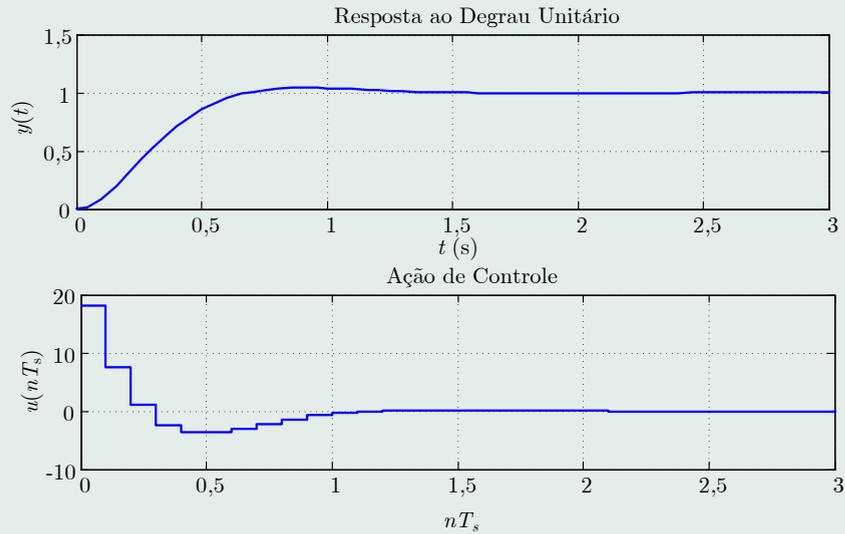


Figure 10: Resposta ao degrau unitário e sinal de controle do Exemplo 8.4.



### 3.2. Controlador PID

O PID digital básico com aproximação Tustin para a parcela integrativa e retangular para trás na parcela derivativa possui a seguinte função de transferência:

$$\begin{aligned}
 PID(z) &= K_P \left( 1 + \frac{T_s}{2T_I} \frac{(z+1)}{(z-1)} + \frac{T_D}{T_s} \frac{z-1}{z} \right) \\
 &= a + b \frac{(z+1)}{(z-1)} + c \frac{z-1}{z} \\
 &= \frac{az(z-1) + bz(z+1) + c(z-1)^2}{z(z-1)} \quad (5)
 \end{aligned}$$

com  $a = K_P$ ,  $b = K_P \frac{T_s}{2T_I}$  e  $c = K_P \frac{T_D}{T_s}$ . De forma equivalente, pode-se escrever a Equação (5) como

$$PID(z) = \frac{K(z-c_1)(z-c_2)}{z(z-1)} \quad (6)$$

Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 27 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Assim, pode-se aplicar o método do LGR para projetar o PID.

- Uma escolha razoável consiste em escolher um dos zeros do compensador para cancelar um polo estável da planta.
- O outro zero é encontrado pela aplicação da condição de fase do LGR.
- Por fim, aplica-se a condição de módulo do LGR para encontrar o ganho  $K$ .

Para implementação utilizando a equação de diferenças do controlador, pode-se aplicar diretamente a transformada- $z$  inversa em

$$\begin{aligned}PID(z) &= \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K(z - c_1)(z - c_2) z^{-2}}{z(z - 1) z^{-2}} \\ &= \frac{K(1 - c_1 z^{-1})(1 - c_2 z^{-1})}{1 - z^{-1}}\end{aligned}\quad (7)$$

Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 28 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Para encontrar os valores equivalentes de  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$ , pode-se fazer:

```
clear all; close all; clc
syms z Ts Kp Ti Td K c1 c2 a b c c1 c2
a = Kp; b = Kp*Ts/(2*Ti); c = Kp*Td/Ts;
num_PID = collect(a*z*(z-1) + b*z*(z+1) + c*(z-1)^2, z);
Cf_1 = coeffs(num_PID, z);
num_PID2 = collect(K*(z-c1)*(z-c2), z);
Cf_2 = coeffs(num_PID2, z);
X = solve(Cf_1(1)==Cf_2(1), Cf_1(2)==Cf_2(2), Cf_1(3)==Cf_2(3), Kp, Ti, Td);
K_P = X.Kp; % Valor de K_P
T_I = X.Ti; % Valor de T_I
T_D = X.Td; % Valor de T_D
disp('K_P = '); pretty(K_P);
disp('T_I = '); pretty(T_I);
disp('T_D = '); pretty(T_D);
```

Com isso, o seguinte resultado é obtido:

$$K_P = \frac{K}{2}(c_1 + c_2 - 3c_1c_2 + 1), \quad (8)$$

Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 29 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



$$T_I = \frac{T_s}{2} \frac{1 + c_1 + c_2 - 3c_1c_2}{1 + c_1c_2 - c_1 - c_2}, \quad (9)$$

$$T_D = 2T_s \frac{c_1c_2}{c_1 + c_2 - 3c_1c_2 + 1}. \quad (10)$$

✎ **Exemplo 5:** [Bittar] Projete um controlador digital para o processo  $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ , tal que:

- o erro estacionário seja nulo para entrada degrau;
- os polos de malha fechada dominantes tenham coeficiente de amortecimento  $\zeta = 0,5$  e frequência natural  $\omega_n = 2$  (rad/s).

Solução:  $M_p \approx 16,3\%$ ,  $t_s \approx 4s$ . Logo:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = -1 \pm \sqrt{3}j$$

As oscilações da resposta subamortecida possuem período igual a  $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = 3,63s$ . Assim, pode-se escolher o período de amostragem tal que  $T_s \approx T_d/10$ . Adota-se então  $T_s = 0,4s$ .

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 30 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Os polos dominantes no plano- $s$  são mapeados no plano- $z$  da seguinte forma:

$$z_{1,2} = e^{0,4(-1 \pm \sqrt{3}j)} = 0,5158 \pm 0,4281j$$

O equivalente discreto da planta é obtido como:

$$\mathcal{Z} \{ZOH(s)G(s)\} = \frac{0,054344(z + 0,6703)}{(z - 0,6703)(z - 0,4493)}$$

A condição de erro estacionário nulo para entrada degrau exige que o sistema tenha um polo na origem e, como a planta não possui integrador, isso deve ser imposto pelo controlador. Além disso, a resposta transitória precisa ter o comportamento especificado no enunciado. Tais requisitos podem ser satisfeitos por um controlador PID, ou seja,

$$C(z) = \frac{K(z - c_1)(z - c_2)}{z(z - 1)}$$

[Homepage](#)[Página de Rosto](#)

◀

▶

◀

▶

Página 31 de 83

[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



Vamos assumir que um dos zeros do controlador cancela o polo estável da planta em  $z = 0,6703$ . Assim,  $c_2 = 0,6703$ . A função de transferência em malha aberta é dada por

$$F(z) = C(z)G(z) = \frac{0,054344K(z - c_1)(z + 0,6703)}{z(z - 1)(z - 0,4493)}$$

Para obter  $c_1$ , aplica-se a condição de fase:

$$\angle F(z)|_{z=z_1} = \pm \text{múltiplo ímpar de } \pi$$

Portanto,

$$\angle(z_1 - c_1) = -\angle(z_1 + 0,6703) + \angle(z_1) + \angle(z_1 - 1) + \angle(z_1 - 0,4493) - \pi,$$

o que resulta em  $c_1 = 0,2640$ . Com isso,

$$C(z) = \frac{K(z - 0,2640)(z - 0,6703)}{z(z - 1)}$$

[Homepage](#)
[Página de Rosto](#)
[◀](#)
[▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Página 32 de 83](#)
[Voltar](#)
[Full Screen](#)
[Fechar](#)
[Desistir](#)



Para encontrar o ganho  $K$  deve-se aplicar a condição de módulo, ou seja:

$$|F(z)|_{z=z_1} = 1 \Rightarrow \left| \frac{0,054344K(z - 0,2640)(z + 0,6703)}{z(z - 1)(z - 0,4493)} \right|_{z=z_1} = 1,$$

o que resulta em  $K = 5,5153$ . Portanto:

$$C(z) = 5,5153 \frac{(z - 0,2640)(z - 0,6703)}{z(z - 1)}$$

O projeto pode ser feito utilizando o seguinte *script* em Matlab.

```
clear all; close all; clc;
zeta = 0.5; wn = 2;
s = tf('s'); z = tf('z'); Ts = 0.4;
G = 1/((s+1)*(s+2));
G_D = c2d(G,Ts,'zoh'); G_zer = zero(G_D); G_pol = pole(G_D);
s1 = -zeta*wn+j*wn*sqrt(1-zeta^2); z1 = exp(Ts*s1);
c2 = G_pol(1);
% Condição de Fase
P=-pi-angle(z1-G_zer)+angle(z1)+angle(z1-1)+angle(z1-G_pol(2));
c1 = -imag(z1)/tan(P)+real(z1);
```

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 33 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...



```
% Condição de Módulo
C_D_temp = ((z-c1)*(z-c2))/(z*(z-1)); C_D_temp.Ts = Ts;
K = 1/abs(evalfr((G_D*C_D_temp),z1));
C_D = K*C_D_temp;
F = minreal(C_D*G_D);
figure(1);rlocus(F/K);zgrid(zeta,Ts*wn); axis([-2 2 -2 2]); hold on;
G_MF = feedback(F,1); G_MF_pol = pole(G_MF);
plot(real(G_MF_pol), imag(G_MF_pol), 'sk')
%Obter os valores equivalentes de K_P, T_I e T_D
K_P = (K*(c1 + c2 - 3*c1*c2 + 1))/2;
T_I = -(Ts*(c1 + c2 - 3*c1*c2 + 1))/(2*(c1 + c2 - c1*c2 - 1));
T_D = (2*Ts*c1*c2)/(c1 + c2 - 3*c1*c2 + 1);
```

O lugar das raízes do sistema compensado é apresentado na Figura 11. A resposta ao degrau unitário e o sinal de controle são apresentados na Figura 12.

[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 34 de 83](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



Projeto a partir de...

Discretização da...

Projeto pelo Lugar...

Projeto pelo...

Projeto por...

Homepage

Página de Rosto



Página 35 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

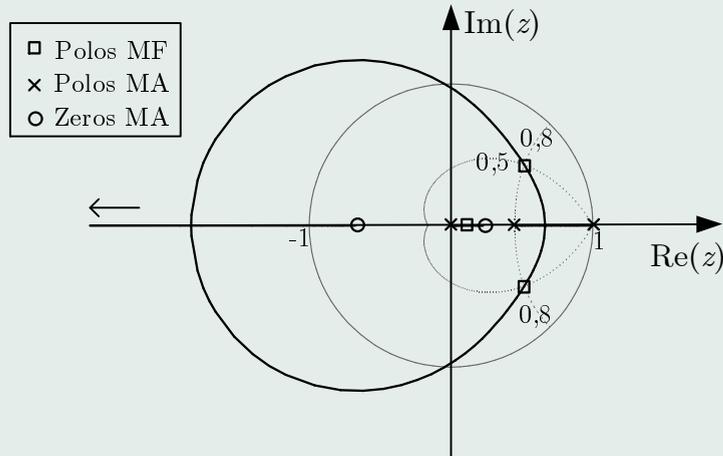


Figure 11: Lugar das raízes e polos de malha fechada do sistema compensado com controlador PID do Exemplo 5.



Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto



Página 36 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

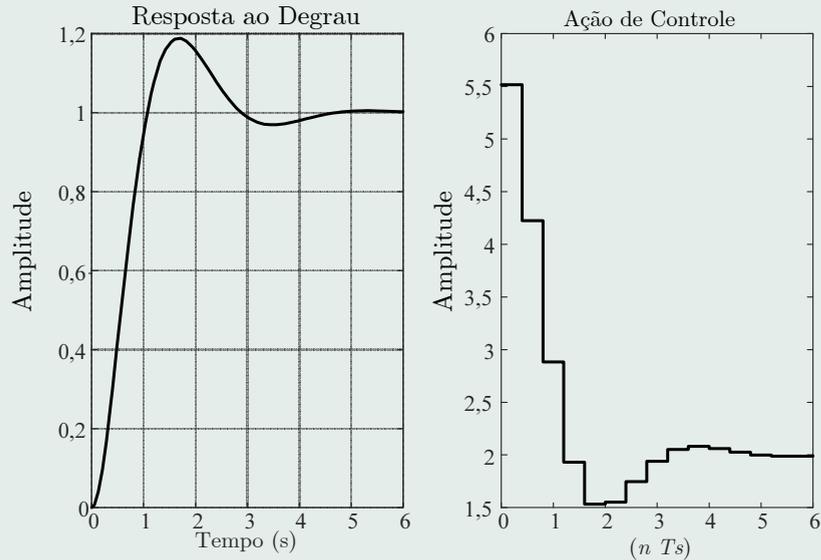


Figure 12: Resposta ao degrau e sinal de controle do sistema compensado em malha fechada com controlador PID do Exemplo 5.



## 4. Projeto pelo Método da Resposta em Frequência

O projeto de compensadores digitais pode também ser efetuado no domínio da frequência utilizando diagramas de Bode no plano- $w$ , através da seguinte transformação:

$$C(w) = C(z) \Big|_{z = \frac{1 + \frac{T_s}{2} w}{1 - \frac{T_s}{2} w}}$$

Para projetar uma dado  $C(w)$  pelo método da resposta em frequência, utilizam-se os mesmos procedimentos de projeto para o plano- $s$ . Em seguida, transforme  $G(w)$  em  $G(z)$  utilizando a seguinte relação

$$w = \frac{2z - 1}{T_s z + 1}$$

Deve-se ficar atento com a frequência de amostragem, que deve ser suficientemente alta para amenizar as distorções entre  $\omega$  e  $\nu$ .

Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto

◀◀

▶▶

◀

▶

Página 37 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



## 5. Projeto por Método Direto

Considere o sistema da Figura 13.

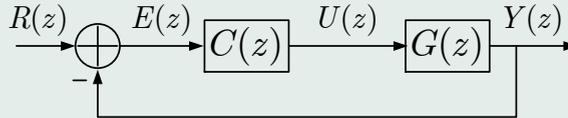


Figure 13: Controle Digital com realimentação unitária.

Em malha fechada:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = G_{MF}(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} \quad (11)$$

Ao resolver esta equação para  $C(z)$ , tem-se:

$$C(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{G_{MF}(z)}{1 - G_{MF}(z)} \quad (12)$$

Note que tal controlador inverte a planta. Obviamente isso não é possível para todos os casos. O projeto se resume em escolher adequadamente  $G_{MF}(z)$ .



A seguir serão apresentadas algumas restrições. O projeto com base nestas restrições é denominado método de Ragazzini [Franklin].

- **Causalidade**

$C(z)$  precisa ser causal, ou seja,  $C(z)$  não pode possuir polos no infinito.

De (12), se  $G(z)$  possuir zero no infinito, então  $C(z)$  terá um polo no infinito, a menos que  $G_{MF}(z)$  tenha um zero no infinito de  $G(z)$ . Portanto,

$$G_{MF}(z) \text{ deve possuir zero no infinito da mesma ordem que zeros de } G(z) \text{ no infinito.} \quad (13)$$

Uma consequência direta dessa condição é que o atraso em  $G_{MF}(z)$  precisa ser igual ou maior do que o atraso em  $G(z)$ .

Projeto a partir de...

Discretização da...

Projeto pelo Lugar...

Projeto pelo...

Projeto por...

Homepage

Página de Rosto



Página 39 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



## • Estabilidade

Os zeros de  $C(z)$  não podem cancelar polos instáveis de  $G(z)$ . Além disso, os polos de  $C(z)$  não devem cancelar eventuais zeros de fase não-mínima de  $G(z)$ .

A equação característica do sistema é dada por  $1 + C(z)G(z) = 0$ . Se  $C(z) = c(z)/d(z)$  e  $G(z) = b(z)/a(z)$ , então a equação característica fica como

$$a(z)d(z) + b(z)c(z) = 0 \quad (14)$$

Suponha que  $G(z)$  possua um termo  $(z - \gamma)$  como um polo, ou seja  $a(z) = (z - \gamma)\bar{a}(z)$ . Suponha que  $C(z)$  fosse escolhido para cancelar este termo, ou seja  $c(z) = (z - \gamma)\bar{c}(z)$ . Logo, a Equação (14) resultaria em:

$$\begin{aligned} (z - \gamma)\bar{a}(z)d(z) + b(z)(z - \gamma)\bar{c}(z) &= 0 \\ \Rightarrow (z - \gamma) [\bar{a}(z)d(z) + b(z)\bar{c}(z)] &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Página 40 de 83](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



Note que se esse fator estiver fora do círculo unitário e não se cancelar perfeitamente, então o sistema será instável. O cancelamento deste fator deve ser feito pelo termo  $1 + G_{MF}(z)$ .

Similarmente, pode-se verificar que o zero de fase não-mínima da planta deve ser cancelado por  $G_{MF}(z)$ , para que não seja cancelado por  $C(z)$ . Assim, as seguintes restrições devem ser respeitadas:

$$1 - G_{MF}(z) \text{ deve ter como fatores comuns no numerador todos os polos de } G(z) \text{ fora do círculo unitário.} \quad (16)$$

$$G_{MF}(z) \text{ deve ter como fatores comuns no numerador todos os zeros de fase não-mínima de } G(z) \quad (17)$$

Projeto a partir de...

Discretização da...

Projeto pelo Lugar...

Projeto pelo...

Projeto por...

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 41 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



## • Erro Estacionário

O sinal de erro é definido como

$$E(z) = R(z) - Y(z) = R(z) - G_{MF}(z)R(z) = R(z)[1 - G_{MF}(z)], \quad (18)$$

sendo  $R(z)$  o *setpoint* e  $Y(z)$  a saída da planta. O erro em regime estacionário é dado por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) R(z)[1 - G_{MF}(z)] \quad (19)$$

Se  $R(z)$  for um sinal degrau unitário,  $R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ , tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{(1 - z^{-1})} [1 - G_{MF}(z)] \quad (20)$$

Se o sistema for tipo 1 ou mais, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} e[n] = 0$  e, portanto

Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 42 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



$$G_{MF}(1) = 1 \quad (21)$$

Por outro lado, para  $R(z) = \frac{T_s z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ , ou seja, rampa unitária,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} e[n] &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) [1 - G_{MF}(z)] \frac{T_s z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} [1 - G_{MF}(z)] \frac{T_s}{z - 1} \end{aligned} \quad (22)$$

Para calcular o limite anterior é necessário aplicar a regra de L'Hopital, o que resulta em

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e[n] = -T_s \left. \frac{dG_{MF}(z)}{dz} \right|_{z=1} \quad (23)$$

Se o sistema for tipo 1,  $\lim_{n \rightarrow \infty} e[n] = \frac{1}{K_v}$ . Assim,

$$\left. \frac{dG_{MF}(z)}{dz} \right|_{z=1} = -\frac{1}{T_s K_v} \quad (24)$$

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 43 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Se o sistema for tipo 2 ou mais, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} e[n] = 0$ . Logo,

$$\left. \frac{dG_{MF}(z)}{dz} \right|_{z=1} = 0 \quad (25)$$

No projeto pelo método direto, se  $T_s$  for muito pequeno, o sinal de controle pode ser muito elevado e atingir a saturação. Se, por outro lado,  $T_s$  for muito grande o sistema pode se tornar instável. Na prática, deve-se escolher  $T_s$  pequeno suficientemente para não atingir a saturação [Bittar].

[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 44 de 83](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



🔗 **Exemplo 6:** Considere a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{1}{s(7s + 1)}$$

Projete um controlador digital pelo método direto, utilizando  $T_s = 0,5$  s, de tal forma que o equivalente contínuo do sistema em malha fechada seja de segunda ordem com polos em  $s = -0,7071 \pm j0,7071$ , e que a constante de erro estático de velocidade do sistema  $K_v = 1$ .

No plano- $z$  tem-se o mapeamento  $z = 0,6588 \pm j0,2431$ , com a seguinte equação característica:  $z^2 - 1,3175z + 0,4931 = 0$ . O equivalente discreto da planta é dado por:

$$G(z) = 0,01744 \frac{z + 0,9765}{(z - 1)(z - 0,9311)}$$

A forma geral de  $G_{MF}(z)$  é dada por

$$G_{MF}(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + \dots}{1 - 1,3175z^{-1} + 0,4931z^{-2}}$$

[Projeto a partir de...](#)[Discretização da...](#)[Projeto pelo Lugar...](#)[Projeto pelo...](#)[Projeto por...](#)[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 45 de 83](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



Como  $G(z)$  possui um zero no infinito, tem-se que

$$G_{MF}(z)|_{z=\infty} = 0 \Rightarrow b_0 = 0$$

Como  $G(z)$  não possui nem zero nem polo fora do círculo unitário, as restrições (16) e (17) não se aplicam, exceto pelo zero no infinito que já foi contemplado pela restrição de causalidade.

O requisito de constante de erro estático de posição nulo implica que

$$G_{MF}(1) = 1 = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}{1 - 1,3175 + 0,4931} \Rightarrow b_1 + b_2 + b_3 + \dots = 0,1756,$$

O requisito de constante de erro estático de velocidade implica que

$$\left. \frac{dG_{MF}(z)}{dz} \right|_{z=1} = -\frac{1}{T_s K_v} = -2$$

Com isso,

$$\frac{(-b_1 - 2b_2 - 3b_3 - \dots) \cdot \underbrace{(1 - 1,3175 + 0,4931)}_{=0,1756} - \underbrace{(b_1 + b_2 + b_3 + \dots)}_{=0,1756} \cdot (1,3175 - 2 \cdot 0,4931)}{0,1756^2} = -2,$$

[Homepage](#)
[Página de Rosto](#)

[Página 46 de 83](#)
[Voltar](#)
[Full Screen](#)
[Fechar](#)
[Desistir](#)



ou,

$$\frac{(b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots) + 0,3313}{0,1756} = 2 \Rightarrow (b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots) = 0,0199$$

Como há apenas duas equações, para o sistema ter solução, deve-se ter duas incógnitas. Fazendo-se  $b_3 = b_4 = b_5 = \dots = 0$ , tem-se

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 0,1756 \\ b_1 + 2b_2 = 0,0199 \end{cases} \Rightarrow b_1 = 0,3313; b_2 = -0,1557$$

Portanto,

$$G_{MF}(z) = \frac{0,3313z - 0,1557}{z^2 - 1,3175z + 0,4931},$$

e,

$$1 - G_{MF}(z) = \frac{z^2 - 1,649z + 0,6488}{z^2 - 1,317z + 0,4931} = \frac{(z - 1)(z - 0,6488)}{z^2 - 1,317z + 0,4931}$$

Projeto a partir de...

Discretização da...

Projeto pelo Lugar...

Projeto pelo...

Projeto por...

Homepage

Página de Rosto



Página 47 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Da Equação (12), tem-se

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{1}{G(z)} \frac{G_{MF}(z)}{1 - G_{MF}(z)} = \\ &= \frac{57,33(z-1)(z-0,9311)}{(z+0,9765)} \frac{0,3313(z-0,47)}{(z-1)(z-0,6488)} \\ &= 19 \frac{(z-0,9311)(z-0,47)}{(z+0,9765)(z-0,6488)} \end{aligned}$$

[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 48 de 83](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto



Página 49 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

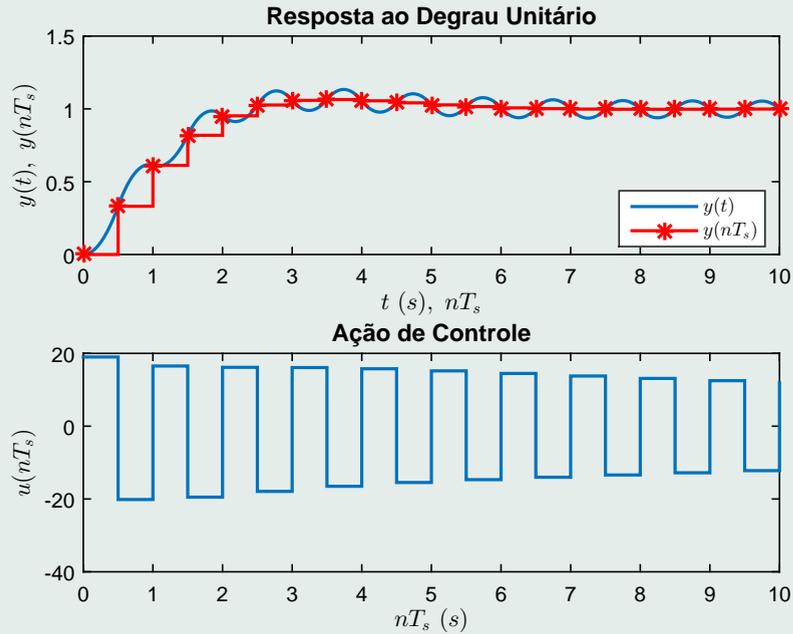


Figure 14: Resposta ao degrau e sinal de controle do sistema compensado do Exemplo 6.



Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto



Página 50 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

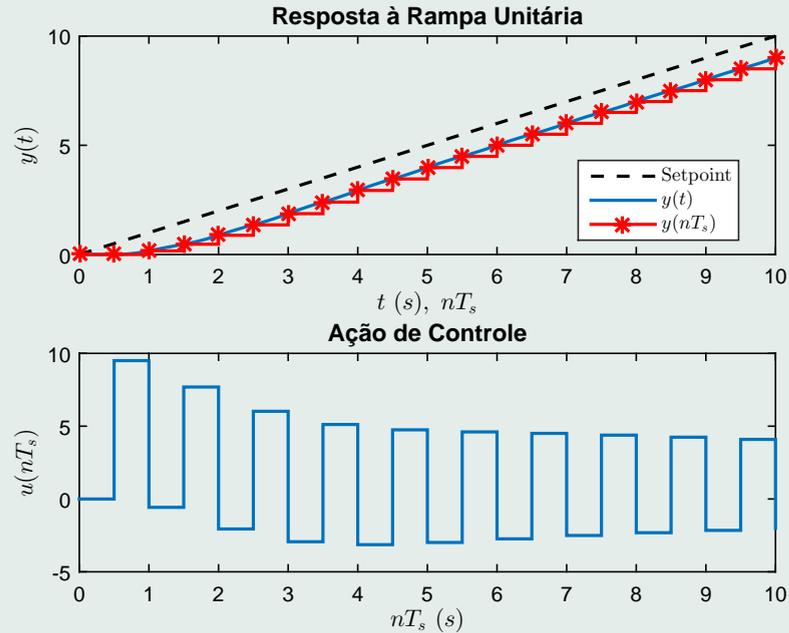


Figure 15: Resposta à rampa e sinal de controle do sistema compensado do Exemplo 6.



Para solucionar o problema das oscilações (*ripple*) indesejadas entre intervalos de amostragem, a partir da Figura 13, observe que

$$U(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} = \frac{G_{MF}(z)}{G(z)} R(z) \quad (26)$$

Definindo  $G(z) = N(z)/D(z)$ , tem-se que:

$$\frac{U(z)}{R(z)} = G_{MF}(z) \frac{D(z)}{N(z)} \quad (27)$$

Zeros de  $G(z)$  próximos à circ. unitária são responsáveis pelas oscilações. Para solucionar este problema basta acrescentar a seguinte restrição:

$G_{MF}(z)$  deve ter como fatores comuns no numerador todos os zeros de  $G(z)$  próximos à circunferência de raio unitário

$$(28)$$

Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 51 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



✎ **Exemplo 7:** Projetar um controlador para o exemplo anterior em que a saída não apresente oscilações entre instantes de amostragem.

A planta possui um zero indesejável em  $z = -0,9765$ . Assim, deve-se incluir um zero a mais em  $G_{MF}(z)$ , tal que

$$G_{MF}(-0,9765) = 0$$

Assim:

$$G_{MF}(-0,9765) = 0 = -1,0241b_1 + 1,0487b_2 - 1,0739b_3,$$

onde considerou-se  $b_0 = 0$ , da restrição de causalidade.

As demais restrições são obtidas diretamente do exemplo anterior, lembrando que agora há três termos no numerador de  $G_{MF}(z)$ , ou seja:

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0,1756$$

[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)[Página 52 de 83](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



$$b_1 + 2b_2 + 3b_3 = 0,0199$$

os valores de  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$  são obtidos como solução do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} -1,0241 & 1,0487 & -1,0739 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1756 \\ 0,0199 \end{bmatrix}$$

Assim,  $b_1 = 0,2115$ ,  $b_2 = 0,0839$  e  $b_3 = -0,1198$ . Com isso:

$$\begin{aligned} G_{MF}(z) &= \frac{0,2115z^{-1} + 0,0839z^{-2} - 0,1198z^{-3}}{1 - 1,3175z^{-1} + 0,4931z^{-2}} \\ &= \frac{0,2115z^2 + 0,0839z - 0,1198}{z^3 - 1,3175z^2 + 0,4931z} \end{aligned} \quad (29)$$

[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 53 de 83](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



O seguinte controlador é obtido:

$$C(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{G_{MF}(z)}{1 - G_{MF}(z)}$$

$$C(z) = 12,13 \frac{(z - 0,9311)(z - 0,58)}{(z - 0,7001)(z + 0,1711)}$$

A resposta ao degrau e a resposta à rampa do sistema são apresentadas nas Figuras 16 e 17, respectivamente.

[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 54 de 83](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto



Página 55 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

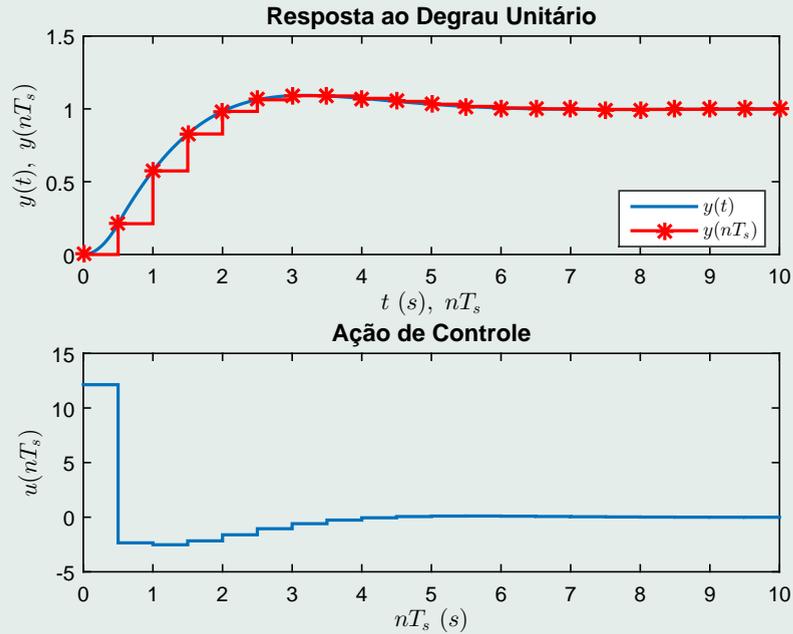


Figure 16: Resposta ao degrau e sinal de controle do sistema compensado do Exemplo 7.



Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto



Página 56 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

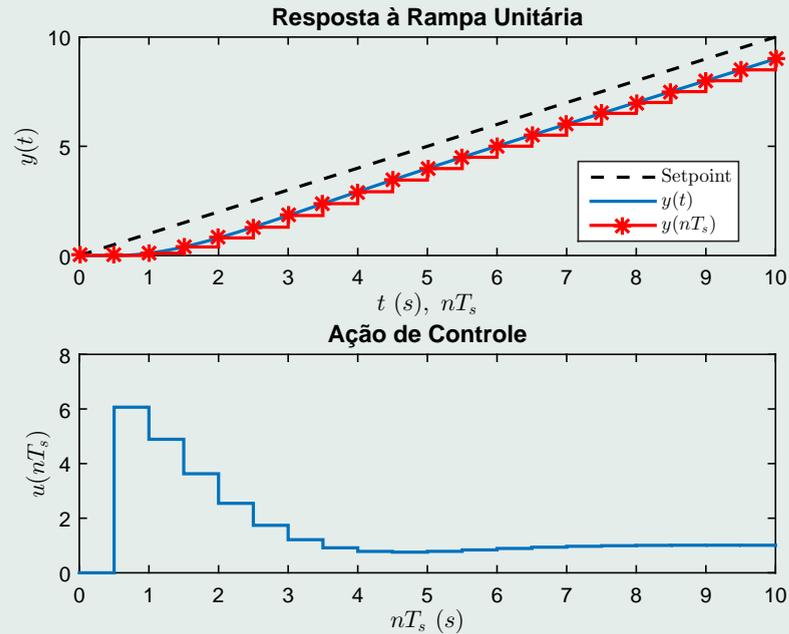


Figure 17: Resposta à rampa e sinal de controle do sistema compensado do Exemplo 7.



Uma escolha típica para  $G_{MF}(z)$  é dada por [Bittar]:

$$\begin{aligned} G_{MF}(z) &= \frac{g_0 z^p + g_1 z^{p-1} + g_2 z^{p-2} + \dots + g_{p-1} z + g_p}{z^p} \\ &= g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \dots + g_{p-1} z^{1-p} + g_p z^{-p} \end{aligned} \quad (30)$$

com  $p \geq n$ , sendo  $n$  a ordem da planta. O que é uma estrutura FIR, naturalmente estável. Além disso, a estrutura FIR garantem tempo de acomodação finito.

Quando o tempo de acomodação é mínimo, o erro estacionário é nulo e não há oscilação entre os instantes de amostragem, diz-se que a resposta é *dead beat* [Bittar].

Note que nesse caso, para respeitar a propriedade de causalidade, o menor atraso em  $G_{MF}(z)$  deve ser no mínimo igual ao menor atraso em  $G(z)$ . Se, por exemplo, a expansão de  $G(z)$

Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 57 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



começar em  $z^{-2}$ , então  $G_{MF}(z)$  deve ser da forma

$$G_{MF}(z) = g_2 z^{-2} + \dots + g_{p-1} z^{1-p} + g_p z^{-p} \quad (31)$$

Deve-se ainda testar se as demais restrições são satisfeitas.

✎ **Exemplo 8:** A função de transferência de um sistema a ser controlado com realimentação unitária é dada por

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s-0,7)}$$

Utilize uma estrutura FIR e projete um controlador para o sistema, assumindo  $T_s = 1$  e que o erro para entrada degrau seja nulo e o tempo de acomodação seja mínimo.

O equivalente discreto da planta é dado por:

$$G(z) = 0,48006 \frac{(z+0,907)}{(z-2,014)(z-0,3679)}$$

[Homepage](#)
[Página de Rosto](#)
[⏪](#)
[⏩](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Página 58 de 83](#)
[Voltar](#)
[Full Screen](#)
[Fechar](#)
[Desistir](#)



A forma geral de  $G_{MF}(z)$ , assumindo que a ordem de  $G_{MF}(z)$  é igual à ordem de  $G(z)$ , é dada por

$$G_{MF}(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

Pela restrição de causalidade,  $b_0 = 0$ , então:

$$G_{MF}(z) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

Note que  $G(z)$  possui polo instável em  $z = 2,014$ . Assim pela restrição de estabilidade:

$$\begin{aligned} 1 - G_{MF}(2,014) &= 1 - b_1(2,014)^{-1} - b_2(2,014)^{-2} = 0 \\ \Rightarrow 0,4966b_1 + 0,2466b_2 &= 1 \end{aligned}$$

Pela restrição de erro estático de posição nulo:

$$G_{MF}(1) = b_1 + b_2 = 1$$

Assim, ao resolver o sistema de duas equações e duas incógnitas, chega-se em  $b_1 = 3,0138$  e  $b_2 = -2,0138$ . Portanto:



$$G_{MF}(z) = 3,0138z^{-1} - 2,0138z^{-2}$$

O seguinte controlador é obtido:

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{1}{G(z)} \frac{G_{MF}(z)}{1 - G_{MF}(z)} \\ C(z) &= \frac{2,0831(z - 2,0138)(z - 0,3679)}{(z + 0,9070)} \frac{3,0138z - 2,0138}{z^2 - 3,0138z + 2,0138} \\ &= 6,2779 \frac{(z - 2,0138)(z - 0,3679)}{(z + 0,9070)} \frac{(z - 0,6682)}{(z - 1)(z - 2,0138)} \\ &= 6,2779 \frac{(z - 0,3679)(z - 0,6682)}{(z - 1)(z + 0,9070)} \end{aligned}$$

A resposta ao degrau do sistema é apresentada na Figura 18.

Projeto a partir de...

Discretização da...

Projeto pelo Lugar...

Projeto pelo...

Projeto por...

Homepage

Página de Rosto



Página 60 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto



Página 61 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

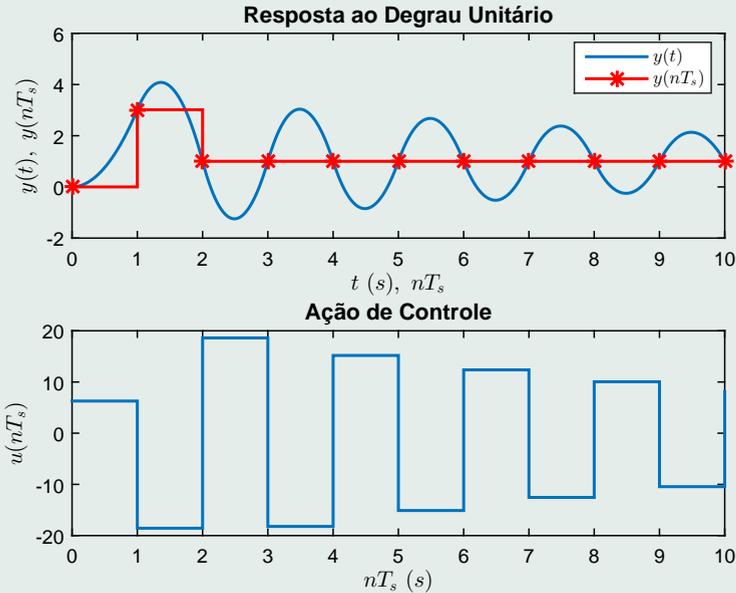


Figure 18: Resposta ao degrau do Exemplo 8 com  $T_s = 1$  s.

O projeto do Exemplo 8 foi refeito para  $T_s = 0,2$  s, chegando-se



ao seguinte controlador:

$$C(z) = 109,4201 \frac{(z - 0,8187)(z - 0,5349)}{(z - 1)(z + 0,9802)} \quad (32)$$

A resposta é apresentada na Figura 19. Note que a resposta contínua do sistema fica muito oscilatória e a ação de controle com valores extremamente elevados, o que pode levar o sistema à saturação, piorando ainda mais a resposta.

Note que no Exemplo 8 para  $T_s = 1$  s, o sistema possui um zero em  $-0,9070$  o que causa oscilações na ação de controle. O exemplo a seguir adiciona este zero em  $G_{MF}(s)$  para melhorar o aspecto oscilatório.

🔗 **Exemplo 9:** Repita o exemplo anterior, para  $T_s = 1$  s, de tal forma a reduzir as oscilações na ação de controle e, conseqüentemente, na resposta entre períodos de amostragem.

A planta possui um zero indesejável em  $z = -0,9070$ . Assim,

Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto

⏪

⏩

◀

▶

Página 62 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto



Página 63 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

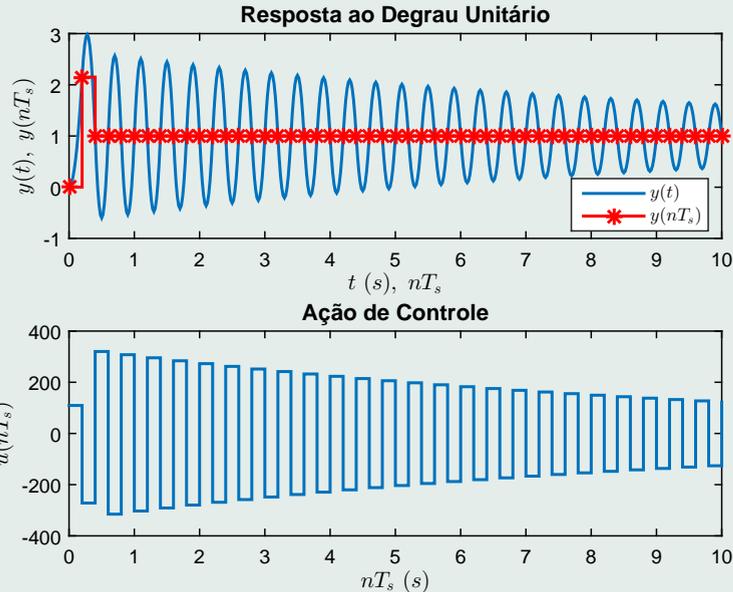


Figure 19: Resposta ao degrau do Exemplo 8 com  $T_s = 0,2$  s.



deve-se incluir um zero a mais em  $G_{MF}(z)$ , tal que  $G_{MF}(-0, 9070) = 0$ . Logo:

$$G_{MF}(-0, 9070) = 0 = -1, 1026b_1 + 1, 2157b_2 - 1, 3404b_3,$$

onde  $b_0 = 0$ , da restrição de causalidade. As demais restrições são obtidas diretamente do exemplo anterior, lembrando que agora há três termos no numerador de  $G_{MF}(z)$ , ou seja:

Estabilidade:

$$\begin{aligned} 1 - G_{MF}(2, 014) &= 1 - b_1(2, 014)^{-1} + b_2(2, 014)^{-2} + b_3(2, 014)^{-3} = 0 \\ \Rightarrow 0, 4966b_1 + 0, 2466b_2 + 0, 1225b_3 &= 1 \end{aligned}$$

Erro estacionário nulo para entrada degrau:  $b_1 + b_2 + b_3 = 1$ . Os valores de  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$  são obtidos como solução do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} -1, 1026 & 1, 2157 & -1, 3404 \\ 0, 4966 & 0, 2466 & 0, 1225 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 64 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Assim,  $b_1 = 2,2407$ ,  $b_2 = 0,3159$  e  $b_3 = -1,5567$ . Com isso:

$$G_{MF}(z) = 2,2407z^{-1} + 0,3159z^{-2} - 1,5567z^{-3}$$

O seguinte controlador é obtido:

$$C(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{G_{MF}(z)}{1 - G_{MF}(z)}$$

$$C(z) = 4,668 \frac{(z - 0,3679)(z - 0,7660)}{(z - 1)(z + 0,7730)}$$

A resposta ao degrau é apresentada na Figura 20.

O projeto do Exemplo 9 foi refeito para  $T_s = 0,2$  s, chegando-se ao seguinte controlador:

$$C(z) = 70,9002 \frac{(z - 0,8187)(z - 0,6376)}{(z - 1)(z + 0,757)} \quad (33)$$

A resposta é apresentada na Figura 21. Note que a ação de controle durante o período transitório assume valores extremamente elevados, o que pode levar o sistema à saturação.

Projeto a partir de...

Discretização da...

Projeto pelo Lugar...

Projeto pelo...

Projeto por...

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 65 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto



Página 66 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

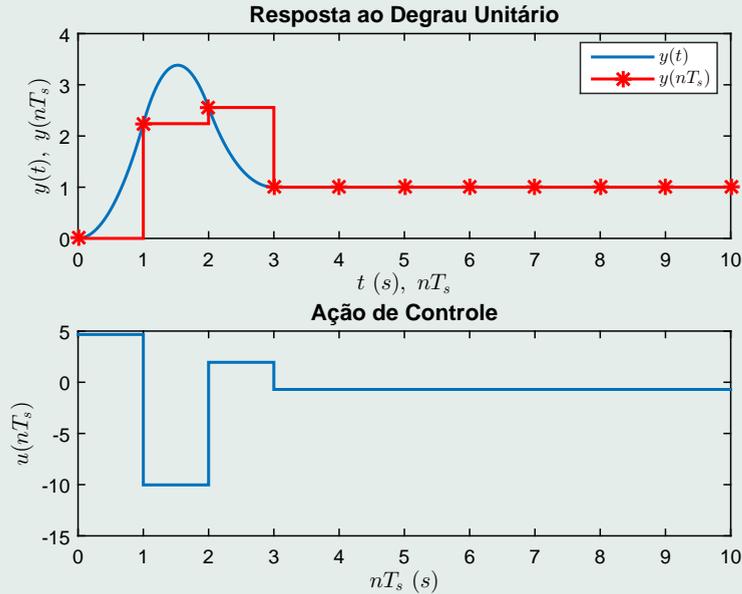


Figure 20: Resposta ao degrau do Exemplo 9.



Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto



Página 67 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

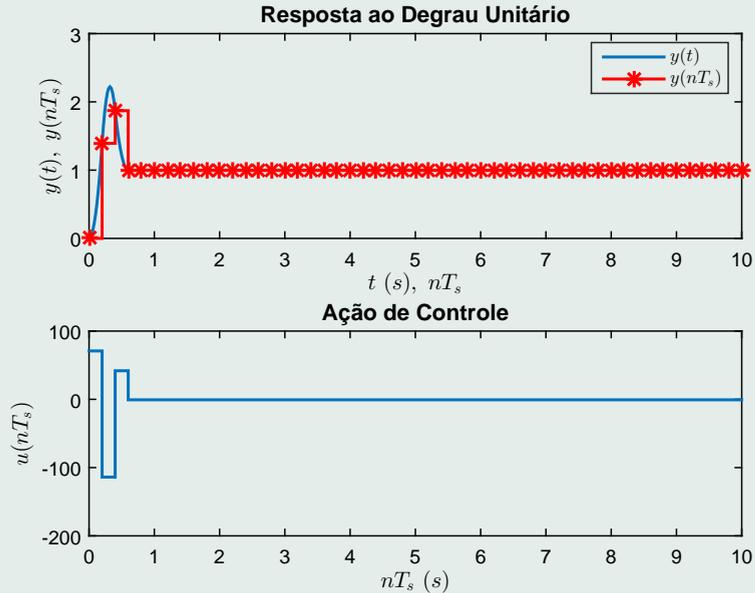


Figure 21: Resposta ao degrau do Exemplo 9 com  $T_s = 0,2$  s.



## 5.1. Controle *Dead beat* simples

Uma escolha particular para  $G_{MF}(z)$  é tal que uma entrada de grau é seguida pelo sistema com atraso de um ou mais períodos de amostragem [Visioli].

$$G_{MF}(z) = z^{-k}, \quad k \geq 1 \quad (34)$$

Logo,

$$C(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{z^{-k}}{1 - z^{-k}} = \frac{1}{G(z)} \frac{1}{z^k - 1} \quad (35)$$

O valor de  $k$  deve ser escolhido para garantir a causalidade de  $C(z)$ . Por exemplo, se a planta tiver  $m$  zeros no infinito,  $G_{MF}(z)$  deve possuir  $k \geq m$  zeros no infinito.

[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 68 de 83](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



✎ **Exemplo 10:** A função de transferência de um sistema a ser controlado com realimentação unitária é dada por

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+10)}$$

Projete controladores *Deadbeat* assumindo  $T_s = 0,1$  s,  $T_s = 0,2$  s,  $T_s = 0,5$  s e  $T_s = 1$  s.

O problema é resolvido com o seguinte código Matlab:

```
clear all; clc; close all;
s = tf('s'); z = tf('z');
G = 1/((s+1)*(s+10));
Ts = 0.1; %0.2 0.5 1
G_D = c2d(G,Ts,'zoh'); %Discretiza a planta (em G_D há 1 zero no inf)
C_D = (1/G_D)*(1/(z-1)); %Projeto COntrolador
C_D = minreal(C_D); %Simplifica a F.T. do controlador
```

Os seguintes resultados são obtidos:

Projeto a partir de...

Discretização da...

Projeto pelo Lugar...

Projeto pelo...

Projeto por...

Homepage

Página de Rosto



Página 69 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



$$C_D = 281,69 \frac{(z - 0,9048)(z - 0,3679)}{(z - 1)(z + 0,6945)}, \quad T_s = 0,1s$$

$$C_D = 94,934 \frac{(z - 0,8187)(z - 0,1353)}{(z - 1)(z + 0,488)}, \quad T_s = 0,2s$$

$$C_D = 30,597 \frac{(z - 0,6065)(z - 0,006738)}{(z - 1)(z + 0,1958)}, \quad T_s = 0,5s$$

$$C_D = 16,913 \frac{(z - 0,3679)(z - 4,54e - 05)}{(z - 1)(z + 0,06908)}, \quad T_s = 1s$$

[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 70 de 83](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto



Página 71 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

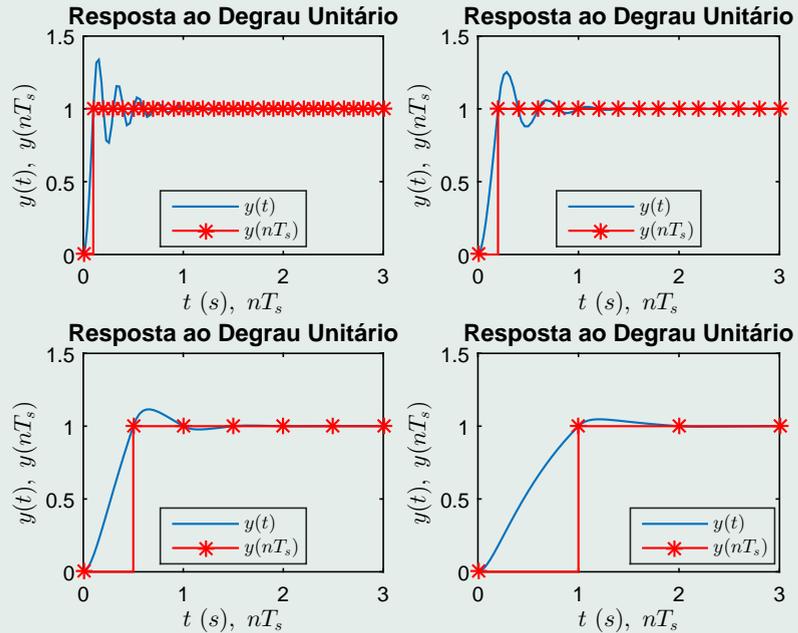


Figure 22: Resposta ao degrau do sistema compensado do Exemplo 8.10.



Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto



Página 72 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

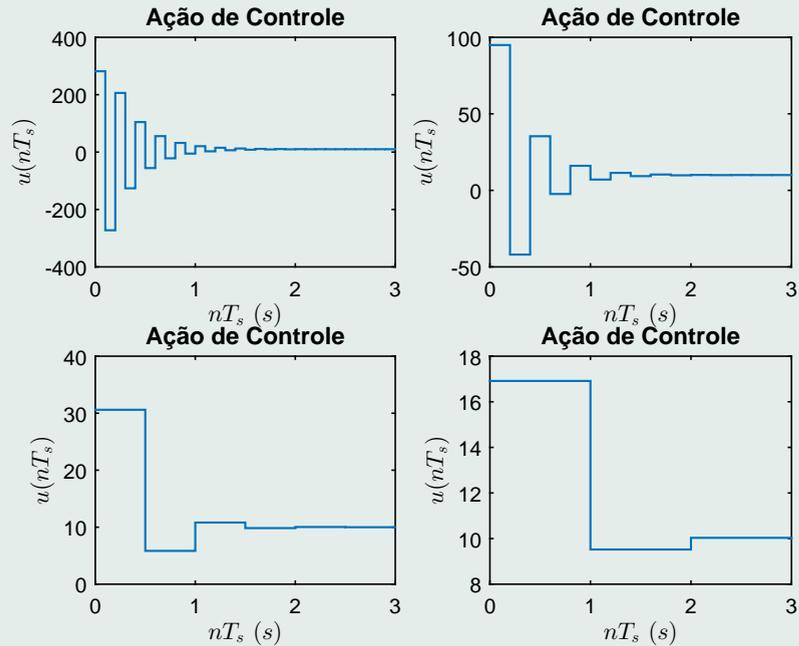


Figure 23: Sinal de controle dos casos do Exemplo 8.10.



## 5.2. Controle *Dahlin*

O controlador *Dahlin* considera que a função de transferência em malha fechada seja um sistema de primeira ordem com atraso de transporte, ou seja,

$$G_{MF}(s) = \frac{e^{-as}}{qs + 1}, \quad (36)$$

No plano- $z$ , com  $a = kT_s$ , tem-se:

$$G_{MF}(z) = \frac{z^{-k-1} (1 - e^{-T_s/q})}{(1 - e^{-T_s/q} z^{-1})} = \frac{1 - e^{-T_s/q}}{z^{k+1} - z^k e^{-T_s/q}} \quad (37)$$

O termo  $k$  deve ser escolhido para garantir causalidade. A função de transferência do controlador é, portanto, obtida como

Projeto a partir de...

Discretização da...

Projeto pelo Lugar...

Projeto pelo...

Projeto por...

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 73 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{1}{G(z)} \frac{G_{MF}(z)}{1 - G_{MF}(z)} \\ &= \frac{1}{G(z)} \frac{z^{-k-1} (1 - e^{-T_s/q})}{1 - e^{-T_s/q} z^{-1} - (1 - e^{-T_s/q}) z^{-k-1}} \\ &= \frac{1}{G(z)} \frac{1 - e^{-T_s/q}}{z^{k+1} - e^{-T_s/q} z^k - (1 - e^{-T_s/q})} \end{aligned} \quad (38)$$

✎ **Exemplo 11:** Refaça o Exemplo 10 com um controlador tipo *Dahlin* e  $T_s = 0,5$  s e  $q = 1$ . O equivalente discreto de  $G(s)$  com ZOH na entrada é dado por

$$G(z) = 0,032683 \frac{(z + 0,1958)}{(z - 0,6065)(z - 0,006738)}$$

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 74 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Como há um zero no infinito, qualquer  $k \geq 0$  já satisfaz a restrição de causalidade. Para  $k = 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} C(z) &= 30,5969 \frac{(z-0,6065)(z-0,006738)}{(z+0,1958)} \frac{(1-e^{-0,5})}{z-e^{-0,5}-(1-e^{-0,5})} \\ &= 30,5969 \frac{(z-0,6065)(z-0,006738)}{(z+0,1958)} \frac{0,3935}{z-1} \\ &= 12,0390 \frac{(z-0,6065)(z-0,006738)}{(z+0,1958)(z-1)} \end{aligned}$$

[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 75 de 83](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto



Página 76 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

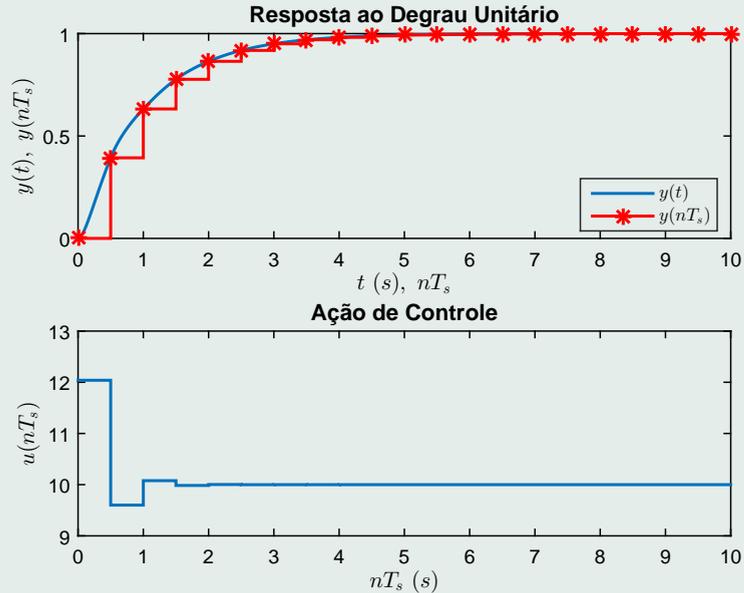


Figure 24: Sinal de controle dos casos do Exemplo 8.11.



## Exemplo 12:

Considere o seguinte sistema

$$G(s) = \frac{1}{(s + 0,3)(s + 0,7)}$$

Projete um controlador *Dahlin* com  $T_s = 0,2$  e  $q = 0,5$ . O equivalente discreto da planta é dado por:

$$G(z) = \frac{0,018718(z + 0,9355)}{(z - 0,9418)(z - 0,8694)}$$

Há novamente um zero no infinito. Para  $k = 0$ , segue que

$$G_{MF}(z) = \frac{0,3297}{z - 0,6703}$$

Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto



Página 77 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Logo,

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{1}{G(z)} \frac{G_{MF}(z)}{1 - G_{MF}(z)} \\ &= \frac{17,613(z - 0,9418)(z - 0,8694)}{(z - 1)(z + 0,9355)} \end{aligned}$$

A resposta ao degrau do sistema compensado é apresentada na Figura 25. Note que há oscilações entre períodos de amostragem e que o sinal de controle apresenta grandes oscilações devido ao zero de  $G(z)$  em  $z = -0,9355$ .

Como  $G(z)$  possui um zero no infinito, não podemos acrescentar um zero finito em  $G_{MF}(z)$ , pois isso violaria a restrição de causalidade. Vamos então efetuar a seguinte modificação:

$$G_{MF}(z) = G_{MF}(z) = \frac{0,3297K(z + 0,9355)}{z(z - 0,6703)}$$

ou seja, acrescentar um zero em  $(z + 0,9355)$  e um polo em

Homepage

Página de Rosto

◀

▶

◀

▶

Página 78 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



$z = 0$ . O valor de  $K$  é facilmente encontrado pela restrição de erro estacionário nulo:

$$G_{MF}(1) = \frac{0,3297K(1 + 0,9355)}{(1 - 0,6703)} = 1 \Rightarrow K = 0,2016$$

Efetuando o projeto novamente, chega-se em:

$$C(z) = \frac{9,1(z - 0,9418)(z - 0,8694)}{(z - 1)(z + 0,1593)}$$

A resposta ao é apresentada na Figura 26. As oscilações foram extintas e a ação de controle está bem comportada.

Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto



Página 79 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir



Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto



Página 80 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

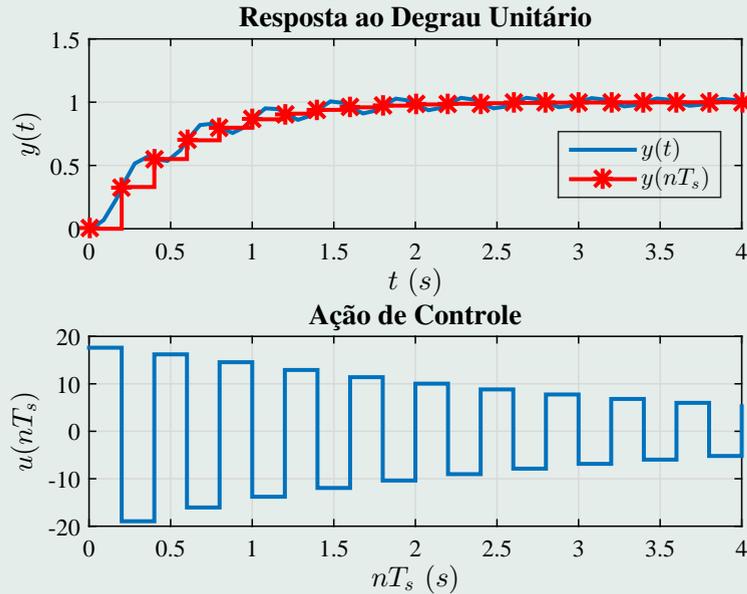


Figure 25: Resposta ao degrau do Exemplo .12 sem considerar compensação das oscilações entre períodos de amostragem.



Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto



Página 81 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

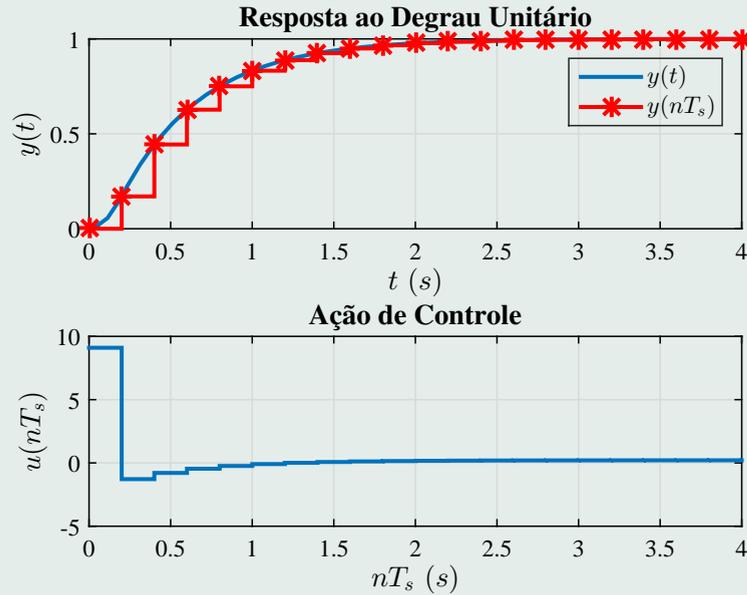


Figure 26: Resposta ao degrau do Exemplo .12 com compensação das oscilações entre períodos de amostragem.



🔗 **Exemplo 13:** Obtenha um controlador Dahlin para o sistema.

$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{1 + 10s}$$

Considerando  $T_s = 1$  s e  $q = 5$ . O equivalente ZOH é dado por

$$G(z) = z^{-2} \frac{0,09516}{z - 0,9048} = \frac{0,09516}{z^3 - 0,9048z^2}$$

Note que para garantir a causalidade,  $k \geq 2$ . Fazendo-se  $k = 2$ , tem-se

$$\begin{aligned} C(z) &= \left( \frac{z^3 - 0,9048z^2}{0,09516} \right) \left( \frac{1 - e^{-0,2}}{z^3 - (e^{-0,2})z^2 - (1 - e^{-0,2})} \right) \\ &= \frac{1,905z^3 - 1,724z^2}{z^3 - 0,8187z^2 - 0,1813} \end{aligned} \quad (39)$$

[Homepage](#)[Página de Rosto](#)[Página 82 de 83](#)[Voltar](#)[Full Screen](#)[Fechar](#)[Desistir](#)



Projeto a partir de ...

Discretização da ...

Projeto pelo Lugar ...

Projeto pelo ...

Projeto por ...

Homepage

Página de Rosto



Página 83 de 83

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

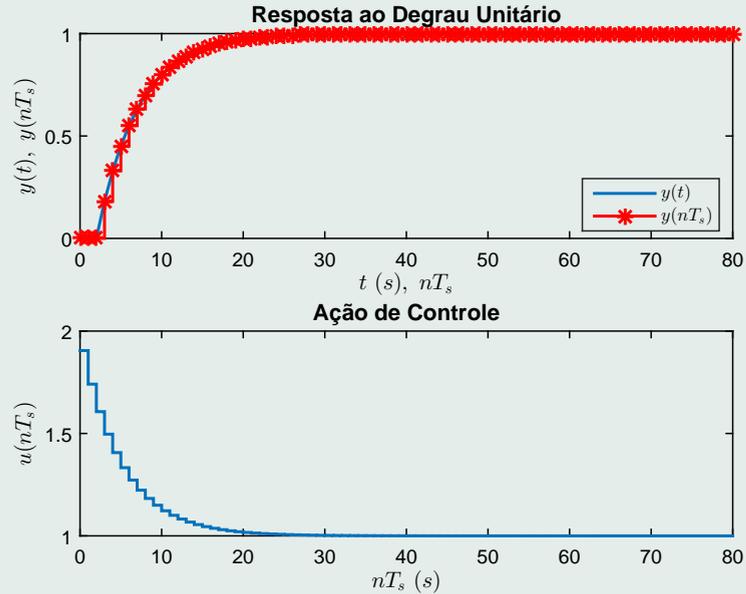


Figure 27: Resposta ao degrau do Exemplo 8.13.