PGF5219/4300427-1a Avaliação de Dinâmica Estocástica (2023)

Instruções gerais

1. As respostas deverão ser entregues até o dia 12/11/2023 EM SALA DE AULA.
2. Todas as respostas deverão ser acompanhadas por justificativas e detalhamentos matemáticos cabíveis. A falta de justificativas implicará na não integralidade da questão.
3. A prova pode ser feita com consulta a livros, artigos, notas de aula e materiais adicionais, porém as respostas são **individuais**.

---

1) Sistema de dois estados em contato com reservatórios sequenciais (2,0)

Considere um sistema de dois estados descritos pela matrizes de transição

$$W_1 = \begin{pmatrix} -b_1 & q_1 \\ b_1 & -q_1 \end{pmatrix} \text{ para } 0 \leq t < \tau/2 \tag{1}$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} -b_2 & q_2 \\ b_2 & -q_2 \end{pmatrix} \text{ para } \tau/2 \leq t < \tau \tag{2}$$

(a) Encontre os autovalores e autovetores de W_1 and W_2;

(b) Utilizando as condições de contorno apropriadas, encontre $P(t)$ para $0 \leq t < \tau/2$ e $\tau/2 \leq t < \tau$. Justifique todas as considerações efetuadas.

2) Sistema de duas partículas brownianas interagentes (4,0)

Considere um sistema formado por duas partículas brownianas interagentes de massas iguais m, cada sujeita a uma força externa e estando em contato com um reservatório de temperatura T_i, $i = \{1, 2\}$. Suas posições e velocidades, x_i and v_i, evoluem de acordo com as equações abaixo

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}F_1^*(x_1, x_2) + \frac{1}{m}\tilde{F}_1(t) - \gamma v_1 + \xi_1(t) \\ \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}F_2^*(x_1, x_2) + \frac{1}{m}\tilde{F}_2(t) - \gamma v_2 + \xi_2(t) \\ \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = v_1 \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = v_2 \end{cases} \tag{3}$$

onde $F_i^*(x_1, x_2) = -\partial V_i(x_1, x_2)/\partial x_i$, $\tilde{F}_1(t) = X_1 \cos(\omega t)$ e $\tilde{F}_2(t) = X_2 \cos(\omega t)$ e

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0 \qquad\qquad \left\langle \xi_i(t)\xi_j(t') \right\rangle = \frac{2\gamma k_B T_i}{m}\delta_{i.j}\delta(t - t')$$

(a) Mostre que o sistema acima apresenta distribuição de probabilidades $P(x_1, x_2, v_1, v_2, t)$ governada pela equação de Fokker-Planck-Kramers

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{2}\left(v_i\frac{\partial P}{\partial x_i} + [F_i^*(x_1, x_2) + \tilde{F}_i(t)]\frac{\partial P}{\partial v_i} + \frac{\partial J_i}{\partial v_i}\right) \tag{4}$$

onde

$$J_i = -\gamma v_i P - \frac{\gamma k_B T_i}{m}\frac{\partial P}{\partial v_i} \tag{5}$$

(b) Considerando $V_1(x_1, x_2) = kx_1^2/2 + \kappa(x_1 - x_2)^2/2$ e $V_2(x_1, x_2) = kx_2^2/2 + \kappa(x_2 - x_1)^2/2$ (onde $k \neq \kappa$) , escreva as equações de evolução para as médias $\langle v_i \rangle$ bem como para as covariâncias $b_{ij}^{xv} = \langle x_i y_j \rangle - \langle x_i \rangle\langle v_j \rangle$, onde o subscrito i, j denotam as partículas 1 e 2.

(c) Dada as equações anteriores, obtenha explicitamente as expressões para (todas as correlações) b_{ij}^{xv} ($i \in \{1, 2\}$) no regime estacionário como função dos parâmetros do problema.

(d) Obtenha as expressões para $\langle v_i \rangle(t)$ ($i, j \in \{1, 2\}$) no regime estacionário.

(e) Considere $m = 1$. Mostraremos futuramente que a potência instantânea associada à partícula i, dada por $\dot{W}_i = -\tilde{F}_i(t) \langle v_i \rangle (t)$ e tem média (temporal) dada por

$$\overline{\dot{W}_i} = -\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \tilde{F}_i(t)\langle v_i\rangle(t)dt. \tag{6}$$

Encontre $\overline{\dot{W}_1}$ e $\overline{\dot{W}_2}$ e mostre que podem ser escritas da seguinte forma $\overline{\dot{W}_1} = -J_1X_1$ e $\overline{\dot{W}_2} = -J_2X_2$. Encontre as expressões J_1 e J_2 em termos dos dados do problema.

3) Transições de fase em equilíbrio e fora do equilíbrio em sistemas com simetria de inversão (4,0)

Considere um sistema de formado por N partículas interagentes, descrito pela equação mestra abaixo:

$$\frac{d}{dt}P(\sigma,t) = \sum_{i=1}^{N}\{w_i(\sigma^i)P(\sigma^i,t) - w_i(\sigma)P(\sigma,t)\}, \tag{7}$$

onde $\sigma \equiv (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_i, ..., \sigma_N)$ e $\sigma^i \equiv (\sigma_1, \sigma_2, ..., -\sigma_i, ..., \sigma_N)$.

(a) Mostre, que a evolução temporal da magnetização por spin $m = \langle\sigma_k\rangle$ de um sistema com simetria de inversão descrito por uma equação mestra é

$$\frac{d}{dt}\langle\sigma_k\rangle = -2\langle\sigma_k\omega_k(\sigma)\rangle, \tag{8}$$

onde $\omega_k(\sigma)$ denota a taxa de transição $\sigma_k \to -\sigma_k$.

(b) Usando o resultado anterior, encontre a expressão para a magnetização por spin para o modelo de Ising, descrito pela dinâmica de Glauber com taxa de transição dada por

$$w_i(\sigma) = \frac{1}{2}\left\{1 - \sigma_i \tanh(X)\right\}, \tag{9}$$

onde $X = \beta\{J\sum_{\delta=1}^{k}\sigma_{i+\delta} + H\}$. Mostre que a dinâmica acima satisfaz a condição do balanço detalhado.

(c) Escreva a equação de evolução para a magnetização e encontre a solução (transcedental) estacionária dentro da aproximação de campo médio. Justifique todas as considerações efetuadas.

(d) Faça um gráfico $m \times T$ e mostre (analiticamente) que, nas proximidades do ponto crítico T_c, tem-se $m \sim (T_c - T)^{\beta'}$. Obtenha T_c para $k = 8$.

Conforme discutido em sala de aula, o modelo do votante majoritário corresponde a uma versão de não equilíbrio do modelo de Ising, apresentando também uma transição de fase ferromagnética-paramagnética, descrito pela taxa de transição abaixo

$$w_i(\sigma) = \frac{1}{2}\left\{1 - \sigma_i(1-2f)S\left(\sum_{\delta=1}^{k}\sigma_{i+\delta}\right)\right\} \tag{10}$$

sendo f o parâmetro de "desalinhamento" ($0 < f < 1/2$) sendo a soma acima efetuada sob uma vizinhança de k vizinhos e

$$S(X) = \begin{cases} 1 \text{ , if } X > 0 \\ -1 \text{ , if } X < 0 \\ 0 \text{ , if } X = 0 \end{cases} \tag{11}$$

(e) A partir da equação de equação (8), obtenha a equação para m.

(f) Obtenha agora a equação para m como função de f efetuando a aproximação de campo médio simples;

(g) Assumindo que m é pequeno nas proximidades do ponto crítico, obtenha f_c bem como o exponente β' . Compare sua resposta com aquela obtida em (d).