Experimento com Rotifers

Gilberto A. Paula

Departamento de Estatística
IME-USP, Brasil
giapaula@ime.usp.br

$2^{\underline{o}}$ Semestre 2023

Sumário

Descrição do Experimento

Considere um experimento com duas espécies de *rotifers*, um tipo microscópico de invertebrado aquático. O objetivo do experimento é estimar a densidade relativa de cada espécie com relação a uma determinada substância (Collett, 1991, Seção 6.9). Descrição do experimento:

- Os animais foram centrifugados e colocados em recipientes com densidades relativas diferentes e observados em cada recepiente o total de animais expostos e o total de animais suspensos.
- A densidade relativa de cada espécie será estimada pelo DL_{50}, que corresponde à densidade relativa que deixa 50% suspensos.

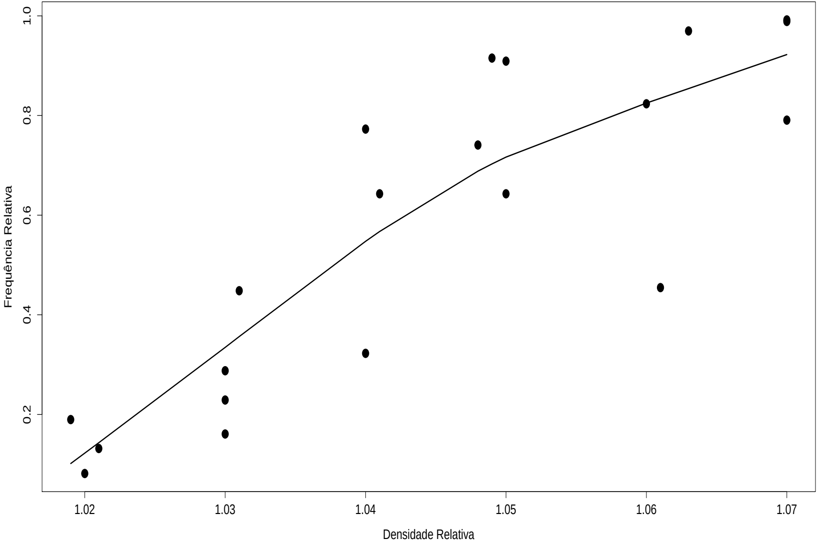
Descrição dos Dados

	Polyarthra major		Keratella cochlearis	
Densidade	Suspensos	Expostos	Suspensos	Expostos
1,019	11	58	13	161
1,020	7	86	14	248
1,021	10	76	30	234
1,030	19	83	10	283
1,030	9	56	14	129
1,030	21	73	35	161
1,031	13	29	26	167
1,040	34	44	32	286
1,040	10	31	22	117
1,041	36	56	23	162

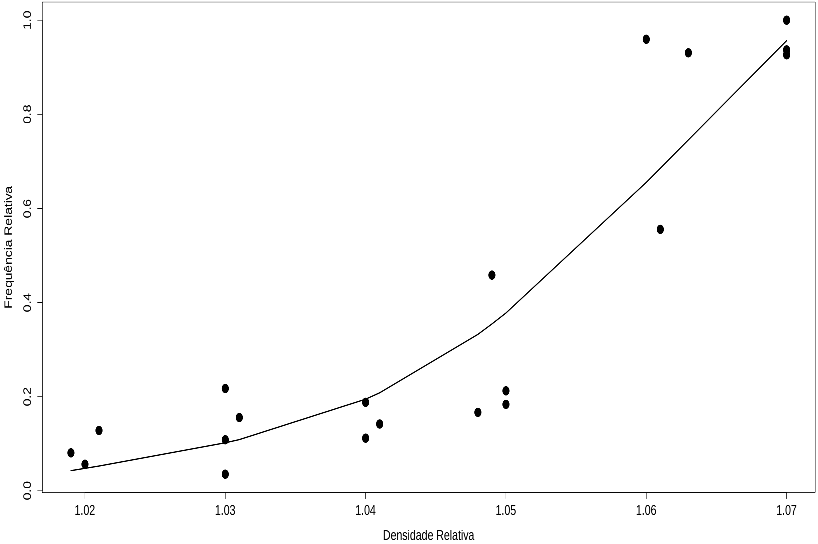
Descrição dos Dados

	Polyarthra major		Keratella cochlearis	
Densidade	Suspensos	Expostos	Suspensos	Expostos
1,048	20	27	7	42
1,049	54	59	22	48
1,050	20	22	9	49
1,050	9	14	34	160
1,060	14	17	71	74
1,061	10	22	25	45
1,063	64	66	94	101
1,070	68	86	63	68
1,070	488	492	178	190
1,070	88	89	154	154

Proporção de Rotifers Suspensos - Polyarthra major - Espécie 1



Proporção de Rotifers Suspensos - Keratella cochleari - Espécie 0



Sumário

Definição

Seja y_{ij} o número de animais suspensos dentre os n_{ij} expostos à j-ésima densidade relativa, para $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, \ldots, 10$. Vamos supor inicialmente o seguinte modelo:

- $Y_{ij}|x_j \stackrel{\text{ind}}{\sim} \text{B}\{n_{ij}, \pi_i(x_j)\}$,
- $\log\left\{\frac{\pi_i(x_j)}{1-\pi_i(x_j)}\right\} = \beta_1 + \beta_2 x_j$,
- $\pi_i(x_j) = \frac{\exp(\beta_1+\beta_2 x_j)}{1+\exp(\beta_1+\beta_2 x_j)}$,

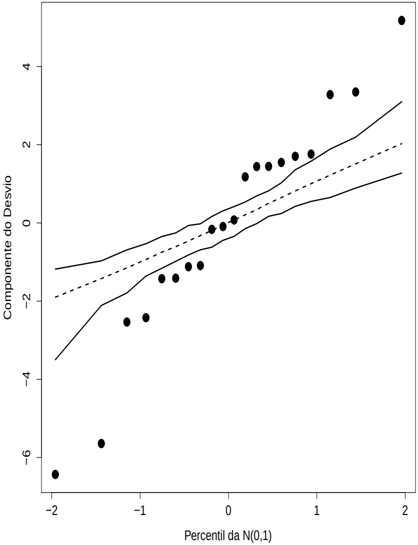
em que x_j denota a j-ésima densidade relativa.

Estimativas - Polyarthra major - Espécie 1

Efeito	Estimativa	E.Padrão	Valor-z	Valor-P
Constante	-109,72	5,22	-21,02	0,00
Densidade	105,67	5,02	21,06	0,00
AIC	209,62			

O desvio do modelo é dado por $\mathrm{D}(\mathbf{y};\hat{\mu}) = 133,82$ (18 g.l.), com valor-P dado por $\mathrm{P} = 0,00$. Embora os efeitos sejam altamente significativos, o modelo não está bem ajustado. Há fortes indícios de sobredispersão.

Resíduos Modelo Binomial - Polyarthra major - Espécie 1

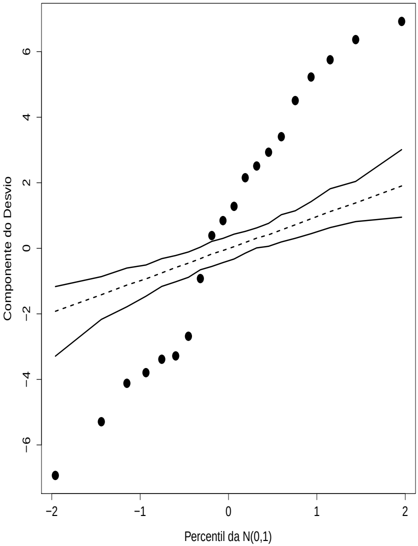


Estimativas - Keratella cochleari - Espécie 0

Efeito	Estimativa	E.Padrão	Valor-z	Valor-P
Constante	-114,35	4,05	-28,34	0,00
Densidade	108,76	3,86	28,19	0,00
AIC	386,95			

O desvio do modelo é dado por $D(\mathbf{y}; \hat{\mu}) = 300,19$ (18 g.l.), com valor-P dado por $P = 0,00$. Embora os efeitos sejam altamente significativos, o modelo não está bem ajustado. Há fortes indícios de sobredispersão.

Resíduos Modelo Binomial - Keratella cochleari - Espécie 0



Sumário

Definição

Sejam Y e Z variáveis aleatórias tais que:

$$Y|z \sim \mathrm{B}(n, z) \text{ e } Z \sim \mathrm{Beta}(\mu, \sigma),$$

em que $0 < z, \mu < 1$ e $\sigma > 0$. Então

$$Y \sim \mathrm{BB}(n, \mu, \sigma), \; y = 0, 1, \ldots, n,$$

com $\mathrm{E}(Y) = n\mu$ e $\mathrm{Var}(Y) = n\mu(1-\mu)\{1 + (n-1)\sigma^2\}$.

Definição

Seja y_{ij} o número de animais suspensos dentre os n_{ij} expostos à j-ésima densidade relativa, para $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, \ldots, 10$. Vamos supor agora o seguinte modelo:

- $Y_{ij}|x_j \overset{\text{ind}}{\sim} \text{BB}\{n_{ij}, \pi_i(x_j), \sigma\}$,
- $\log\left\{\frac{\pi_i(x_j)}{1-\pi_i(x_j)}\right\} = \beta_1 + \beta_2 x_j$,
- $\pi_i(x_j) = \frac{\exp(\beta_1+\beta_2 x_j)}{1+\exp(\beta_1+\beta_2 x_j)}$,

em que x_j denota a j-ésima densidade relativa.

Estimativas - Polyarthra major -Espécie 1

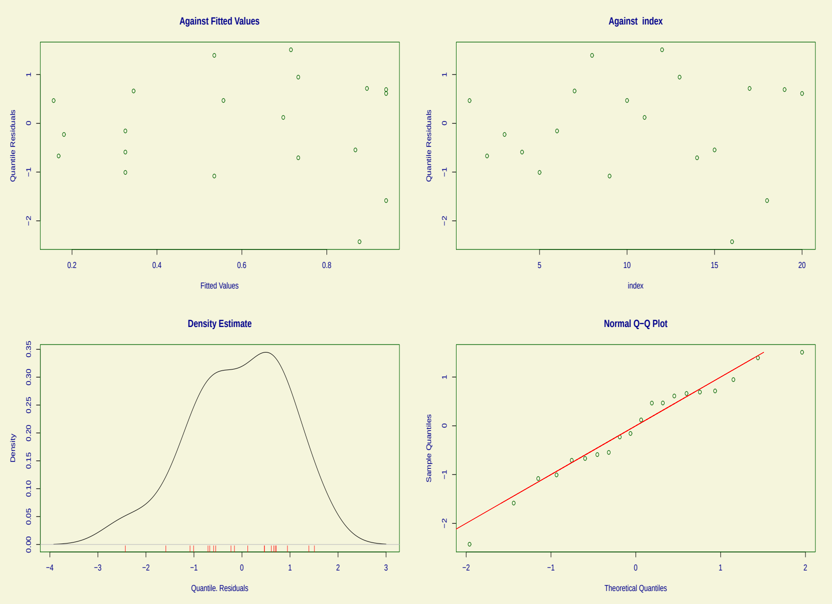
Efeito	Estimativa	E.Padrão	Valor-z	Valor-P
Constante	-90,19	13,84	-6,52	0,00
Densidade	86,86	13,31	6,53	0,00
$\log(\sigma)$	-2,28	0,41	-5,61	0,00
AIC	133,65			

Portanto a estimativa do DL_{50} fica dada por

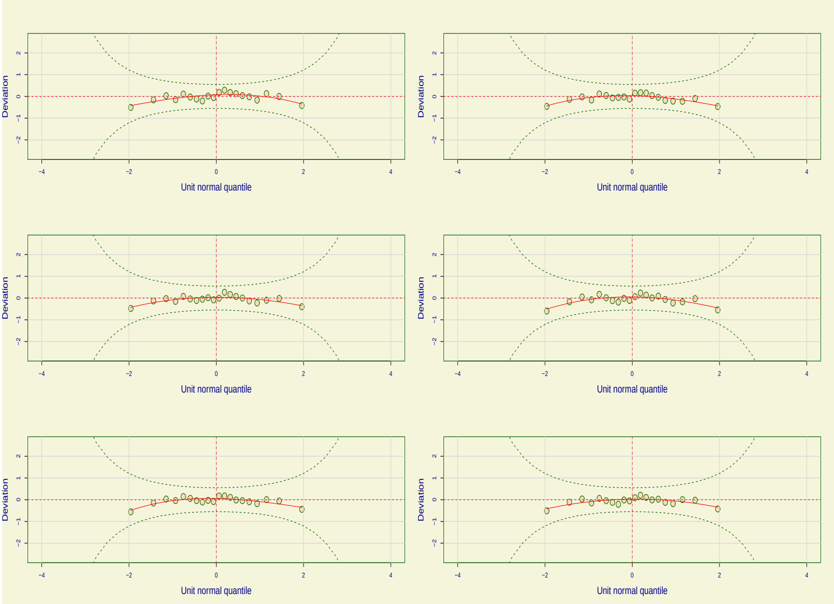
$$\widehat{\mathrm{DL}}_{50} = -\frac{\widehat{\beta}_1}{\widehat{\beta}_2} = \frac{90,19}{86.86} = 1,038.$$

Usar o método delta para obter aproximadamente $\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{\mathrm{DL}}_{50})$.

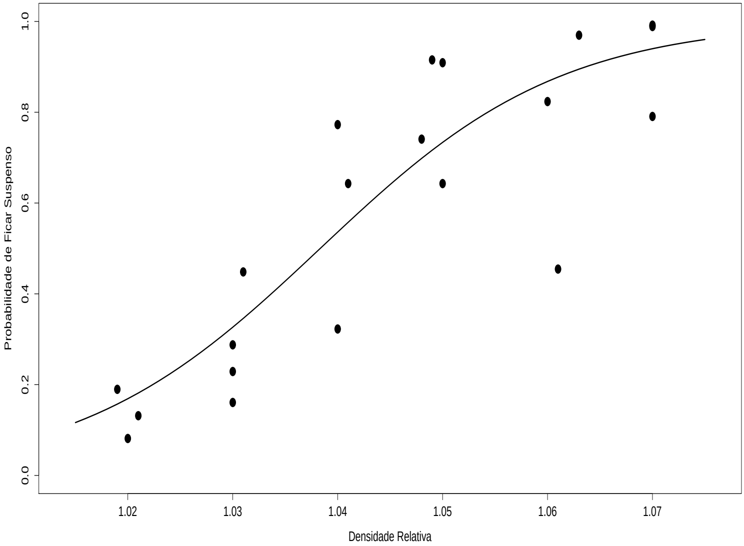
Resíduos GAMLSS Beta-Binomial - Polyarthra major - Espécie 1



Resíduos GAMLSS Beta-Binomial - Polyarthra major - Espécie 1



Curva Logística Ajustada - Polyarthra major - Espécie 1



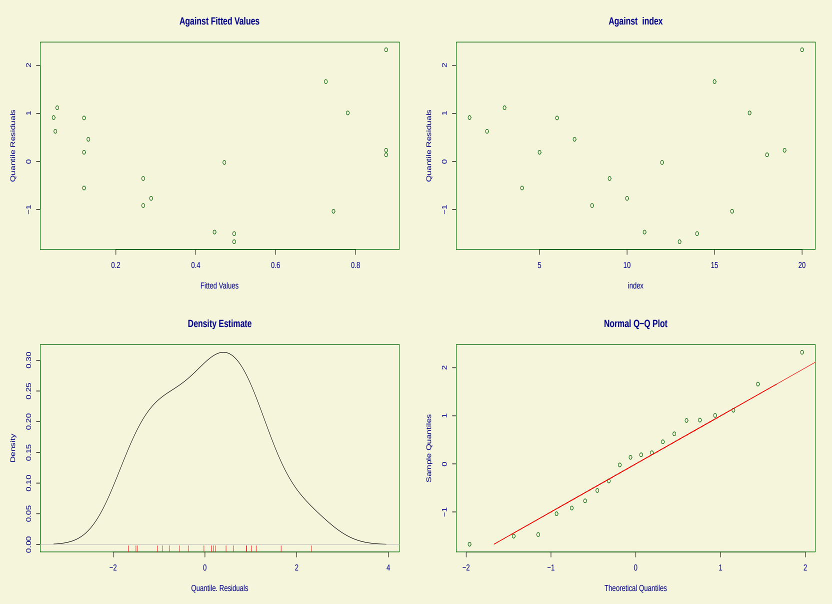
Estimativas - Keratella cochleari - Espécie 0

Efeito	Estimativa	E.Padrão	Valor-z	Valor-P
Constante	-103,69	17,38	-5,96	0,00
Densidade	98,74	16,54	5,97	0,00
$\log(\sigma)$	-1,90	0,39	-4,81	0,00
AIC	167,48			

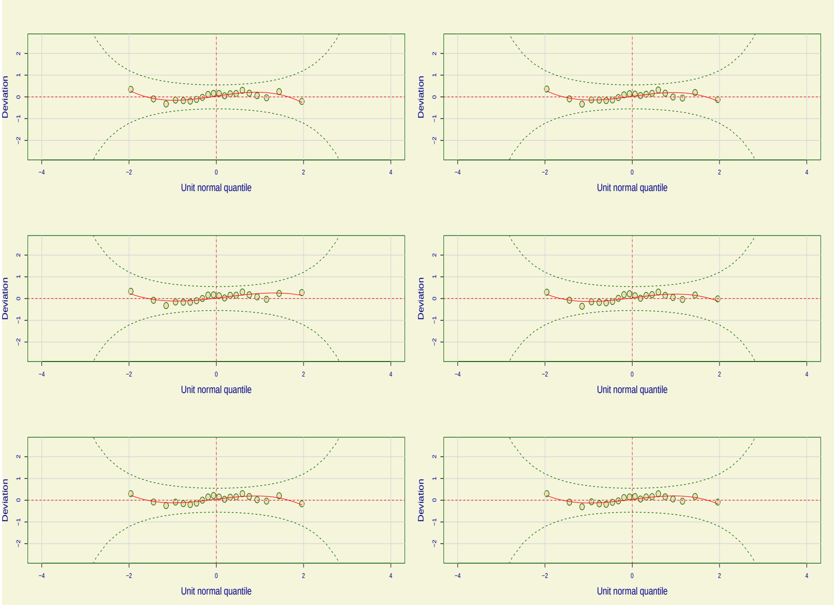
Portanto a estimativa do DL_{50} fica dada por

$$\widehat{\mathrm{DL}}_{50} = -\frac{\widehat{\beta}_1}{\widehat{\beta}_2} = \frac{103,69}{98,74} = 1,050.$$

Resíduos GAMLSS Beta-Binomial - Keratella cochleari - Espécie 0



Resíduos GAMLSS Beta-Binomial - Keratella cochleari - Espécie 0



Modelagem da Localização e Dispersão

Seja y_{ij} o número de animais suspensos dentre os n_{ij} expostos à j-ésima densidade relativa, para $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, \ldots, 10$. Vamos supor para a espécie Keratella cochleari o seguinte modelo:

- $Y_{ij}|x_j \overset{\text{ind}}{\sim} \text{BB}\{n_{ij}, \pi_i(x_j), \sigma_i\}$,
- $\log\left\{\frac{\pi_i(x_j)}{1-\pi_i(x_j)}\right\} = \beta_1 + \beta_2 x_j$,
- $\log(\sigma_i) = \gamma_1 + \gamma_2 x_j$,

em que x_j denota a j-ésima densidade relativa.

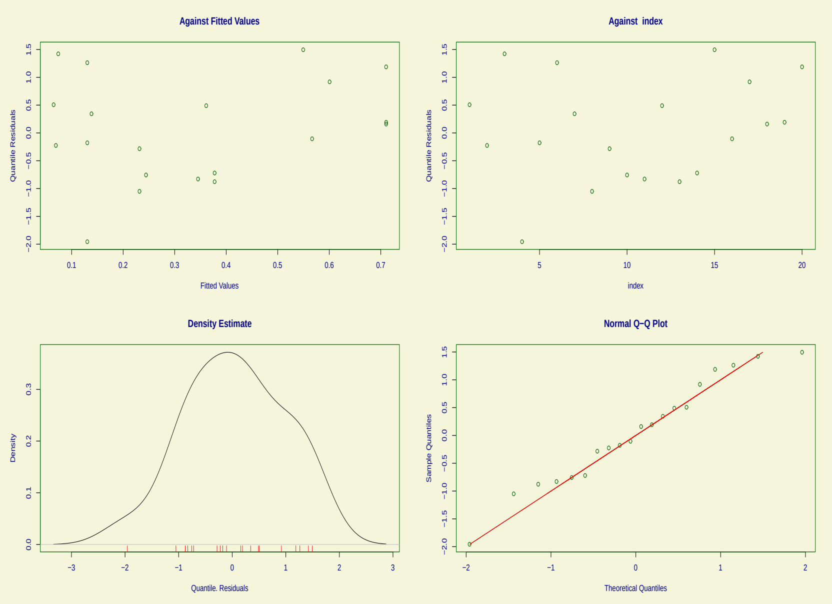
Estimativas - Keratella cochleari - Espécie 0

Efeito	Estimativa	E.Padrão	Valor-z	Valor-P
Constante	-73,86	13,73	-5,38	0,000
Densidade	69,87	13,27	5,26	0,000
Constante	-97,40	25,77	-3,78	0,002
Densidade	91,17	24,62	3,70	0,002
AIC	157,75			

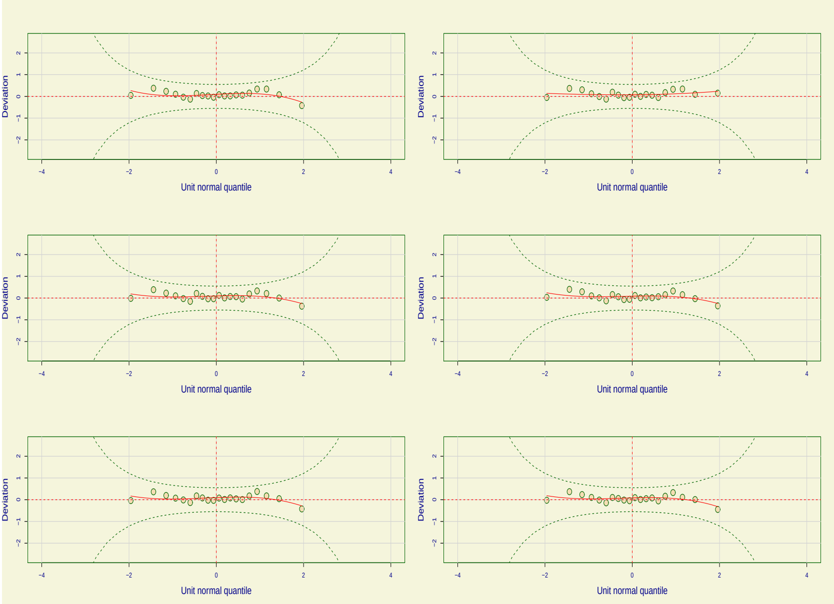
Portanto a estimativa do DL_{50} fica dada por

$$\widehat{DL}_{50} = -\frac{\widehat{\beta}_1}{\widehat{\beta}_2} = \frac{73,86}{69,87} = 1,057.$$

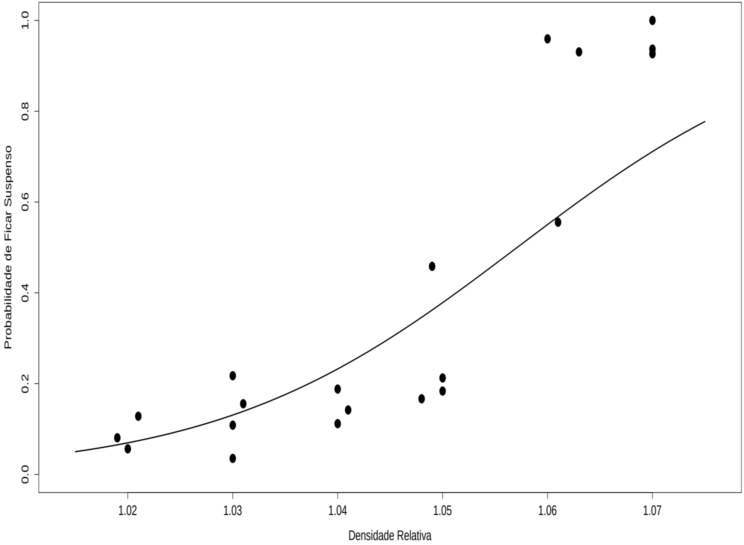
Resíduos GAMLSS Beta-Binomial - Keratella cochleari - Espécie 0



Resíduos GAMLSS Beta-Binomial - Keratella cochleari - Espécie 0



Curva Logística Ajustada - Keratella cochleari - Espécie 0



Estimativas - Keratella cochleari

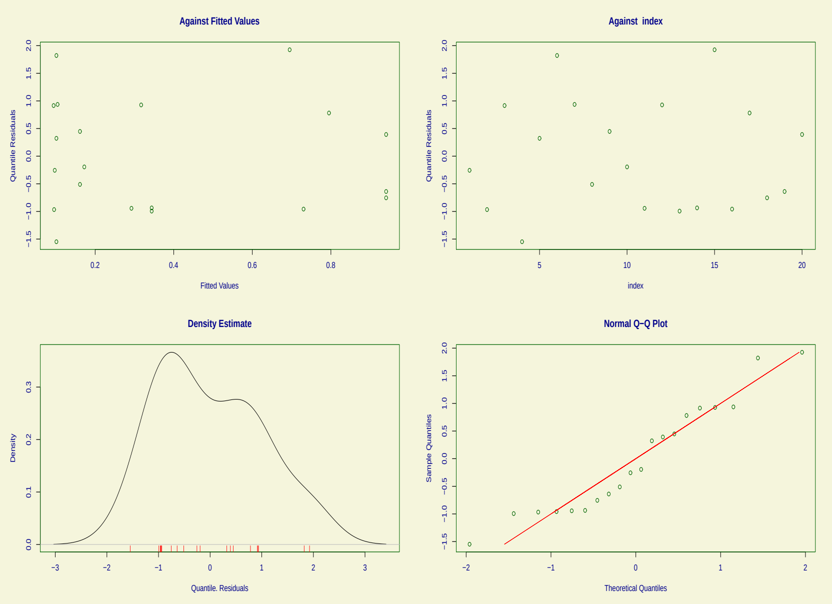
Efeito	Estimativa	E.Padrão	Valor-z	Valor-P
Constante	2449,5	413,2	5,93	0,000
Densidade	-4790,5	795,7	-6,02	0,000
Densidade^2	2340,1	383,0	6,11	0,000
Constante	-63,43	25,76	-2,46	0,026
Densidade	58,04	24,65	2,36	0,033
AIC	152,54			

A estimativa do DL_{50} sai da equação quadrática

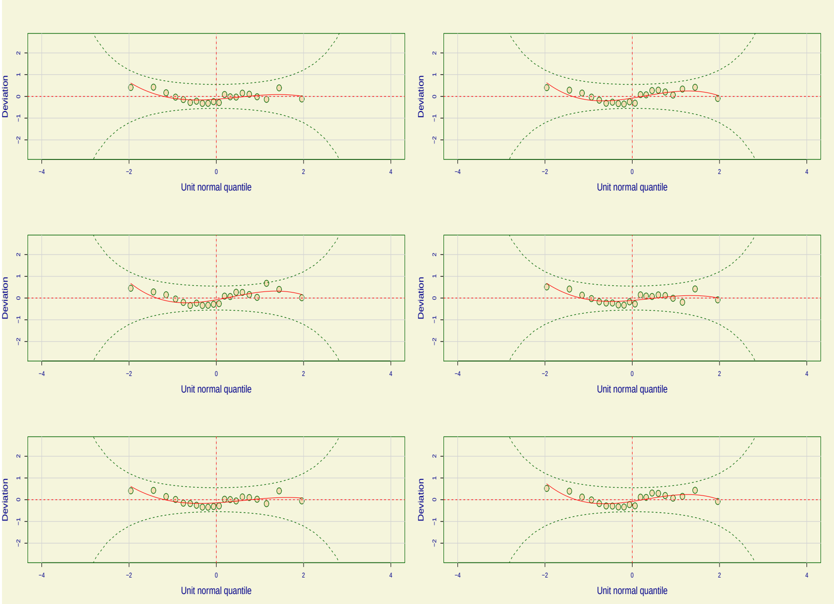
$$2340,1 * \widehat{\text{DL}}_{50}^{2} - 4790,5 * \widehat{\text{DL}}_{50} + 2449,5 = 0.$$

Com soluções $\widehat{\text{DL}}_{50} = 0,993$ ou $\widehat{\text{DL}}_{50} = 1,054.$ Somente uma das soluções é correta.

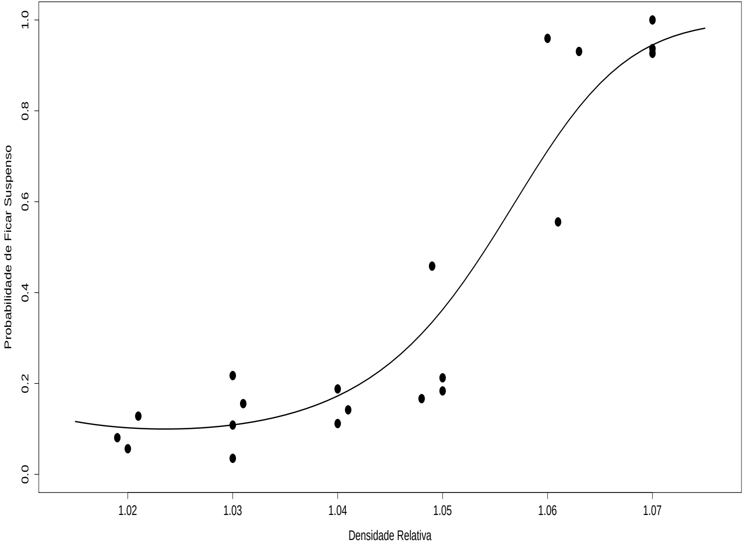
Resíduos GAMLSS Beta-Binomial - Keratella cochleari - Espécie 0



Resíduos GAMLSS Beta-Binomial - Keratella cochleari - Espécie 0



Curva Logística Ajustada - Keratella cochleari - Espécie 0



Sumário

Considerações Finais

- Neste exemplo, a densidade relativa de dois tipos de rotifers com relação a uma determinada substância foi estimada indiretamente através de regressão logística, usando a estimativa de DL_{50}.
- Para ambas as espécies o modelo logístico binomial não se ajustou bem, com fortes indícios de sobredispersão.
- Para a espécie Polyarthra major o ajuste de um modelo logístico beta-binomial para o parâmetro de localização foi suficiente para obter-se um ajuste adequado.
- Contudo, para a espécie Keratella cochleari foi necessário o ajuste conjunto dos parâmetros de localização em forma quadrática e precisão para obter-se um ajuste adequado.

Sumário

Referências

- Collett, D. (1991). *Modelling Binary Data*. Chapman and Hall, London.
- Stasinopoulos, M. D., Righy, R. A., Gillian, Z. A., Voudouris, V. e de Bastiani, F. (2017). *Flexible Regression and Smoothing Using GAMLSS in R*. Chapman and Hall/CRC.