PTC5611 - Controle Digital de Sistemas Dinâmicos
Cap. 7: Análise de Sistemas de Controle Digitais

Prof. Bruno Augusto Angélico

2021

Capítulo 7 - Análise de Sistemas de Controle Digitais

Sistemas de controle digitais serão analisados neste capítulo. Tal análise servirá como base para o projeto de controladores diretamente no plnao-z.

1. Do plano-s para o plano-z

No Capítulo 3 as seguintes relações entre o plano-s e o plano-z foram demonstradas:

- o semiplano da esquerda do plano-s é mapeado no interior do círculo unitário no plano-z;
- linhas verticais no plano-s com $\zeta\omega_n$ constante, que estão relacionadas com o tempo de assentamento da resposta transitória, são mapeadas em circunferências concêntricas à origem no plano-z;
- linhas horizontais no plano-s com ω_d constante, que estão relacionadas com o tempo de pico da resposta transitória, são mapeadas em linhas radias no plano-z;
- linhas radias no plano-s com ζ constante, que estão relacionadas com o sobresinal da resposta transitória, são ma-

peadas em espirais no plano-z.

O comando `zgrid` do MATLAB.

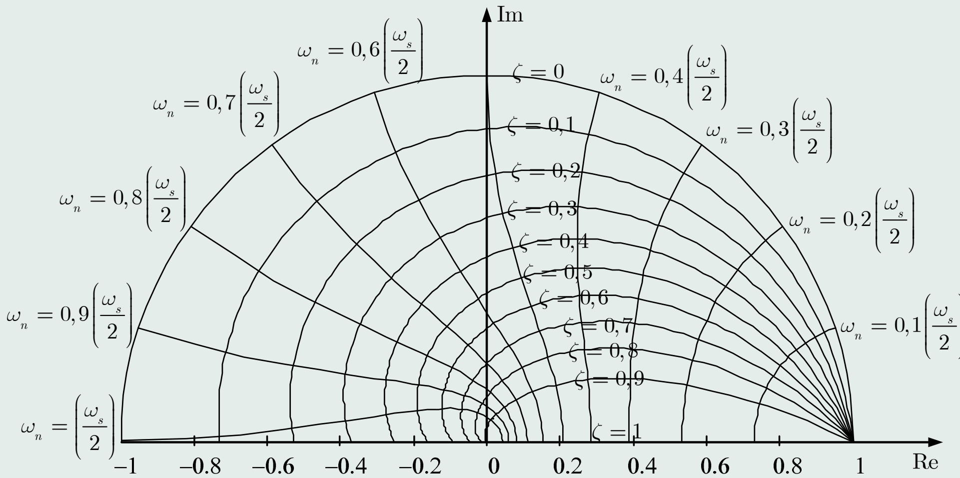

Figure 1: Linhas no plano-z com com ζ constante e ω_n constante.

A relação entre a posição de polos dominantes de malha fechada de um sistema no domínio-z e a resposta transitória está esquematizada na Figura 2.

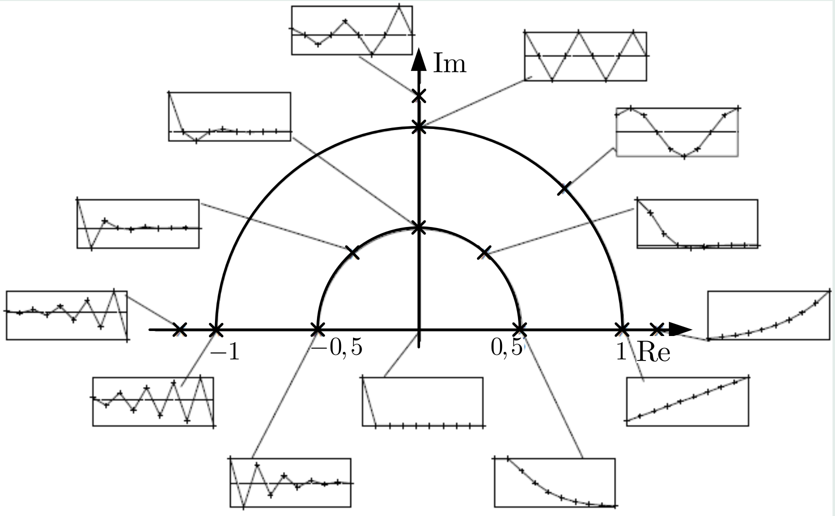

Figure 2: Linhas no plano-z com com ζ constante e ω_n constante.

✍ **Exemplo 1:** Indique no plano-s e no plano-z a região aceitável para localização dos polos de malha fechada de um sistema com $\zeta \geq 0,5$, $\omega_n \geq 1$ e $\zeta\omega_n \geq 0,5$. Considere período de amostragem $T_s = 0,2$.

Solução: como

$$z = e^{sT_s} = e^{-\zeta\omega_n T_s} e^{j\omega_d T_s}$$

tem-se que

$$|z| = e^{-\zeta\omega_n T_s}$$

$$\zeta\omega_n \geq 0,5 \Rightarrow |z| \leq e^{-0,5\cdot 0,2} = 0,90484$$

ou seja, $\zeta\omega_n \geq 0,5$ corresponde no plano-z ao interior do círculo de raio $\approx 0,9$.

A linha $\zeta = 0,5$ é mapeada em um espiral no plano-z. Tal espiral pode ser visualizada com o comando `zgrid` do MATLAB.

`zgrid`: Note, no entanto, a faixa 0 a $\omega_s/2$ é normalizada entre 0 e π, Para ω_n, deve-se entrar, com o argumento $2\pi\omega_n/\omega_s = \omega_n \cdot T_s$

em **zgrid**. A Figura 3 ilustra o mapeamento. O seguinte *script* foi utilizado para definir a região no plano-z.

```
clear all; close all; clc;
zeta = 0.5; w_n = 1; T_s =0.2;
x = linspace(-exp(-.1),exp(-.1),1e5);
plot(x,sqrt(exp(-.1)^2 - x.^2),'k--');
hold on;
plot(x,-sqrt(exp(-.1)^2 - x.^2),'k--');
zgrid(zeta,w_n*T_s);
axis('square');
```

Do plano-s para o . . .
Análise de Estabilidade
Análise de Erro em . . .
Lugar das Raízes
Resposta em . . .
Homepage
Página de Rosto
Página 8 de 34
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

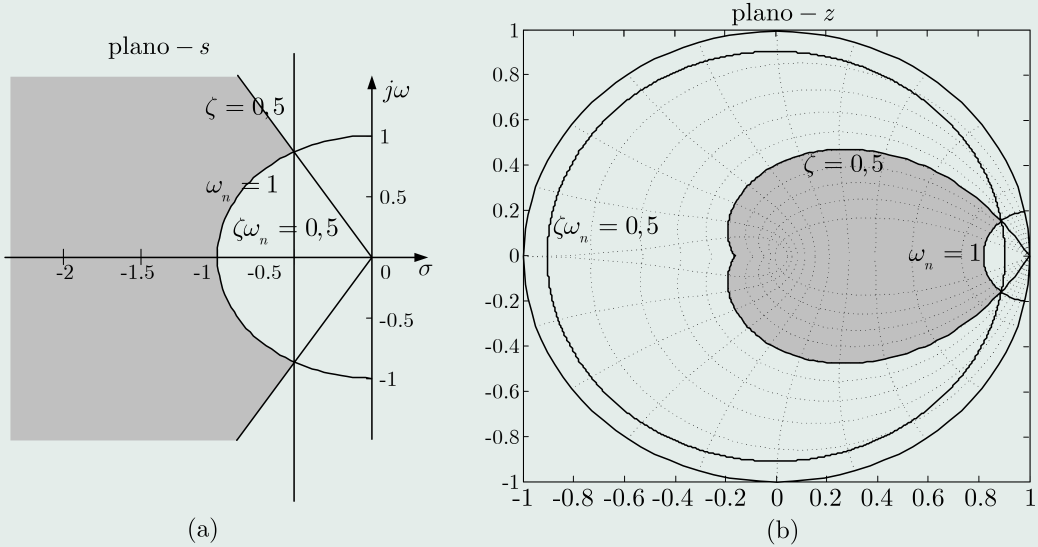

Figure 3: Mapeamento $s \rightarrow z$ do Exemplo **??**.

Do plano-s para o . . .
Análise de Estabilidade
Análise de Erro em . . .
Lugar das Raízes
Resposta em . . .
Homepage
Página de Rosto
Página 9 de 34
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

2. Análise de Estabilidade

Considere o sistema em malha fechada representado na Figura 4.

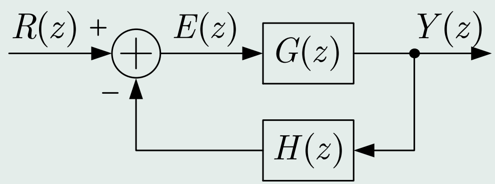

Figure 4: Sistema em tempo discreto em malha fechada.

A função de transferência de malha aberta é dada por

$$F(z) = G(z)H(z) \tag{1}$$

A função de transferência de malha fechada é escrita como

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + F(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)}. \tag{2}$$

A estabilidade deste sistema é determinada pela localização dos polos de malha fechada, obtidos pela solução da equação característica:

$$P(z) = 1 + F(z) = 0. \tag{3}$$

O sistema é absolutamente estável se os polos de malha fechada possuírem raio menor do que a unidade.

2.1. Critério de Jury

Vide Material.

3. Análise de Erro em Regime Estacionário

Sistemas de controle em tempo discreto podem ser classificados de acordo com o número de polos de malha aberta em $z = 1$. Suponha que um sistema possua a seguinte função de transferência em malha aberta

$$F(z) = \frac{1}{(z-1)^N}\frac{B(z)}{A(z)}, \tag{4}$$

onde $\frac{B(z)}{A(z)}$ não possui nem polo nem zero em $z = 1$. Tal sistema é classificado como tipo 0 se $N = 0$, tipo 1 se $N = 1$, tipo 2 se $N = 2$, e assim por diante. O tipo de sistema está relacionado com o erro em regime estacionário para uma dada entrada.

Considere novamente o sisteme em tempo discreto da Figura 4. O sinal de erro é dado por

$$E(z) = R(z) - F(z)E(z). \tag{5}$$

Do plano-s para o . . .
Análise de Estabilidade
Análise de Erro em . . .
Lugar das Raízes
Resposta em . . .
Homepage
Página de Rosto
Página 12 de 34
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

Logo,

$$E(z) = \frac{1}{1 + F(z)} R(z). \tag{6}$$

Aplicando o teorema do valor final, tem-se

$$e_{ss} = \lim_{n\to\infty} e(nT_s) = \lim_{z\to 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + F(z)} R(z) \right]. \tag{7}$$

O erro estático de posição é definido em relação à entrada degrau unitário $R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$, ou seja

$$e_{ss} = \lim_{z\to 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + F(z)} \frac{1}{1 - z^{-1}} \right] = \lim_{z\to 1} \frac{1}{1 + F(z)}. \tag{8}$$

Define-se $K_p = \lim_{z\to 1} F(z) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{(z-1)^N} \frac{B(z)}{A(z)}$ como a constante de erro estático de posição. Logo

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}. \tag{9}$$

Do plano-s para o . . .
Análise de Estabilidade
Análise de Erro em . . .
Lugar das Raízes
Resposta em . . .
Homepage
Página de Rosto
Página 13 de 34
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

Note que erro estático de posição se torna zero se $K_p \to \infty$, o que requer que $F(z)$ possua um polo (ou mais) em $z = 1$ (seja pelo menos tipo 1).

Para entrada rampa unitária, $R(z) = \frac{T_s z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$, o erro estático de velocidade é definido tal que

$$e_{ss} = \lim_{z\to 1}\left[(1-z^{-1})\frac{1}{1+F(z)}\frac{T_s z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right] = \lim_{z\to 1}\frac{T_s}{(1-z^{-1})F(z)}. \tag{10}$$

Define-se $K_v = \lim_{z\to 1}\frac{(1-z^{-1})F(z)}{T_s} = \lim_{z\to 1}\frac{(1-z^{-1})\frac{1}{(z-1)^N}\frac{B(z)}{A(z)}}{T_s}$ como a constante de erro estático de velocidade. Logo

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}. \tag{11}$$

Note que erro estático de velocidade se torna zero se $K_v \to \infty$, o que requer que $F(z)$ possua pelo menos dois polos em $z = 1$ (seja pelo menos tipo 2).

O erro estático de aceleração é definido em função da entrada parábola unitária $R(z) = \frac{T_s^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3}$, de maneira que

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}. \tag{12}$$

com $K_a = \lim_{z \to 1} \frac{(1-z^{-1})^2 F(z)}{T_s^2} = \lim_{z \to 1} \frac{(1-z^{-1})^2 \frac{1}{(z-1)^N} \frac{B(z)}{A(z)}}{T_s^2}$

Note que o erro estático de aceleração se torna zero se $K_a \to \infty$, o que requer que $F(z)$ possua pelo menos três polos em $z = 1$ (seja pelo menos tipo 3). A Tabela 1, similar à obtida para sistemas de tempo contínuo, relaciona o tipo de sistema com o erro em regime estacionário.

Table 1: Sistema de controle com realimentação unitária.

	e_{ss} Posição	e_{ss} Velocidade	e_{ss} Aceleração
Tipo 0	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
Tipo 1	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
Tipo 2	0	0	$\frac{1}{K_a}$

4. Lugar das Raízes

Em sistemas de tempo discreto, a equação característica pode ser escrita como:

$$1 + F(z) = 0 \Rightarrow F(z) = -1. \tag{13}$$

Verifica-se que no caso de sistemas de tempo discreto, as condições necessárias para que um dado ponto z esteja sobre o lugar das raízes (seja um polo de malha fechada) é semelhante ao caso de um ponto s genérico em sistemas contínuos, isto é, as seguintes condições precisam ser satisfeitas:

$$\text{Condição de módulo: } |F(z)| = 1 \tag{14}$$

$$\text{Condição angular:} \angle F(z) = \pm 180^\circ(2k+1), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{15}$$

Para construção do lugas das raízes de sistemas discreto utilizando

Do plano-s para o ...
Análise de Estabilidade
Análise de Erro em ...
Lugar das Raízes
Resposta em ...
Homepage
Página de Rosto
Página 16 de 34
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

o MATLAB, o comando `rlocus` é utilizado da mesma forma que em sistemas de tempo contínuo.

✍ **Exemplo 2:** (Ogata DCS) Determine a função de transferência de malha aberta ($F(z)$) para o sistema da Figura 5, com $G(s) = 1/(s+1)$, e trace o gráfico do lugar das raízes utilizando o MATLAB, considerando $T_s = 0,5$ s e $T_s = 1,5$ s.

Solução: Inicialmente, o equivalente discreto de $G(s)$ com o ZOH é obtido como

$$\mathcal{Z}\left\{ZOH(s)G(s)\right\} = \left(1 - z^{-1}\right)\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}$$

Efetuando expansão em frações parciais e a transformada-z:

$$\mathcal{Z}\left\{ZOH(s)G(s)\right\} = \left(1 - z^{-1}\right)\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)}\right\} = \left(1 - z^{-1}\right)\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T_s}}\right) = \frac{1-e^{-T_s}}{z-e^{-T_s}}$$

Como há realimentação unitária, a função de transferência de malha aberta é dada por

$$F(z) = C(z)\mathcal{Z}\left\{ZOH(s)G(s)\right\} = \frac{Kz}{z-1}\frac{1-e^{-T_s}}{z-e^{-T_s}}$$

Para $T_s = 0,5$, tem-se

$$F(z) = \frac{0,3935Kz}{(z-1)(z-0,6065)}$$

Para $T_s = 1,5$, tem-se

$$F(z) = \frac{0,7769Kz}{(z-1)(z-0,2231)}$$

A Figura 6 apresenta os gráficos do lugar das raízes para os casos considerados no exemplo. O código MATLAB utilizado para gerar as figura é o seguinte:

```
clear all; close all; clc;
s = tf('s'); z = tf('z');
G = 1/(s+1);
C_D = z/(z-1);
Ts = 0.5;
C_D.Ts = Ts;
G_D = c2d(G,Ts,'zoh');
C_G_D = C_D*G_D;
subplot(121);
rlocus(C_G_D);
axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5]);
disp('C_G_D1 = '); zpk(C_G_D)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Ts = 1.5;
C_D.Ts = Ts;
G_D2 = c2d(G,Ts,'zoh');
C_G_D2 = C_D*G_D2;
subplot(122);
rlocus(C_G_D2);
axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5]);
disp('C_G_D2 = '); zpk(C_G_D2)
```

Particularmente no Exemplo 2 verificou-se que o ganho K crítico para levar o sistema ao limiar de estabilidade se torna-se maior conforme o período de amostragem é reduzido.

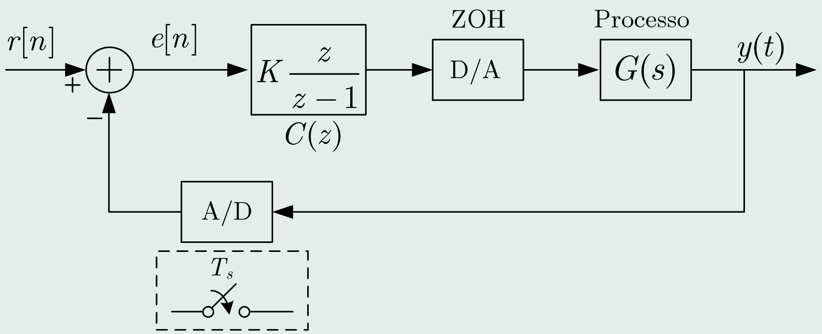

Figure 5: Sistema de controle em tempo discreto do Exemplo 2.

O período de amostragem tem relação direta com a resposta transitória e a estabilidade do sistema. Além de satisfazer os critérios apontados por Nyquist no teorema da amostragem, a escolha de T_s pode ser feita de acordo com as seguintes regras (Bittar):

- Para sistemas subamortecidos T_s deve ser escolhido tal que o sinal seja amostrado pelo menos dez vezes durante um ciclo da senoide amortecida;

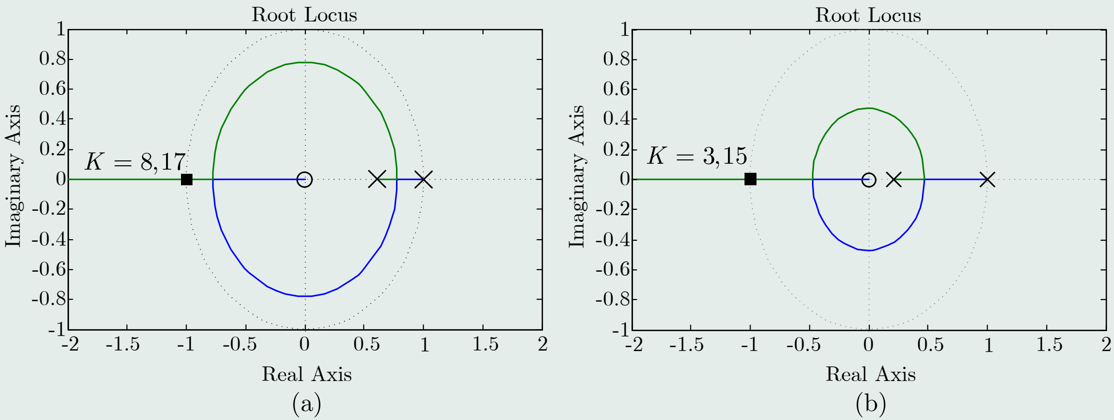

Figure 6: LR do Exemplo 2 para (a) $T_s = 0,5$ e (b) $T_s = 1,5$.

- Para sistemas amortecidos T_s deve ser escolhido tal que o sinal seja amostrado pelo menos dez vezes durante o tempo de subida da resposta ao degrau;

O Exemplo 3 mostra um particular caso da influência de T_s na estabilidade.

✍ Exemplo 3:

Determine a faixa de valores de T_s para que o sistema da Figura 7 seja estável.

Solução: Inicialmente, o equivalente discreto de $G(s)$ com o ZOH. A partir do Exemplo 2, pode-se concluir que

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{ZOH(s)G(s)\right\} = 10\frac{1-e^{-T_s}}{z-e^{-T_s}}$$

A função de transferência de malha fechada é portanto dada por

$$T(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{10(1-e^{-T_s})}{z-(11e^{-T_s}-10)}$$

Do plano-s para o ...
Análise de Estabilidade
Análise de Erro em ...
Lugar das Raízes
Resposta em ...
Homepage
Página de Rosto
Página 21 de 34
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

Para o sistema ser estável, $\left|11e^{-T_s} - 10\right| < 1$. Resolvendo a inequação, verifica-se que $0 < T_s < 0,2$.

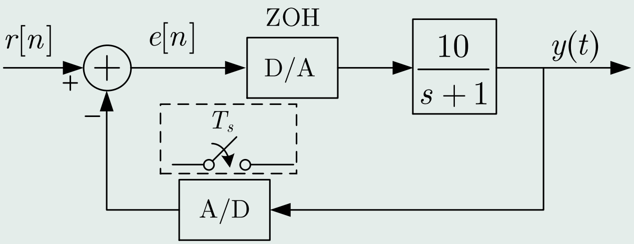

Figure 7: Sistema de controle em tempo discreto do Exemplo 3.

Do plano-s para o . . .
Análise de Estabilidade
Análise de Erro em . . .
Lugar das Raízes
Resposta em . . .
Homepage
Página de Rosto
Página 22 de 34
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

5. Resposta em Frequência

Depois de esperar até que as **condições de regime permanente tenham sido alcançadas**, a resposta em frequência de $G(z)$ pode ser calculada substituindo-se $z = e^{j\omega T_s}$. Da mesma forma que em sistemas de tempo contínuo, pode-se mostrar que a resposta em regime estacionário de um sistema LIT discreto para uma entrada $r(nT_s) = A\sin(n\omega T_s)$ é dada por

$$\begin{aligned} y_{ss}(nT_s) &= A\left|G(e^{j\omega T_s})\right|\sin\left(n\omega T_s + \angle G(e^{j\omega T_s})\right) \\ &= A\,M\,\sin(n\omega T_s + \phi) \end{aligned} \tag{16}$$

✍ **Exemplo 4:**

Encontre a resposta em frequência do sistema definido pela seguinte equação de diferenças

$$x[n] = r[n] + ax[n-1],\;\; 0 < a < 1$$

assumindo que o período de amostragem é igual a T_s. Determine a saída em regime estacionário para uma entrada $r(nT_s) = A\sin(n\omega T_s)$

Solução: aplicando a transformada-z, tem-se

$$X(z) = R(z) + az^{-1}X(z).$$

Assim,

$$G(z) = \frac{X(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$

Substituindo $z = e^{j\omega T_s}$, tem-se

$$G(e^{j\omega T_s}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega T_s}} = \frac{1}{1 - a\cos(\omega T_s) + ja\sin(\omega T_s)},$$

ou seja,

$$\left|G(e^{j\omega T_s})\right| = M = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos(\omega T_s)}},$$

Do plano-s para o . . .
Análise de Estabilidade
Análise de Erro em . . .
Lugar das Raízes
Resposta em . . .
Homepage
Página de Rosto
Página 24 de 34
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

e,

$$\angle G(e^{j\omega T_s}) = \phi = -\tan^{-1}\left(\frac{a\sin\omega T_s}{1 - a\cos\omega T_s}\right).$$

Portanto,

$$x_{ss}(t) = \frac{A}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos(\omega T_s)}}\sin\left(n\omega T_s - \tan^{-1}\left(\frac{a\sin\omega T_s}{1-a\cos\omega T_s}\right)\right)$$

O diagrama de Bode de uma função de transferência discreta pode ser obtido no MATLAB utilizando-se o comando `bode`.

✍ **Exemplo 5:**

Utilizando o MATLAB, plote a resposta em frequência da planta

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

contínua e discreta com ZOH e período de amostragem $T_s = 0,2$, $T_s = 1$ e $T_s = 2$ segundos.

Solução: A Figura 8 apresenta as curvas. O seguinte *script* foi utilizado para gerar a solução.

```
clear all; close all; clc;
G = tf(1,[1 1 0]);
G_d1 = c2d(G,0.2,'zoh');
G_d2 = c2d(G,1,'zoh');
G_d3 = c2d(G,2,'zoh');
bode(G,'k',G_d1,'b',G_d2,'r',G_d3,'g');
```

5.1. O Plano-w

- Métodos convencionais de resposta em frequência, que incluem todo o semiplano esquerdo do plano-s, não se aplicam no plano-z;
- Frequências no plano-z aparecem como $z = e^{j\omega T_s}$, a simplicidade dos gráficos em escala logarítmica seria perdida;
- Solução (+/-): plano-z para plano-w. (ex: diagrama de

Do plano-s para o . . .

Análise de Estabilidade

Análise de Erro em . . .

Lugar das Raízes

Resposta em . . .

Homepage

Página de Rosto

Página 27 de 34

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

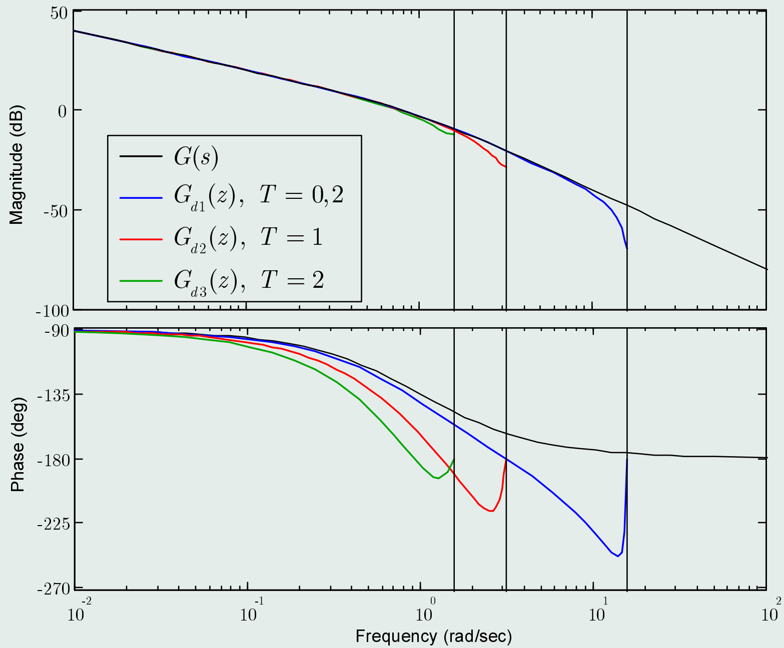

Figure 8: Diagramas de Bode do Exemplo 4.

Bode).

Transformada-w, que também é bilinear, sendo definida como

$$z = \frac{1 + (T_s/2)\mathrm{w}}{1 - (T_s/2)\mathrm{w}} \tag{17}$$

A relação inversa é dada por

$$\mathrm{w} = \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1} \tag{18}$$

A Figura 9 ilustra estes mapeamentos.

- ν é uma frequência fictícia no plano-w.
- faixa de frequências no plano-s de $\omega = -\omega_s/2$ a $\omega = \omega_s/2$ é estendida de $\nu = -\infty$ a $\nu = \infty$ no plano-w;
- A freq. de Nyquist $\omega = \omega_s/2$ é mapeada em $\nu = \infty \Rightarrow$ não pode haver qualquer dinâmica significativa próxima ou acima da freq. de Nyquist.

Do plano-s para o ...
Análise de Estabilidade
Análise de Erro em ...
Lugar das Raízes
Resposta em ...
Homepage
Página de Rosto
Página 29 de 34
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

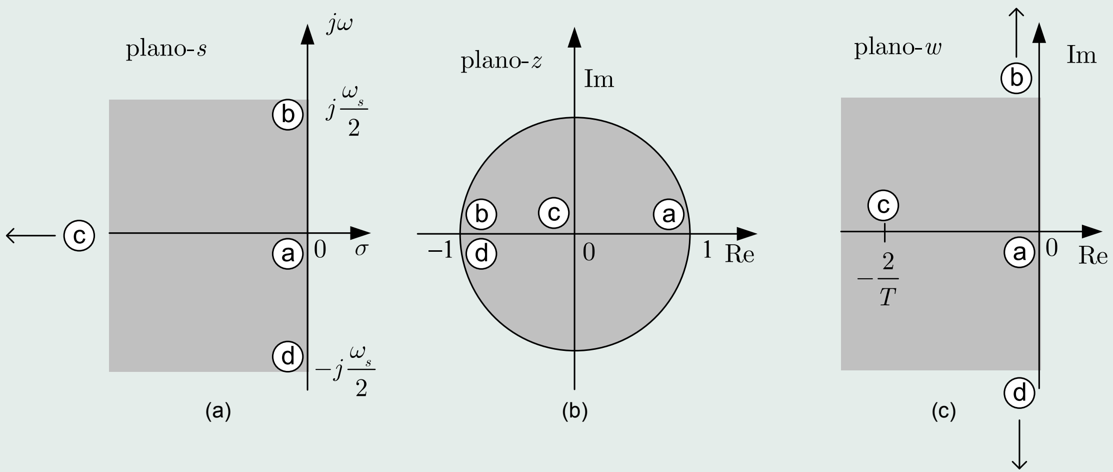

Figure 9: Mapeamentos $s \to z$ e $z \to$ w.

Do plano-s para o . . .
Análise de Estabilidade
Análise de Erro em . . .
Lugar das Raízes
Resposta em . . .
Homepage
Página de Rosto
Página 30 de 34
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

As frequências ν e ω se relacionam da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathrm{w}\big|_{\mathrm{w}=j\nu} &= j\nu = \frac{2}{T_s}\left.\frac{z-1}{z+1}\right|_{z=e^{j\omega T_s}} = \frac{2}{T_s}\frac{e^{j\omega T_s}-1}{e^{j\omega T_s}+1} \\ &= \frac{2}{T_s}\frac{e^{j\omega T_s/2}-e^{-j\omega T_s/2}}{e^{j\omega T_s/2}+e^{-j\omega T_s/2}} = \frac{2}{T_s} j\tan(\omega T_s/2) \qquad (19) \end{aligned}$$

Com isso, $G(j\omega)$ pode ser convertida em $G(j\nu)$ fazendo-se $\omega = \frac{2}{T_s}\tan^{-1}(\nu T_s/2)$. Para ωT_s pequeno, $G(s)$ e $G(\mathrm{w})$ se aproximam.

✍ **Exemplo 6:** Considere o sistema da Figura 10. Obtenha $G(\mathrm{w})$ e plote o diagrama de Bode em função de ν. Assuma $T_s = 0,2$ s.

Solução:

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s\,(s+1)}\right\} = \frac{0,1813}{z - 0,8187}$$

Utilizando a transformação bilinear de z para w dada por

$$z = \frac{1 + (T_s/2)\mathrm{w}}{1 - (T_s/2)\mathrm{w}} = \frac{1 + 0,1z}{1 + 0,1z}$$

tem-se que

$$G(\mathrm{w}) = \frac{0,1813}{\frac{1+0,1\mathrm{w}}{1-0,1\mathrm{w}} - 0,8187} = 0,9967\frac{1 - 0,1\mathrm{w}}{\mathrm{w} + 0,9967}$$

Observe que os polos e o ganho de malha aberta nos planos s e w são bem parecidos. No entanto, $G(\mathrm{w})$ possui zero em $\mathrm{w} = 2/T_s = 10$, embora o sistema contínuo não possua zeros. Com $T_s \to 0$, o

Do plano-s para o ...
Análise de Estabilidade
Análise de Erro em ...
Lugar das Raízes
Resposta em ...
Homepage
Página de Rosto
Página 32 de 34
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

zero do plano-w tende a infinito. Outro ponto a observar é que

$$\lim_{\mathrm{w}\to 0} G(\mathrm{w}) = \lim_{s\to 0} G(s)$$

O diagrama de Bode de $G(j\nu)$ em função de ν é ilustrado na Figura 11, em comparação com $G(j\omega)$. O seguinte *script* em MATLAB foi criado:

```
clear all; close all; clc;
s = tf('s'); z = tf('z');
Gs = 1/(s+1);
Ts = 0.2;
Gz = c2d(Gs,Ts,'zoh');
Gw = d2c(Gz,'tustin');
[MGs,PGs,w] = bode(Gs);
[MGw,PGw] = bode(Gw,w); PGw = PGw-360;
figure(1); title('Diagrama de Bode');
subplot(211)
semilogx(w,20*log10(MGs(:))); hold on
semilogx(w,20*log10(MGw(:)),'r--');
ylabel('Amplitude (dB)'); xlabel('Frequência (rad/s)');
legend('$G(s)$', '$G({\rmw})$');
subplot(212)
semilogx(w,PGs(:)); hold on
```

```
semilogx(w,PGw(:),'r--');
ylabel('Fase (graus)'); xlabel('Frequência (rad/s)');
axis([w(1) w(end) -270 -90])
```

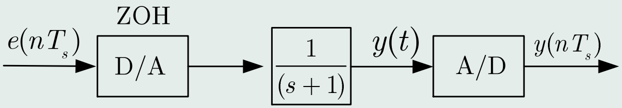

Figure 10: Sistema do Exemplo 6.

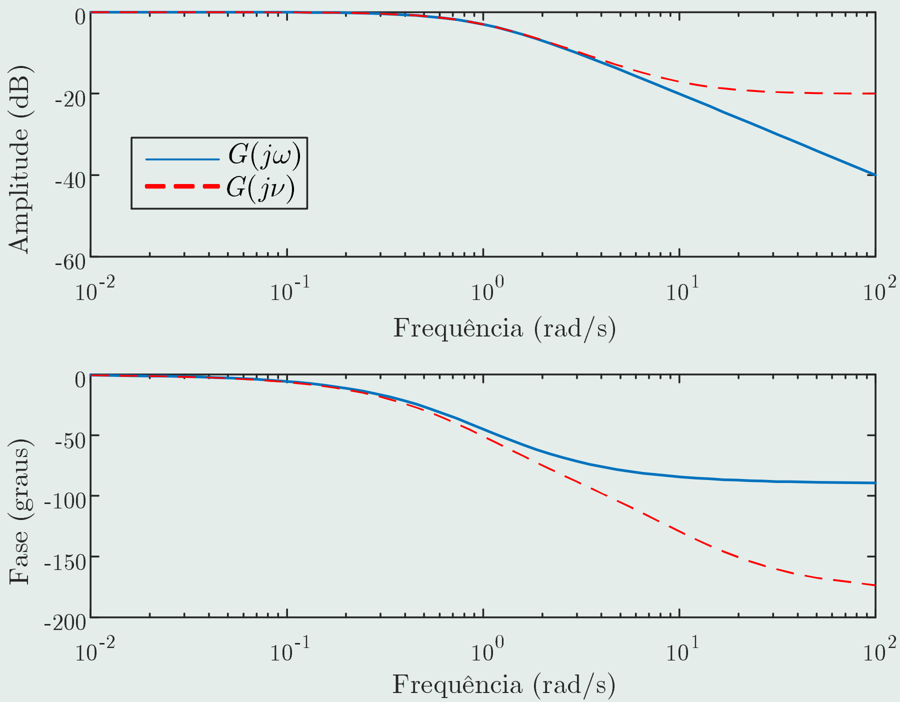

Figure 11: Diagrama de Bode de $G(j\nu)$ e $G(j\omega)$ do Exemplo 6.