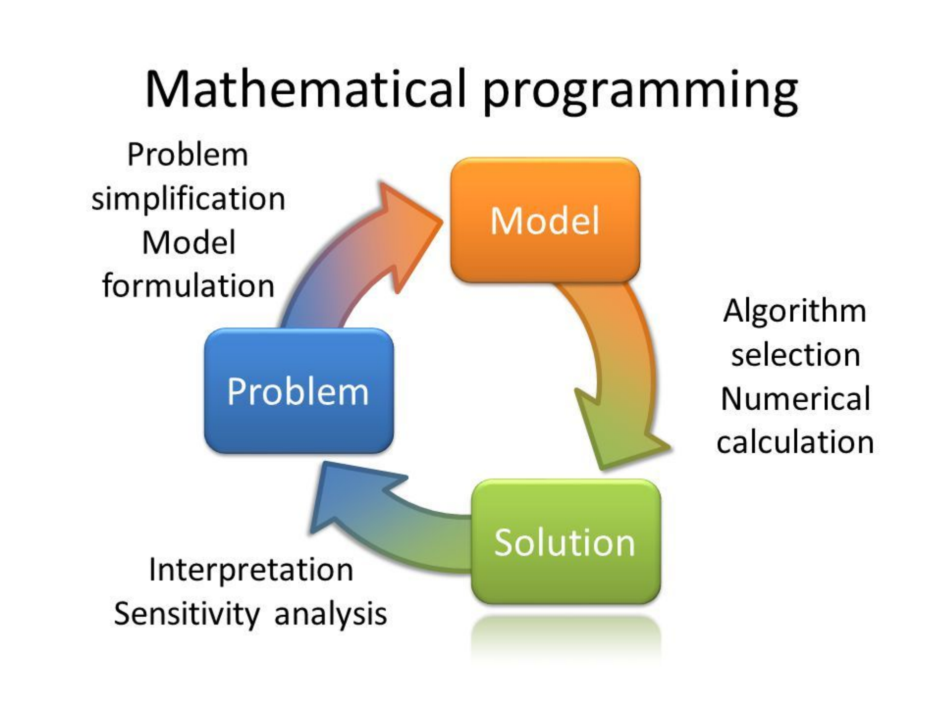
Otimização Linear

Conceitos básicos de Modelagem

Conceitos

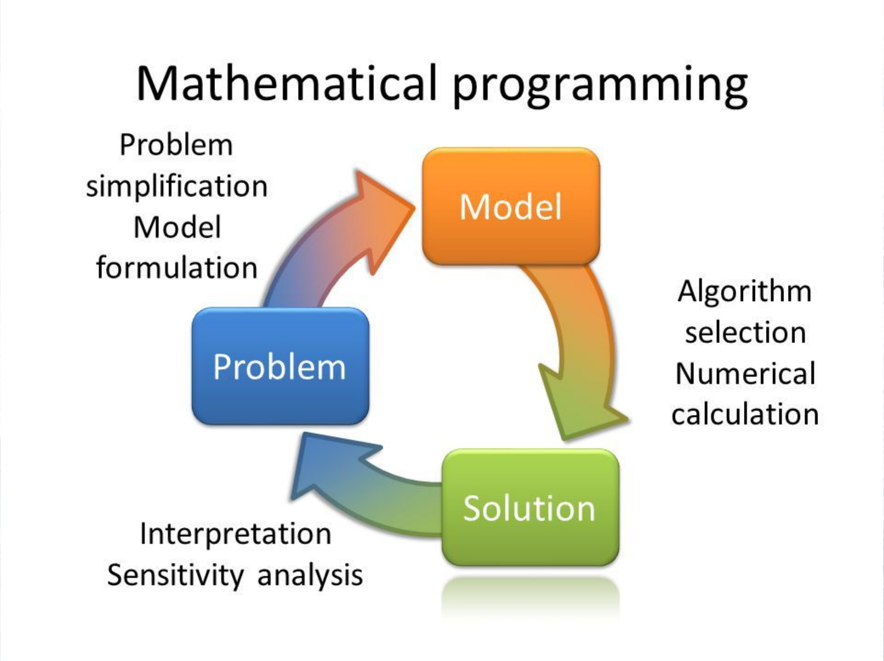
- A programação matemática é um ramo da matemática preocupado com a teoria e métodos para resolver problemas, encontrando extremos de funções em conjuntos definidos por restrições lineares e não lineares (igualdades e desigualdades) dentro de um espaço vetorial de dimensão finita [1].

- A programação matemática é um ramo da pesquisa operacional, compreendendo uma ampla classe de problemas de controle [1].



Conceitos

- Os problemas de programação matemática encontram aplicações em várias áreas da atividade humana, onde deve-se escolher formas de ação possíveis.
- Por exemplo, esse cenário ocorre em problemas de planejamento de longo prazo.
- O termo "programação matemática" está relacionado ao fato de que o objetivo de resolver vários problemas reside na programação de ação.



Programação Linear

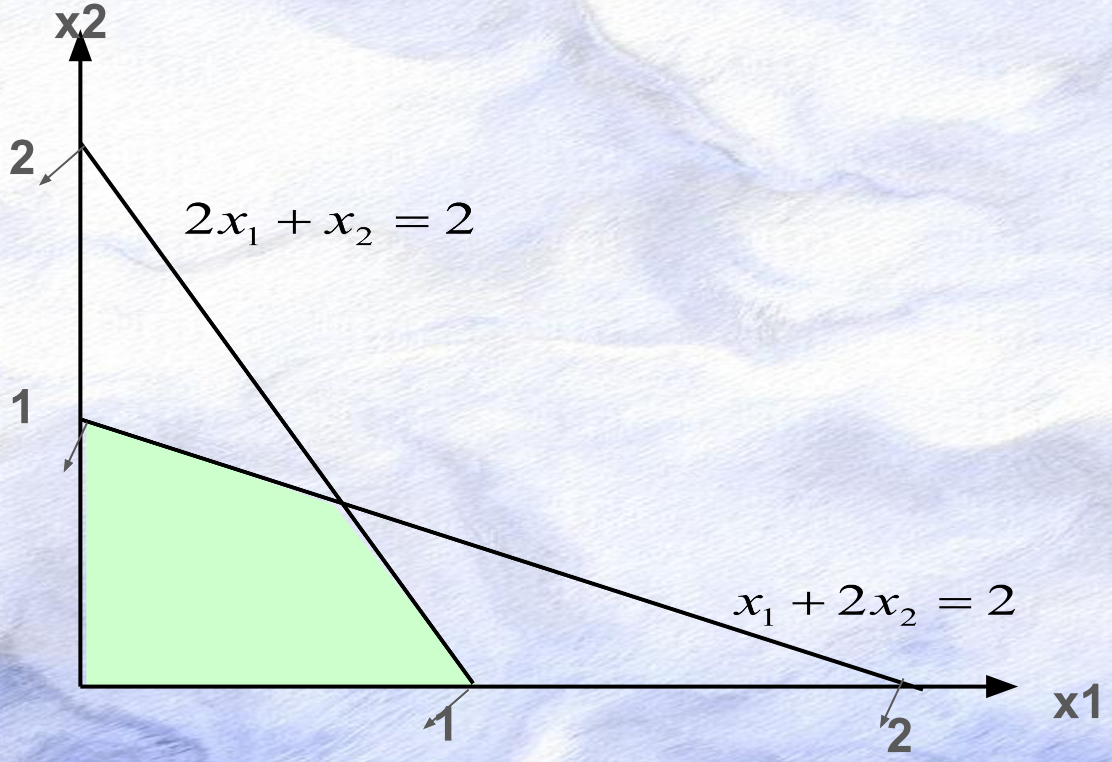
$$\max\ cx$$

st.

$$Ax \le b$$

$$x \ge 0$$

Programação Linear



$$Max\ x_1 + x_2$$

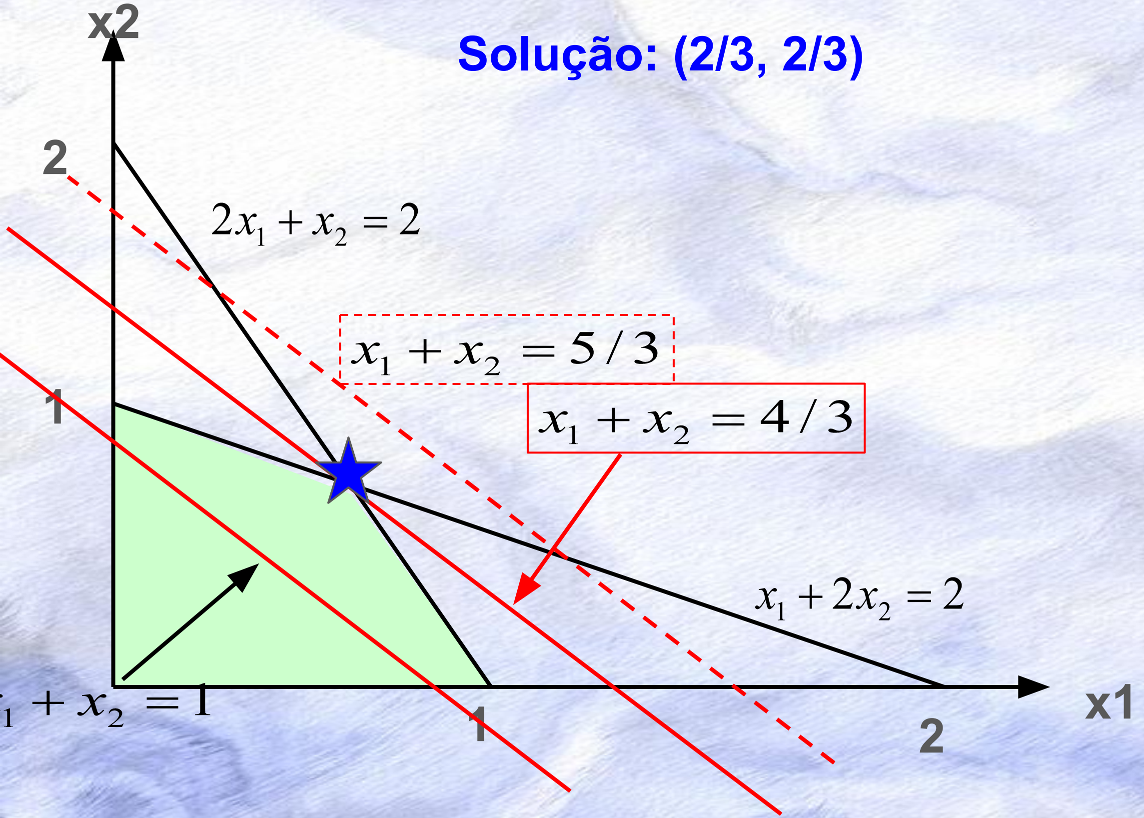
$$s.t.$$

$$x_1 + 2x_2 \le 2$$

$$2x_1 + x_2 \le 2$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Programação Linear



$$Max\ x_1 + x_2$$

$$s.t.$$

$$x_1 + 2x_2 \le 2$$

$$2x_1 + x_2 \le 2$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Programação Inteira

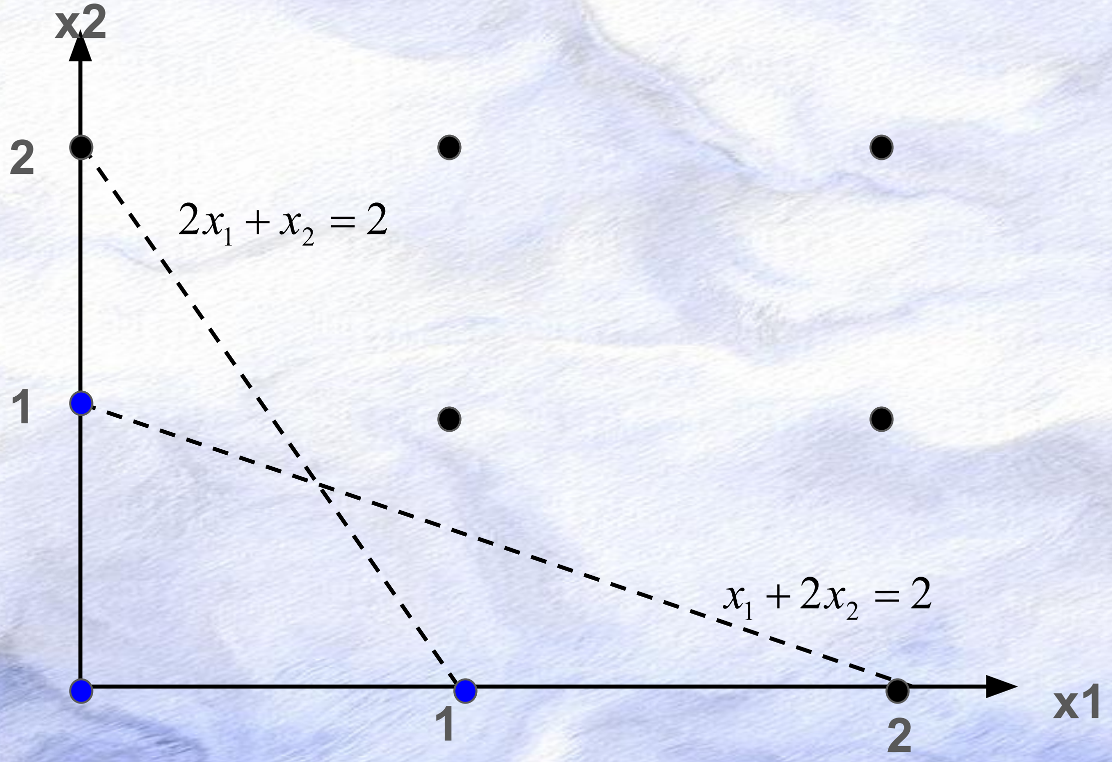
$$\max\ cx$$

st.

$$Ax \leq b$$

$$x \in Z_+$$

Programação Inteira



$$Max\ x_1 + x_2$$

$$s.t.$$

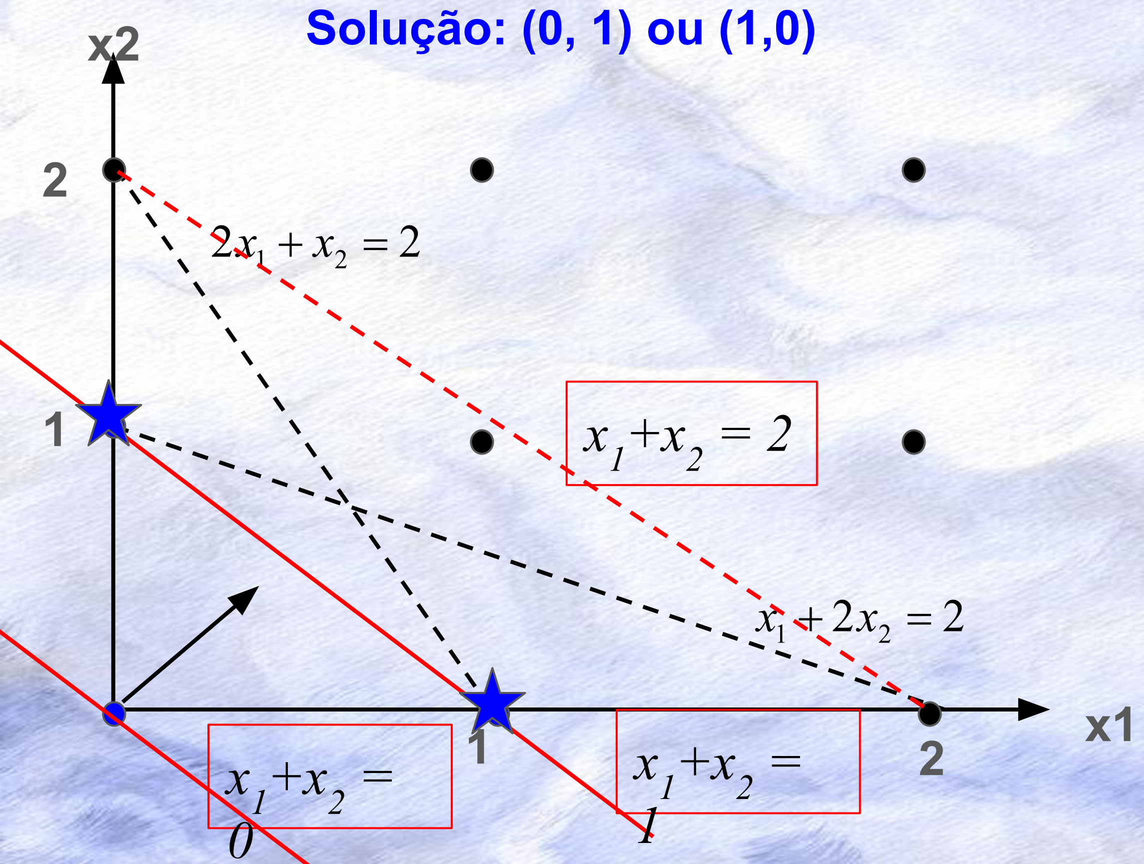
$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

x_1 e x_2 são inteiros

Programação Inteira



$$\begin{aligned} &Max\ x_1+x_2 \\ &s.t. \\ &x_1 + 2x_2 \le 2 \\ &2x_1 + x_2 \le 2 \\ &x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

x_1 e x_2 são inteiros

Programação Inteira-Mista

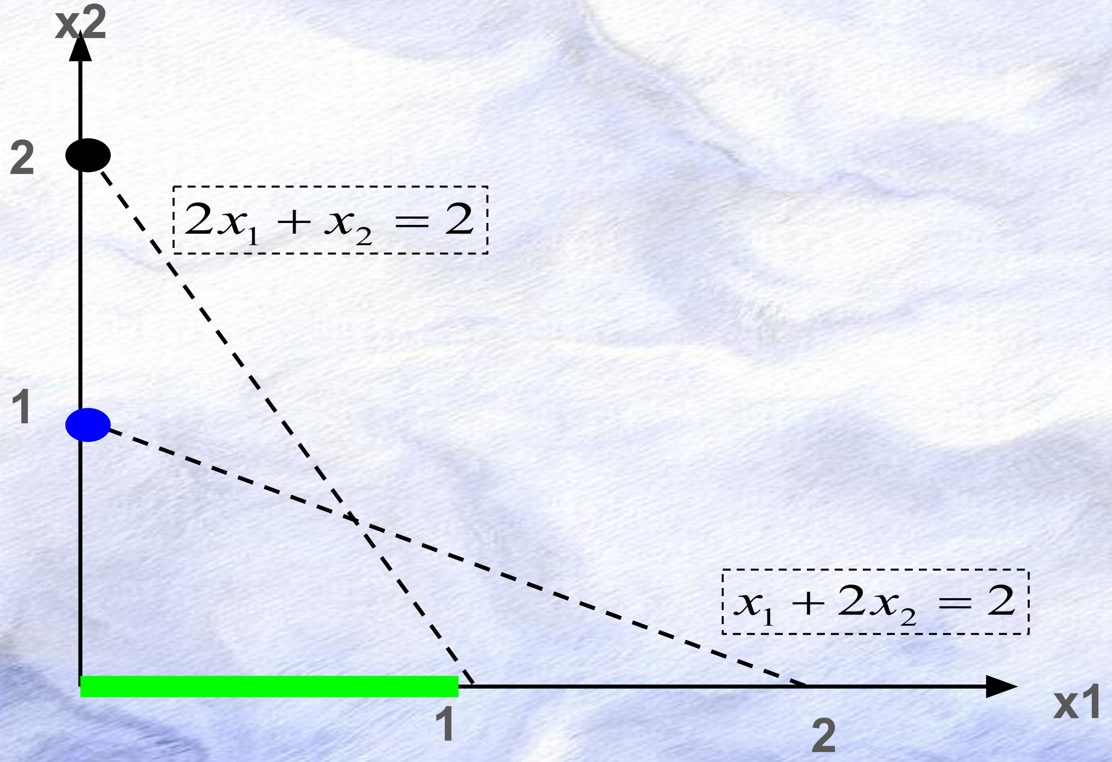
$\max cx + hy$

st.

$Ax + Gy \leq b$

$x \geq 0,\ y \in Z_+$

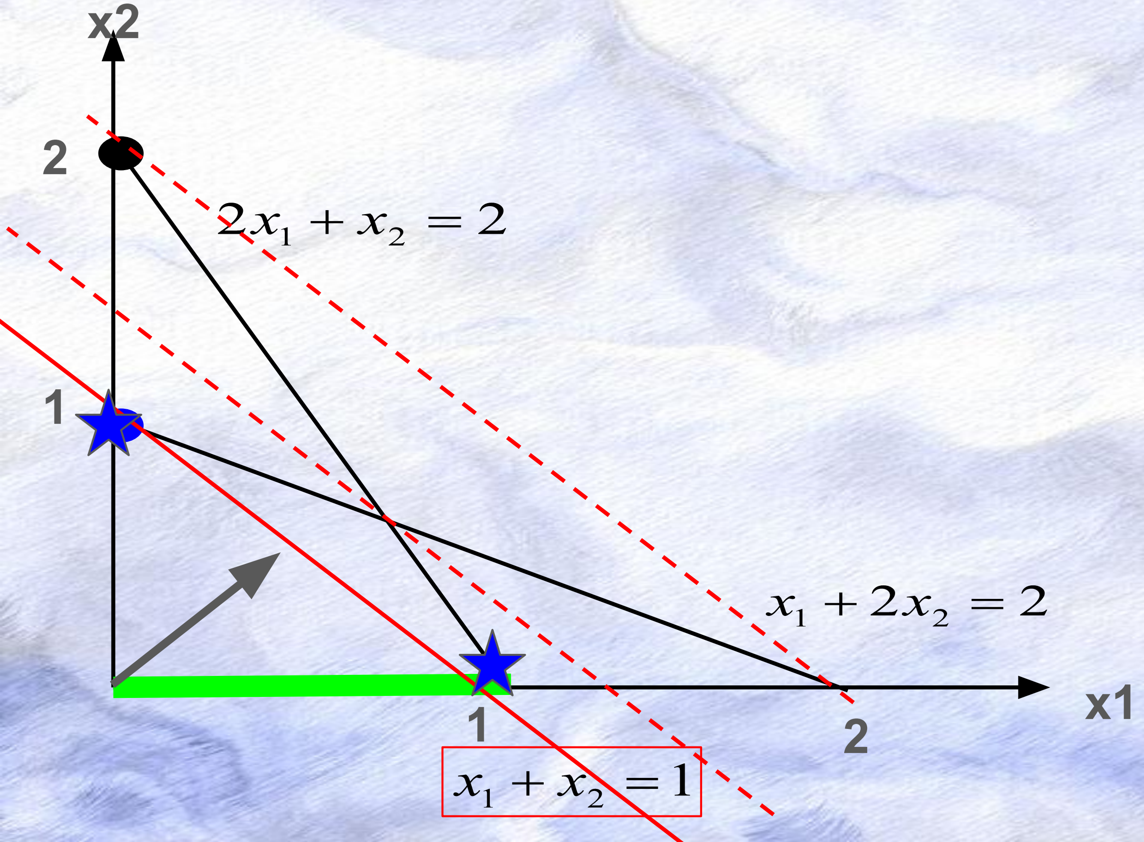
Programação Inteira-Mista



$$Max\ x_1 + x_2$$
$$s.t.$$
$$x_1 + 2x_2 \le 2$$
$$2x_1 + x_2 \le 2$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

x_2 é inteira

Programação Inteira-Mista



$$\begin{aligned}
&Max\ x_1 + x_2 \\
&s.t. \\
&x_1 + 2x_2 \le 2 \\
&2x_1 + x_2 \le 2 \\
&x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

x_2 é inteira

Solução: (1, 0) and (0,1)

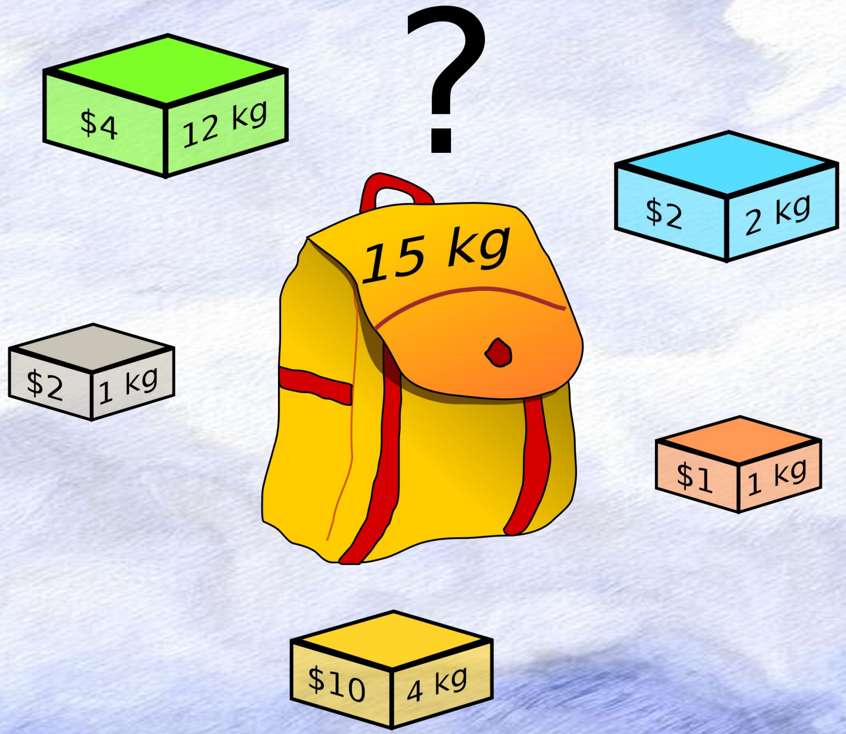
Problema da Mochila

$$\text{Maximize} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b,$$

$$x_j = 0 \quad \text{or} \quad 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$



Problema do Caixeiro Viajante

$$\text{Minimize} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},$$

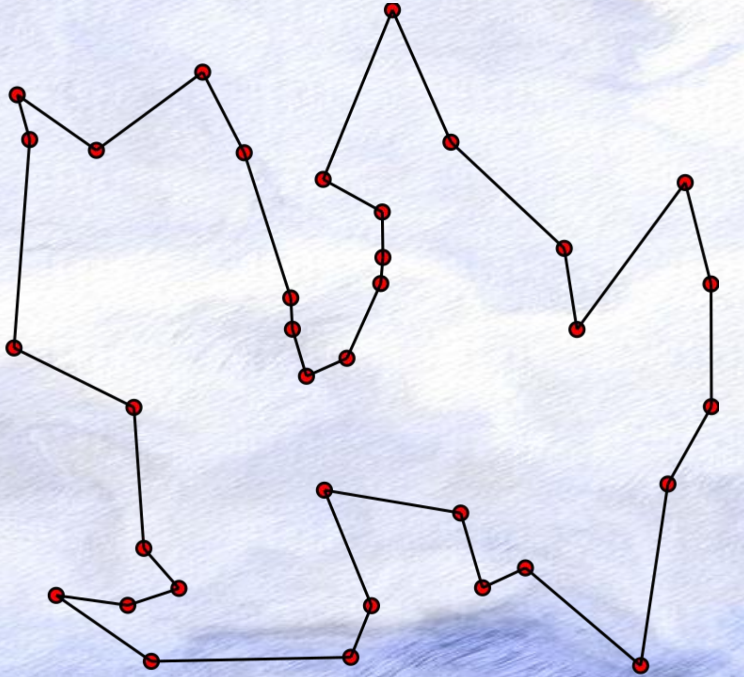
$$s.t.$$

$$\sum_{i=1} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$



Problema de Dimensionamento de Lotes

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}(bc_j \cdot b_{jt} + h_j \cdot i_{jt})$$

Subject to:

$$i_{jt-1} + b_{jt} + x_{jt} = i_{jt} + b_{jt-1} + D_{jt} \quad \forall j,t \mid j \in \Delta$$

$$i_{jt-1} + x_{jt} = i_{jt} + \sum_{k \in \delta(j)} r_{jk} \cdot x_{kt} \quad \forall j,t \mid j \notin \Delta$$

$$x_{jt} \le y_{jt} \cdot B_{jt} \quad \forall j,t$$

$$y_{jt} \le w_{ft} \quad \forall j,f,t \mid p_{jf} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{J} a_{mj} \cdot x_{jt} + \sum_{f=1}^{F} st_{mf} \cdot w_{ft} \le C_{mt} \quad \forall m,t$$

$$x_{jt}, i_{jt}, b_{jt} \ge 0, \quad y_{jt}, w_{ft} \in \{0,1\}$$

Restrições Factíveis

- Restrição Factível deve ser satisfeita pela solução, de forma geral temos:

$$f(x1,x2,...,xn) \leqq b$$

- Podemos fazer com que uma restrição seja sempre satisfeita:

$$f1(x1,x2,...,xn) - B.y \leqq b$$

y=1 ⇒ restrição sempre satisfeita pela solução ⇒ $f1(x1,x2,...,xn) \leqq b + B$

y=0 ⇒ restrição a ser satisfeita pela solução ⇒ $f(x1,x2,...,xn) \leqq b$

- Valor adequado de B deve ser ajustado.

Restrições Alternativas

- Considere duas restrições $f1(x1,x2,...,xn) \leqq b$ e $f2(x1,x2,...,xn) \leqq b$
- Apenas uma entre duas restrições é válida

$$f1(x1,x2,...,xn) - By \leqq b$$

$$f2(x1,x2,...,xn) - B(1-y) \leqq b$$

- $y=0 \Rightarrow f1(x1,x2,...,xn) \leqq b$ e $f2(x1,x2,...,xn) \leqq b+B$
- $y=1 \Rightarrow f1(x1,x2,...,xn) \leqq b+B$ e $f2(x1,x2,...,xn) \leqq b$

Restrições Condicionais

- Se $f1(x1,x2,...,xn)>b1$, então $f2(x1,x2,...,xn) \leqq b2$

$$f1(x1,x2,...,xn)>b1 \Rightarrow f2(x1,x2,...,xn) \leqq b2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f1(x1,x2,...,xn) \leqq b1 \vee f2(x1,x2,...,xn) \leqq b2$$

$$(A \Rightarrow B)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(A' \vee B)$$

- Podemos modelar como antes:

$$f1(x1,x2,...,xn) \leqq b1 \vee f2(x1,x2,...,xn) \leqq b2 \Leftrightarrow f1(x1,x2,...,xn) -By \leqq b$$

$$f2(x1,x2,...,xn) -B(1-y) \leqq b$$

k- Restrições Alternativas

- Precisamos satisfazer pelo menos k restrições

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) - B_j(1 - y_j) \le b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

$$\sum_{j=1}^{p} y_j \ge k,$$

$$y_j = 0 \quad \text{or} \quad 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

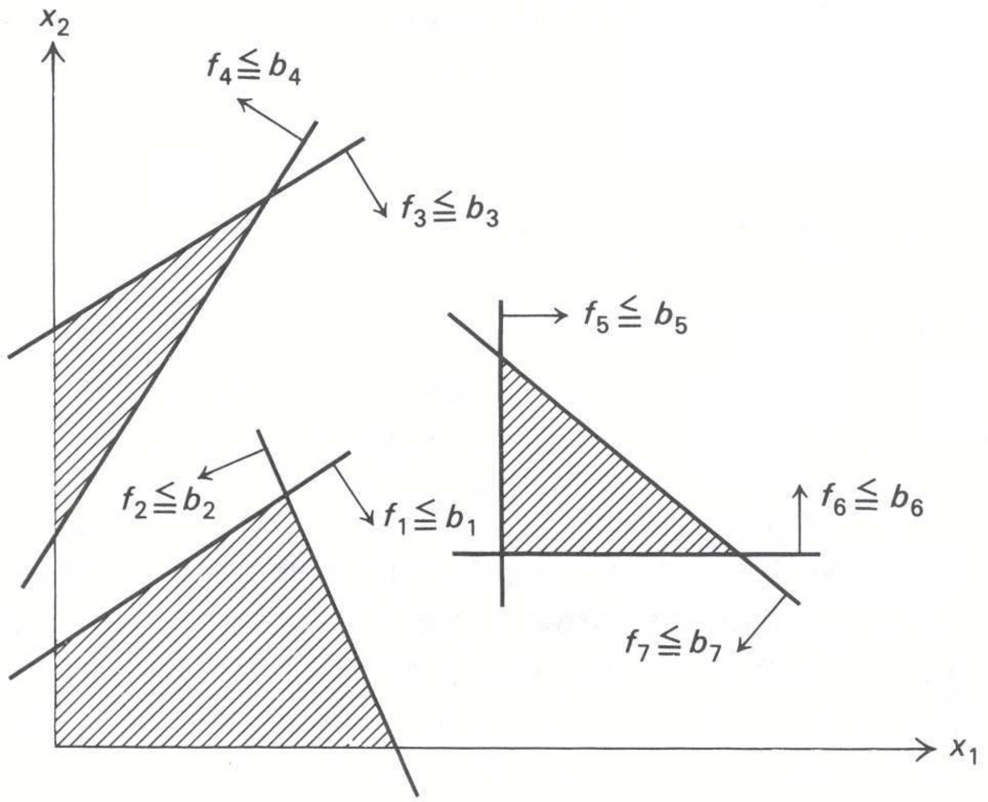
Alternativas compostas

- Definimos restrições que podem ativar ou não determinadas regiões

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2) - B_1 y_1 &\le b_1 \\
f_2(x_1, x_2) - B_2 y_1 &\le b_2 \\
f_3(x_1, x_2) - B_3 y_2 &\le b_3 \\
f_4(x_1, x_2) - B_4 y_2 &\le b_4 \\
f_5(x_1, x_2) - B_5 y_3 &\le b_5 \\
f_6(x_1, x_2) - B_6 y_3 &\le b_6 \\
f_7(x_1, x_2) - B_7 y_3 &\le b_7
\end{aligned}
$$

$$
y_1 + y_2 + y_3 \le 2,
$$

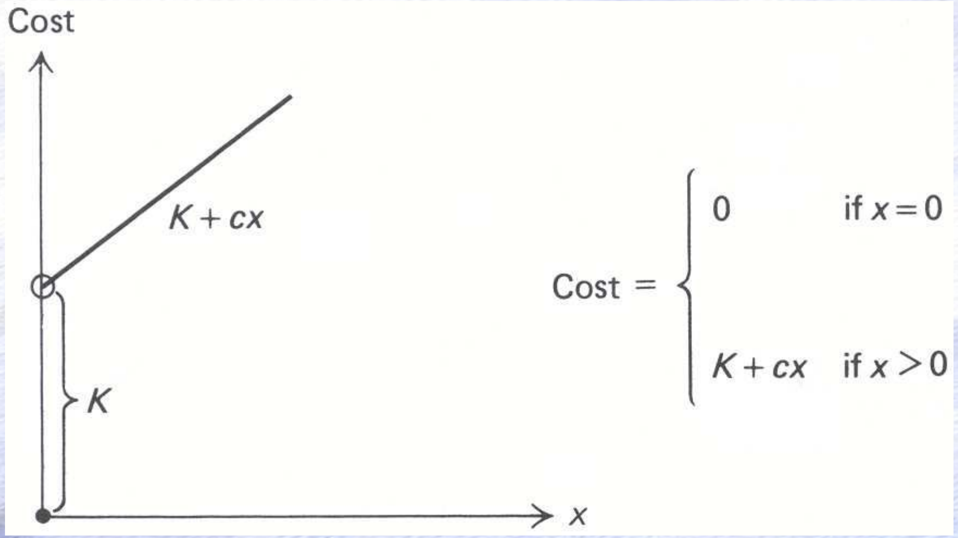
$$
x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0,
$$



Adaptado de [2]

Modelando Funções Não Lineares

Custo Fixo



Adaptado de [2]

$$
\begin{aligned}
&Min\ Ky + cx\\
&s.t.\\
&x \leq By\\
&x \geq 0\\
&y \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Linearização por Partes

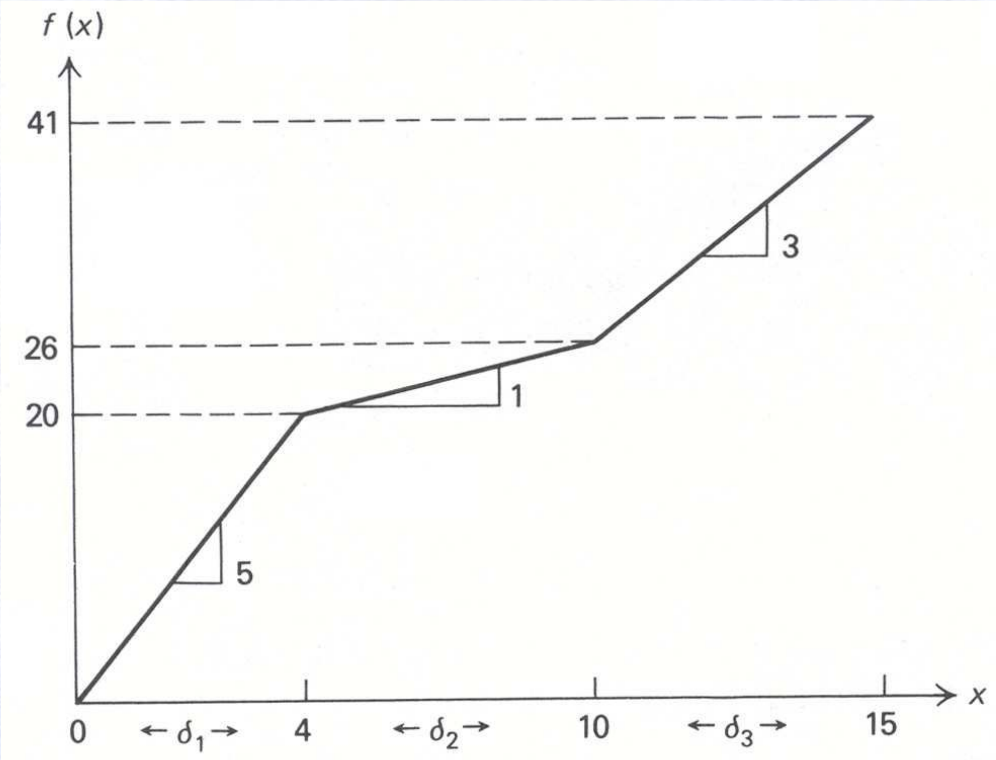
$$x = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

$$0 \leq \delta_1 \leq 4,$$

$$0 \leq \delta_2 \leq 6,$$

$$0 \leq \delta_3 \leq 5;$$

$$\text{Cost} = 5\delta_1 + \delta_2 + 3\delta_3$$



Adaptado de [2]

Linearização por Partes

$$x = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

$$0 \le \delta_1 \le 4,$$

$$0 \le \delta_2 \le 6,$$

$$0 \le \delta_3 \le 5;$$

$$\text{Cost} = 5\delta_1 + \delta_2 + 3\delta_3$$

$$\Rightarrow$$

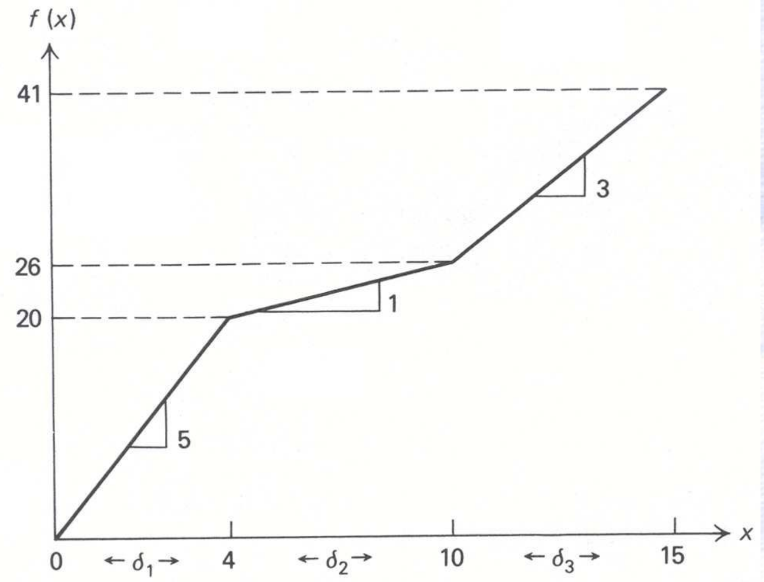
$$4w_1 \le \delta_1 \le 4,$$

$$6w_2 \le \delta_2 \le 6w_1$$

$$0 \le \delta_3 \le 5w_2$$

$$w_1 = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$w_2 = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$



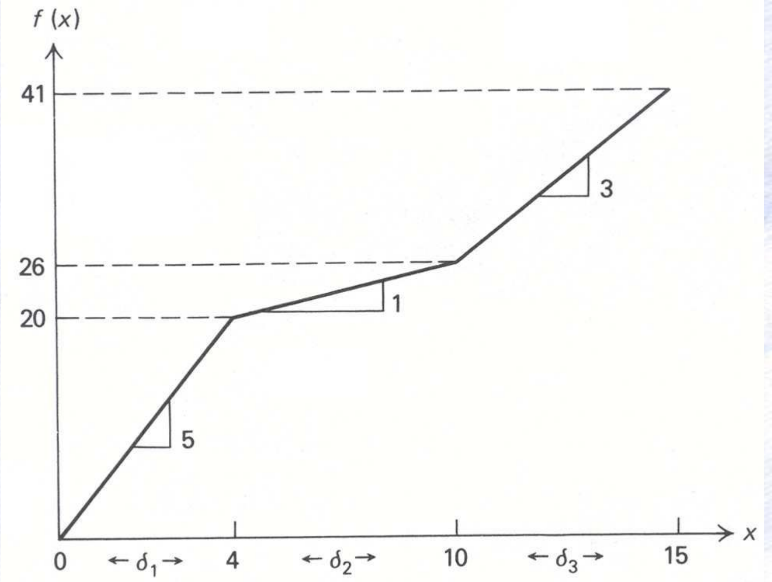
Adaptado de [2]

Linearização por Partes

$$4w_1 \leq \delta_1 \leq 4,$$
$$6w_2 \leq \delta_2 \leq 6w_1$$
$$0 \leq \delta_3 \leq 5w_2$$

$$w_1 = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$w_2 = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$



Adaptado de [2]

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x \leq 4 \quad \delta_2 = \delta_3 = 0$$
$$w_1 = 1, \quad w_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 \leq x \leq 10 \quad \delta_1 = 4 \quad \delta_3 = 0$$
$$w_1 = 1, \quad w_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 10 \leq x \leq 15 \quad \delta_1 = 4 \quad \delta_2 = 6$$

Linearização por Partes

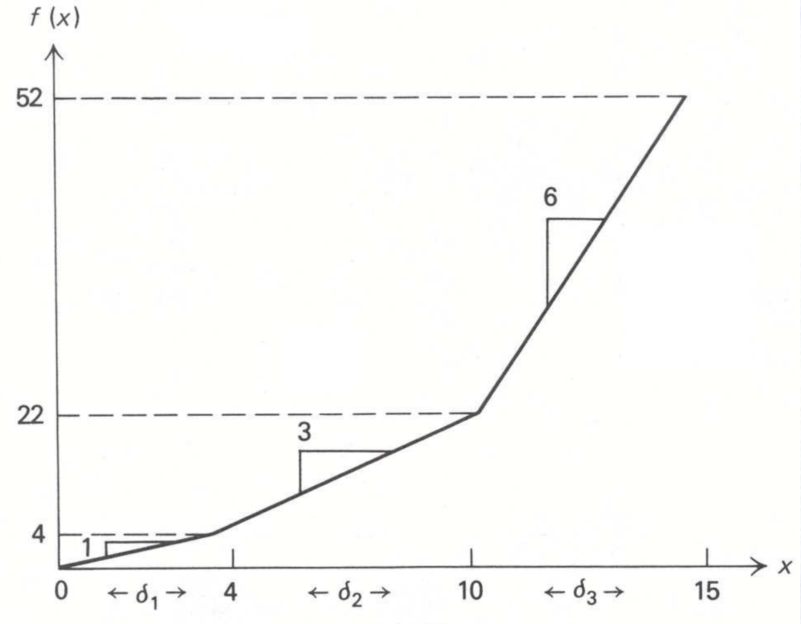
$$\textit{Min} \quad \text{Cost} = \delta_1 + 3\delta_2 + 6\delta_3$$

$$s.t.$$

$$0 \le \delta_1 \le 4$$

$$0 \le \delta_2 \le 6,$$

$$0 \le \delta_3 \le 5.$$



Adaptado de [2]

Referências

[1] Enciclopedia of Mathematics, https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Mathematical_programming.

[2] MIT - Integer Programming,

http://web.mit.edu/15.053/www/AMP-Chapter-09.pdf.