

## USO DA FERRAMENTA “ANÁLISE DE FOURIER”



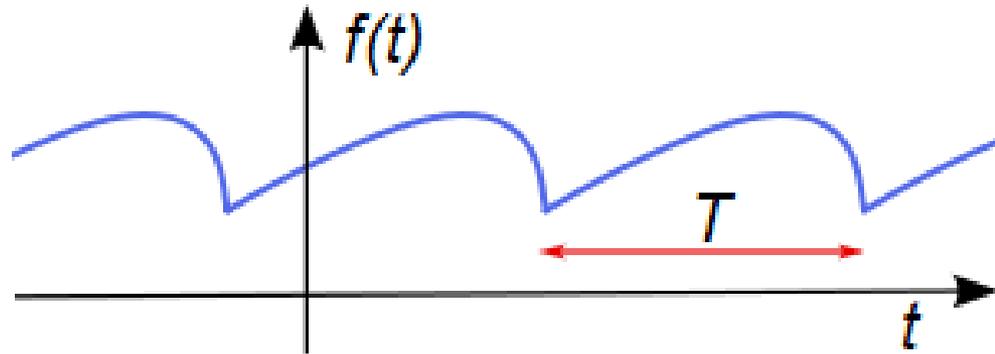
- REVISÃO: SÉRIES E TRANSFORMADA DE FOURIER
- MS EXCEL: FERRAMENTA “ANÁLISE DE FOURIER”
- MS EXCEL: FAST FOURIER TRANSFORM (FFT)
- MS EXCEL - FFT : EXEMPLOS DE APLICAÇÕES

# Funções periódicas: revisão

- Séries e Transformada de Fourier → aplicações:
  - Representação matemática de fenômenos periódicos
  - Solução de EDPs → problemas de valor inicial / de contorno

- Funções periódicas:

$$f(t + T) = f(t), T: \text{período}$$



- Síntese de Fourier
  - Adição de harmônicos para produzir uma função periódica
- Análise de Fourier
  - Decomposição de uma função periódica em seus harmônicos



# Síntese de Fourier: revisão

- Função periódica: série de Fourier (senos e cossenos)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \right]$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt$$

**Expressões  
de Euler para  
coeficientes  
de Fourier**



# Síntese de Fourier: revisão

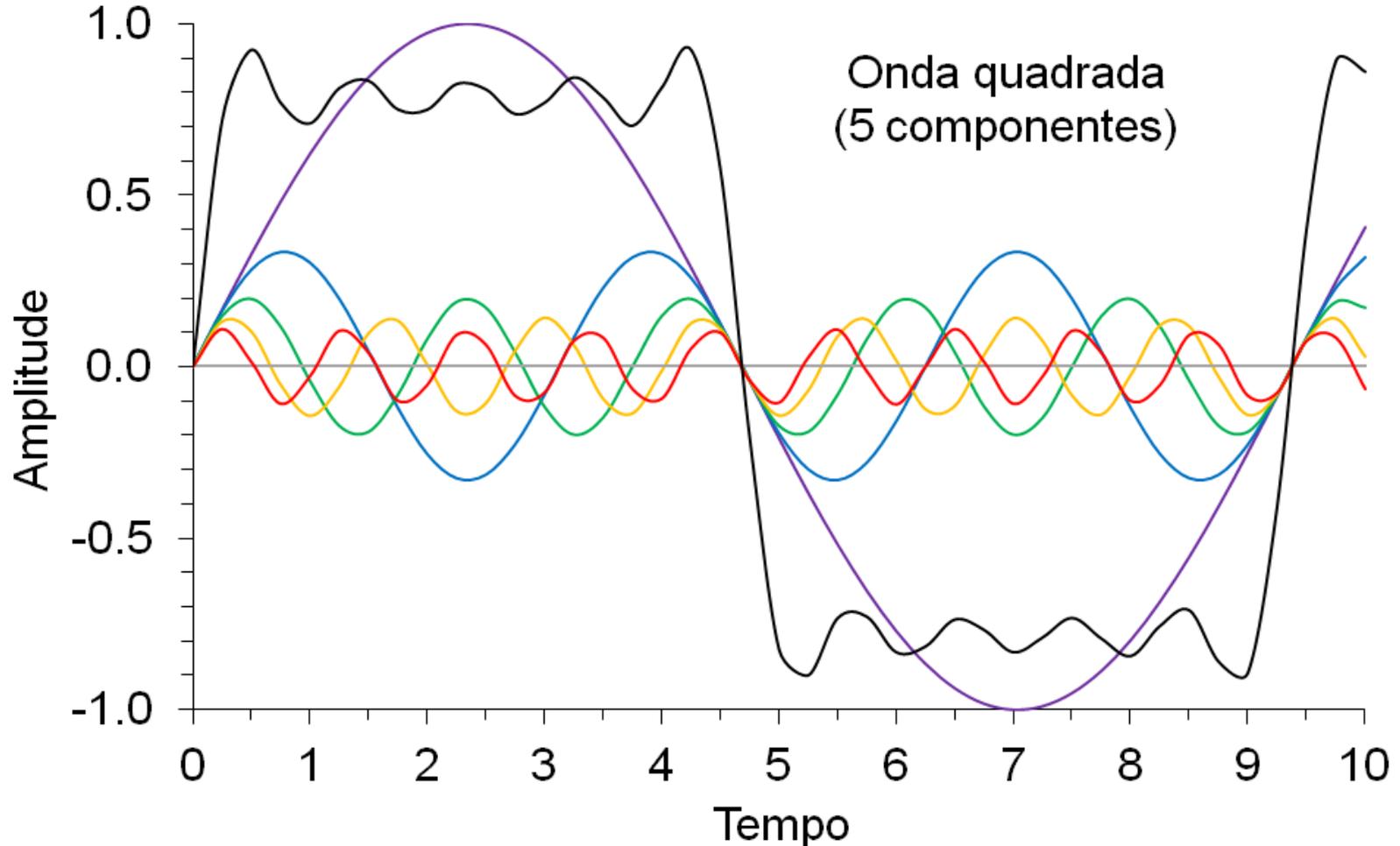
- Exemplo: série de Fourier p/ onda quadrada,  $T = 9.375$

Harmônico	$a_n$	$b_n$
0	0	0.00000
1	0	1.00000
2	0	0.00000
3	0	0.33333
4	0	0.00000
5	0	0.20000
6	0	0.00000
7	0	0.14286
8	0	0.00000
9	0	0.11111



# Síntese de Fourier: revisão

- Exemplo: série de Fourier p/ onda quadrada,  $T = 9.375$



# Transformada de Fourier: revisão

- Transformada (direta) de Fourier de uma função  $f(t)$ :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

- Função  $f(t)$  → sinal (forma de onda) no domínio do tempo
- Função  $F(\omega)$  → espectro do sinal no domínio das frequências

$\omega$ : frequência angular →  $\omega = 2\pi\varphi$  ← frequência:  $\varphi$

- Transformada inversa de Fourier de uma função  $F(\omega)$ :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{+i\omega t} d\omega$$



# Transformada de Fourier: revisão

- Exemplo: transformada de Fourier de pulso retangular


$$f(t) = \begin{cases} A & , \quad -\tau/2 \leq t \leq +\tau/2 \\ 0 & , \quad t < -\tau/2 \text{ ou } t > +\tau/2 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow \text{amplitude do pulso} \\ \tau \rightarrow \text{duração do pulso} \end{array} \right.$$

- Inserindo  $f(t)$  na definição da transformada de Fourier:

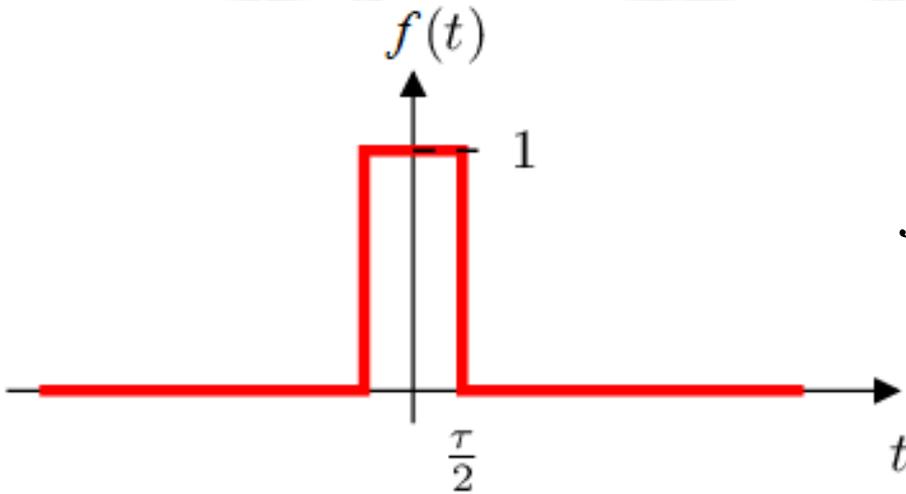
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \rightarrow \quad F(\omega) = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} A e^{-i\omega t} dt$$

- Resolvendo a integração e manipulando o resultado:

$$F(\omega) = \frac{A}{i\omega} \left( e^{i\omega\tau/2} - e^{-i\omega\tau/2} \right) \xrightarrow{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta} F(\omega) = A\tau \frac{\text{sen}(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)}$$

# Transformada de Fourier: revisão

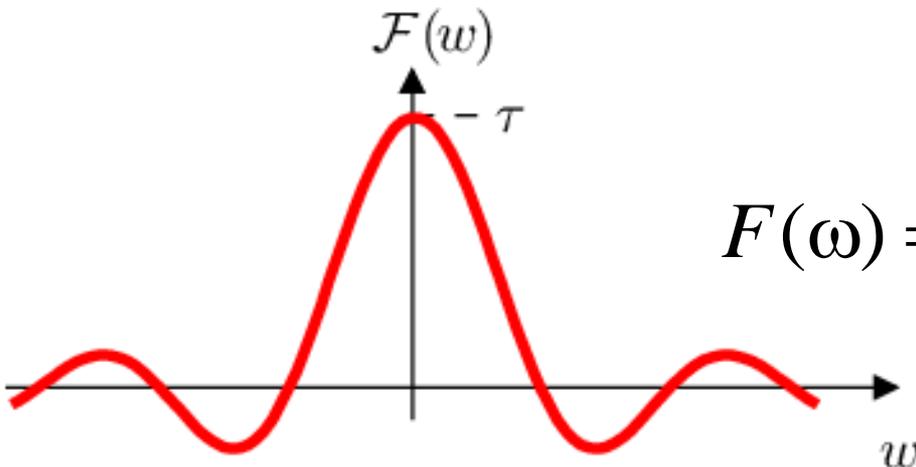
- Exemplo: transformada de Fourier de pulso retangular



$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad -\frac{\tau}{2} \leq t \leq +\frac{\tau}{2} \\ 0 & , \quad t < -\frac{\tau}{2} \text{ ou } t > +\frac{\tau}{2} \end{cases}$$

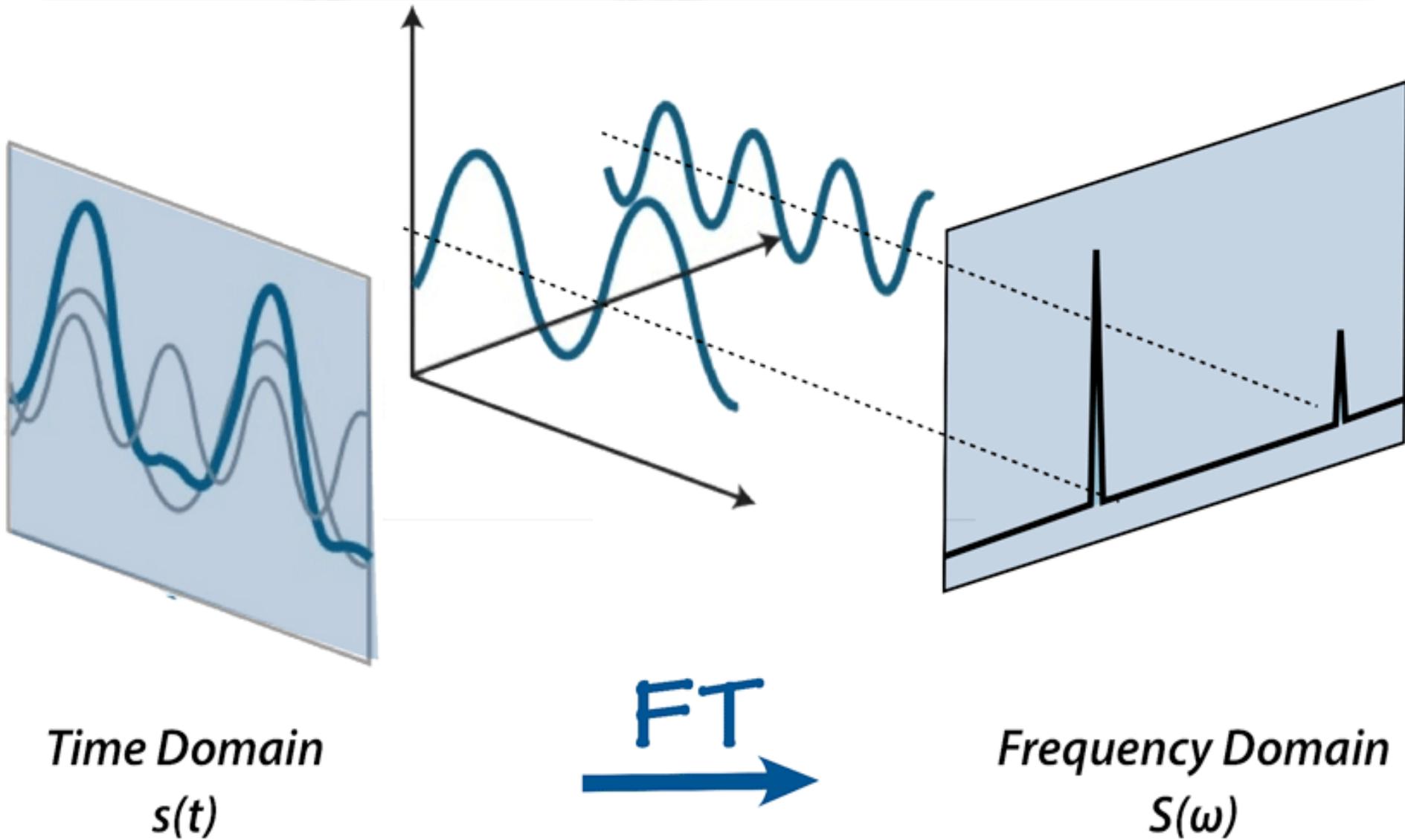
Transformada  
(direta)  
de Fourier

Transformada  
inversa  
de Fourier



$$F(\omega) = \frac{e^{i\omega\tau/2} - e^{-i\omega\tau/2}}{i\omega} = \tau \frac{\text{sen}(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)}$$

# Transformada de Fourier: revisão



# Análise de Fourier: suplemento Excel

Opções do Excel

?

×

Geral

Fórmulas

Revisão de Texto

Salvar

Idioma

Avançado

Personalizar Faixa de Opções

Barra de Ferramentas de Acesso Rápido

Suplementos

Central de Confiabilidade



Exiba e gerencie Suplementos do Microsoft Office.

## Suplementos

Nome	Local	Tipo
<b>Suplementos de Aplicativo Ativos</b>		
FoxitReader PDF Creator COM Add-in	C:\...ader\plugins\Ccreator\x86\FPC_ExcelAddin_x86.dll	Suplemento de COM
<b>Suplementos de Aplicativo Inativos</b>		
Cabeçalhos e Rodapés	C:\...Files (x86)\Microsoft Office\Office14\OFFRHD.DLL	Inspetor de Documento
Conteúdo Invisível	C:\...Files (x86)\Microsoft Office\Office14\OFFRHD.DLL	Inspetor de Documento
Dados XML Personalizados	C:\...Files (x86)\Microsoft Office\Office14\OFFRHD.DLL	Inspetor de Documento
Data (XML)	C:\...mon Files\Microsoft Shared\Smart Tag\MOFL.DLL	Ação
Ferramentas de Análise	C:\...soft Office\Office14\Library\Analysis\ANALYS32.XLL	Suplemento do Excel
Ferramentas de Análise - VBA	C:\...t Office\Office14\Library\Analysis\ATPVBAEN.XLAM	Suplemento do Excel
Ferramentas para o Euro	C:\...icrosoft Office\Office14\Library\EUROTOOL.XLAM	Suplemento do Excel
Linhas e Colunas Ocultas	C:\...Files (x86)\Microsoft Office\Office14\OFFRHD.DLL	Inspetor de Documento
Microsoft Actions Pane 3		Pacote de Expansão para XML
Planilhas Ocultas	C:\...Files (x86)\Microsoft Office\Office14\OFFRHD.DLL	Inspetor de Documento
Solver	C:\...soft Office\Office14\Library\SOLVER\SOLVER.XLAM	Suplemento do Excel

## Suplementos Relacionados a Documento

Sem Suplementos Relacionados a Documento

## Suplementos de Aplicativo Desabilitados

Sem Suplementos de Aplicativo Desabilitados

Suplemento: FoxitReader PDF Creator COM Add-in  
Editor: Foxit Software Incorporated  
Compatibilidade: Nenhuma informação de compatibilidade disponível  
Local: C:\Program Files (x86)\Foxit Software\Foxit Reader\plugins\Ccreator\x86\FPC\_ExcelAddin\_x86.dll  
Descrição: FoxitReader PDF Creator COM Add-in

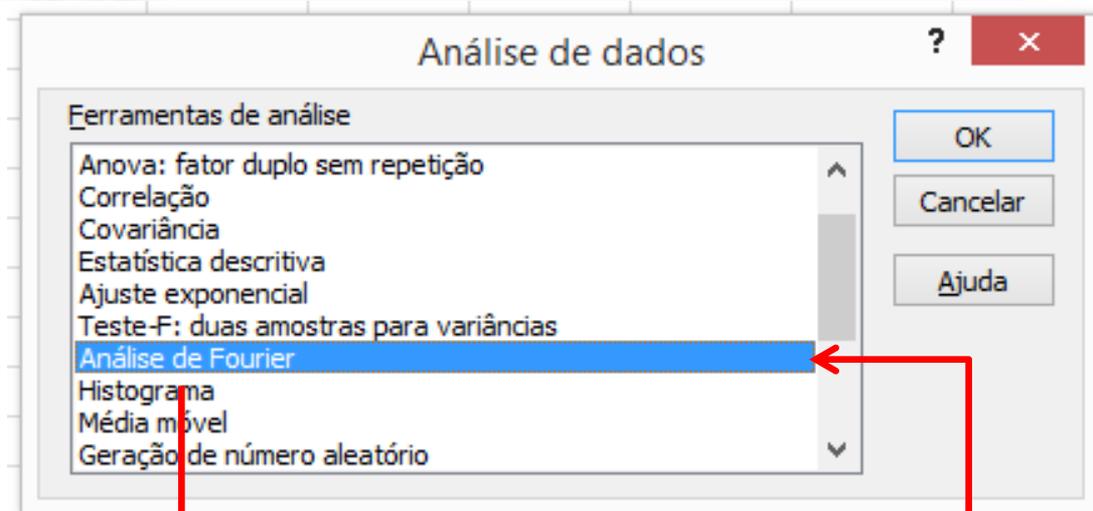
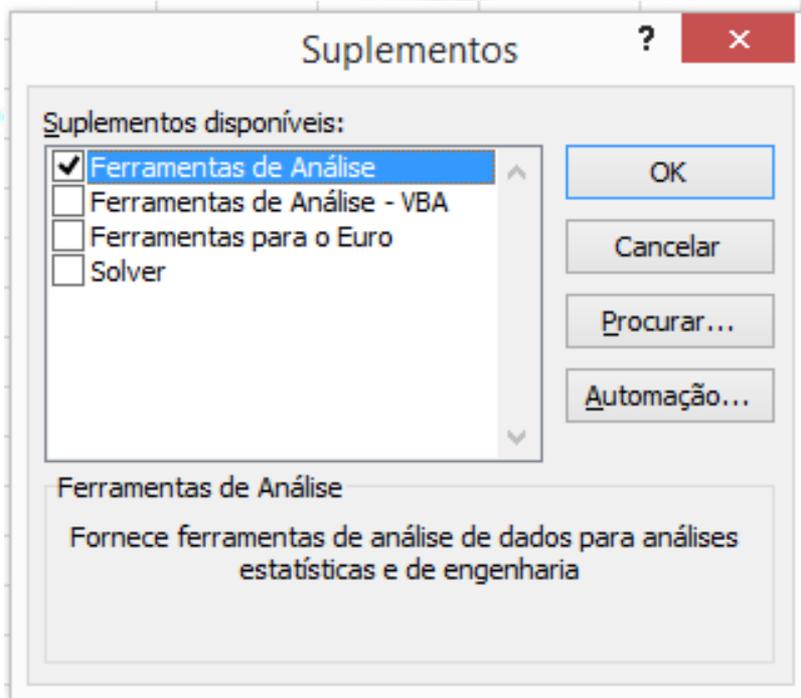
Gerenciar: Suplementos do Excel

Ir...

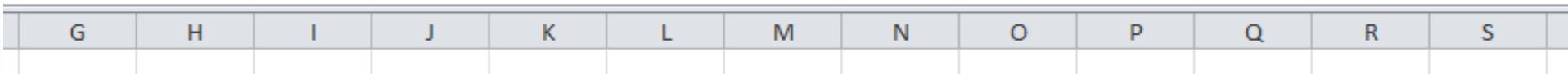
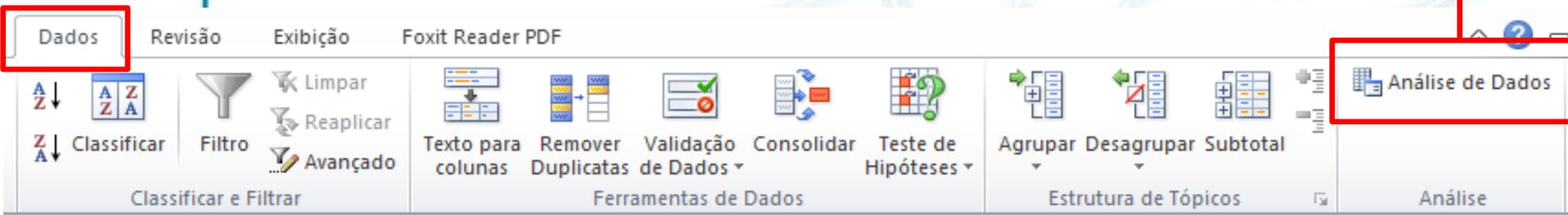
OK

Cancelar

# Análise de Fourier: acionamento



**FFT - Fast Fourier Transform**



# Análise de Fourier: preenchimento

Análise de Fourier

?

x

Entrada

Intervalo de entrada:

Rótulos da primeira coluna

Opções de saída

Intervalo de saída:

Nova planilha:

Nova pasta de trabalho

Inverso

OK

Cancelar

Ajuda

- Intervalo de entrada:
  - Predeterminar células que receberão dados (da função) de entrada
- Intervalo de saída:
  - Predeterminar células que receberão dados (da função) de saída

- Caixa de verificação “Inverso”:
  - Se desativada: FFT  $\rightarrow$  entrada =  $f(t)$  ; saída =  $F(\omega)$
  - Se ativada: IFFT  $\rightarrow$  entrada =  $F(\omega)$  ; saída =  $f(t)$

# Análise de Fourier: preenchimento

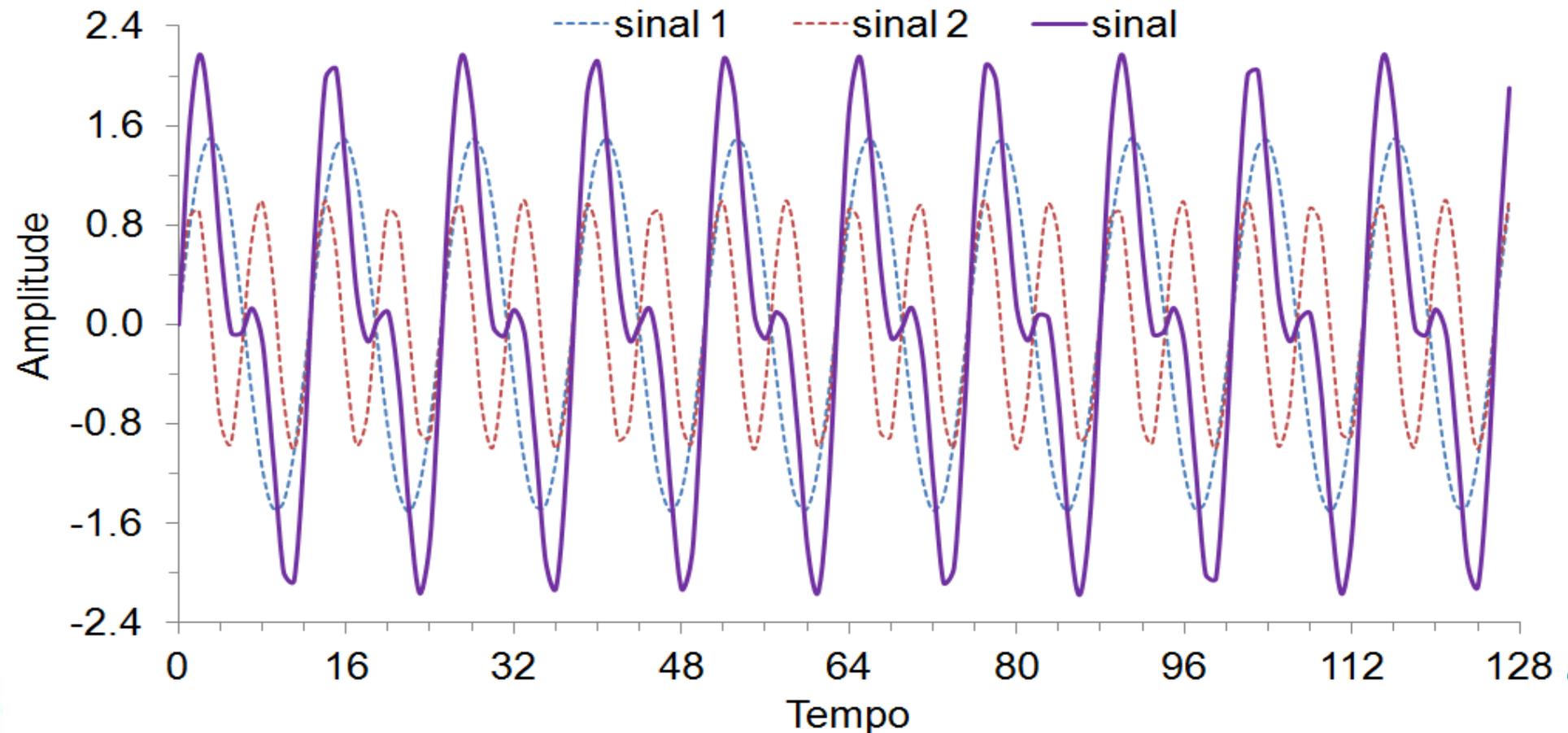
- Preenchimento do “Intervalo de entrada” → usuário
  - Quantidade de células deve ser potência inteira de 2 ( $= 2^n$ )  
↓  
Quantidade inferior à potência de 2 → adicionar “0” até obter  $2^n$
  - Dados de entrada são números reais puros
- Preenchimento do “Intervalo de saída” → ferramenta
  - Quantidade de células = idêntica à quantidade de entrada ( $2^n$ )
  - “Inverso” desativado → FFT gera resultados complexos (texto)
  - “Inverso” ativado → IFFT gera reais não-numéricos (texto)  
↓  
Converter em dados numéricos via função IMREAL



# Análise de Fourier: FFT - exemplo

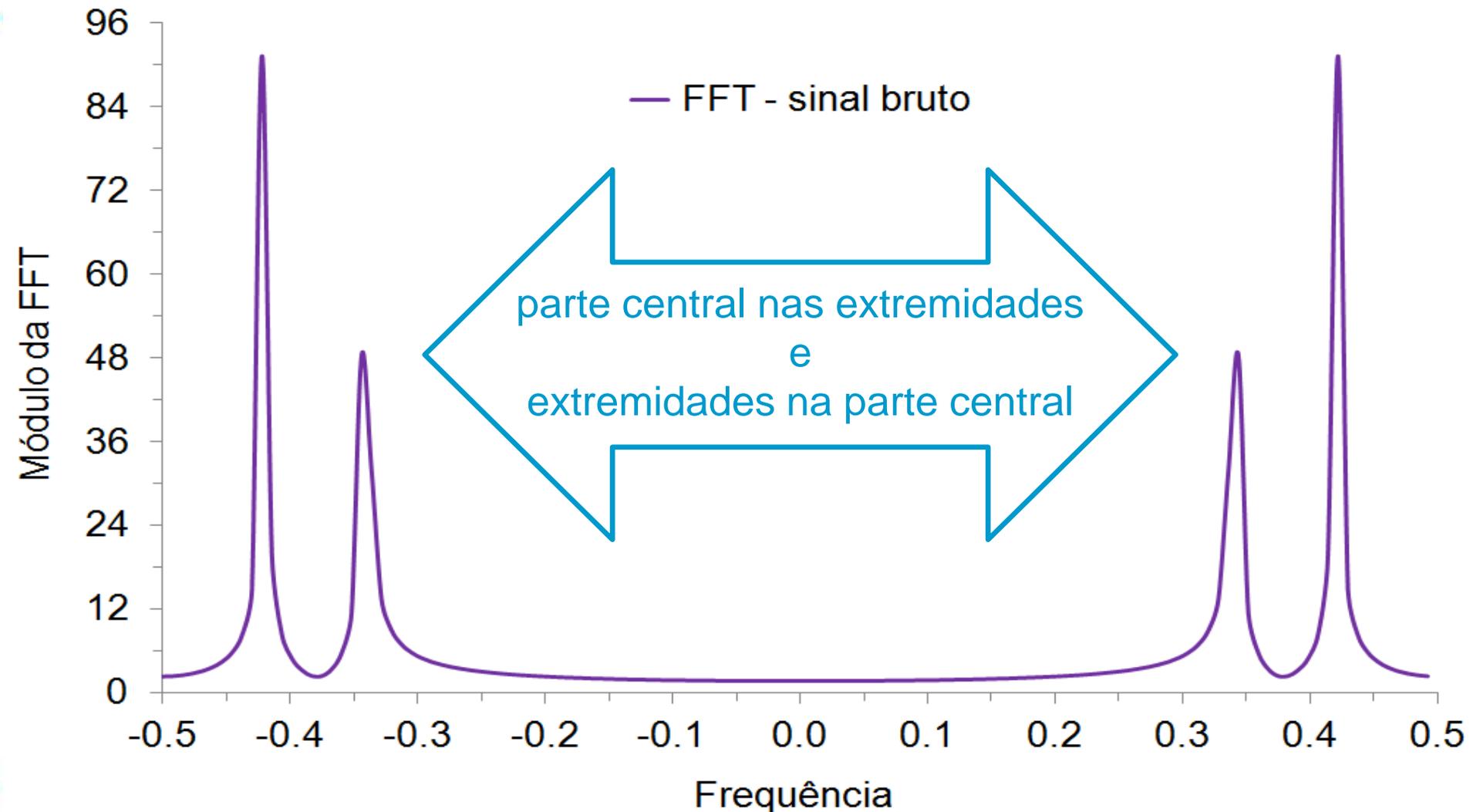
- Exemplo: sinal de entrada → soma de 2 senoides

$$f(t) = A_1 \text{sen}(\omega_1 t) + A_2 \text{sen}(\omega_2 t) ; A_1 = 1.5, A_2 = 1, \omega_1 = 0.5, \omega_2 = 1$$



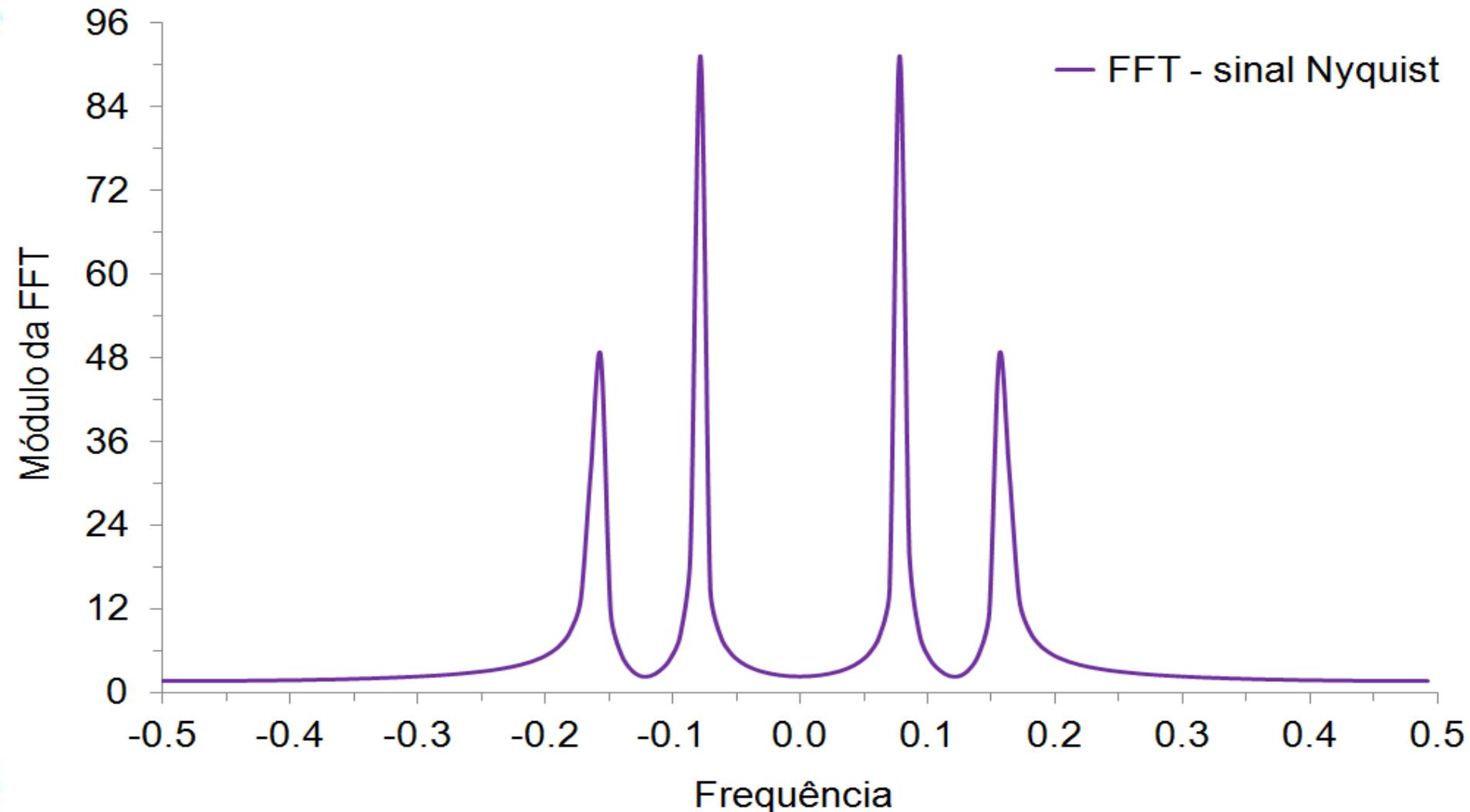
# Análise de Fourier: FFT - exemplo

- Transformada de Fourier (FFT) do sinal de entrada



# Análise de Fourier: FFT - exemplo

- Pré-processamento → defasagem de Nyquist: +1 -1



# Análise de Fourier: FFT - exemplo

- Vazamento de espectro
    - Início e interrupção repentinos da amostragem do sinal
- ↓
- Espalhamento de energia em frequências adjacentes
- Pré-processamento do sinal → janela de dados
    - Suavização do início e do fim da amostragem do sinal



Janela	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
Retangular	1	0	0	0
Hamming	0.540	-0.460	0	0
Von Hann	0.500	-0.500	0	0
Blackman-Harris	0.358	-0.488	0.141	-0.011
Kaiser-Bessel	0.402	-0.498	0.098	-0.001

$$w(n) = a_1 + a_2 \cos(2\pi n/N) + a_3 \cos(4\pi n/N) + a_4 \cos(6\pi n/N)$$

# Análise de Fourier: FFT - exemplo

- Pré-processamento do sinal → janela de dados

