PRO3384 - Finanças Quantitativas

Segundo semestre 2023

Modelos de equilíbrio

Hipóteses

- Todos os investidores empregam o modelo de média variância para tomar decisão
- Todos concordam com a distribuição de probabilidades, a média e a covariância
- Existe uma única taxa livre de risco

Modelos de equilíbrio

Nestas condições

- Todos os investidores irão construir a sua carteira a partir de um único fundo de ativos com risco e o ativo livre de risco (pois todos concordam com a fronteira eficiente)
- O apetite por risco determina a composição

Modelos de equilíbrio

Em condições de equilíbrio todos os ativos do mercado devem estar presentes no fundo (não há interesse em ativo que esteja fora dele)

Investidor	1		(J)
Riqueza inicial ($)	$V_0^{(1)}$	...	$V_0^{(J)}$
% alocado aos ativos com risco	$\theta^{(1)}$	...	$\theta^{(J)}$
Valor ($) alocado ao portfolio com risco (P)	$\theta^{(1)} V_0^{(1)}$	...	$\theta^{(J)} V_0^{(J)}$
Valor ($) alocado ao ativo (K) do portfolio (P)	$\omega_K^{(P)}\theta^{(1)} V_0^{(1)}$	...	$\omega_K^{(P)} \theta^{(J)} V_0^{(J)}$

Modelos de equilíbrio

Portfólio de mercado (definição)

$$\omega_K^{(M)} = \frac{\text{Total (\$) investido no ativo K}}{\text{Total (\$) investido em ativos com risco}}$$

Numerador

$$\omega_K^{(P)}\theta^{(1)}V_0^{(1)} + \omega_K^{(P)}\theta^{(2)}V_0^{(2)} + \cdots + \omega_K^{(P)}\theta^{(J)}V_0^{(J)}$$
$$= \omega_K^{(P)} \times \left[\theta^{(1)}V_0^{(1)} + \theta^{(2)}V_0^{(2)} + \cdots + \theta^{(J)}V_0^{(J)}\right]$$

Denominador

$$\theta^{(1)}V_0^{(1)} + \theta^{(2)}V_0^{(2)} + \cdots + \theta^{(J)}V_0^{(J)}$$

Logo:

$$\boxed{\omega_K^{(M)} = \omega_K^{(P)}}$$

Modelos de equilíbrio

Consequência

Se todos os investidores acreditam no modelo de média variância e possuem a mesma expectativa quanto à distribuição de retornos, então a melhor decisão será investir no ativo livre de risco e no portfólio de mercado

Portanto, não é necessário estimar os parâmetros!!!!!

Modelos de equilíbrio

Argumento baseado em equilíbrio

Demanda ativo > (<) Oferta ativo

↓

Aumento (redução) preço

↓

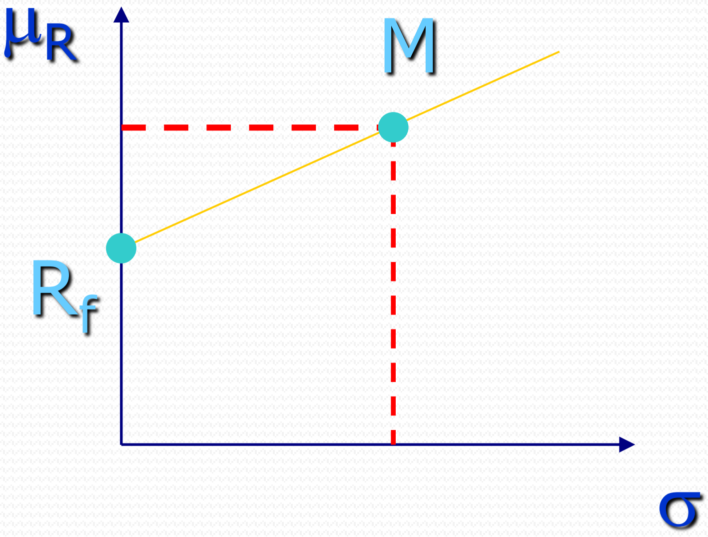
Alteração retornos (distribuição)

↓

Outra fronteira eficiente

Capital market line (linha de mercado)

Fronteira eficiente (= semi reta)



$$\boxed{R = R_f + \left(\frac{R_m - R_F}{\sigma_M} \right) \sigma}$$

Preço do risco

Capital market line

Exemplo

Parâmetros de mercado $r_f = 18\%$ a.a.

$r_m = 25\%$ a.a. $\sigma_m = 40\%$ a.a.

Objetivo: partir de \$1.000,00 e chegar a \$5.000,00 em 5 anos

Rentabilidade desejada:

$5000 = 1000 \times (1 + R)^5 \qquad R = 0,3797$

$$0,3797 = 0,18 + \left(\frac{0,25 - 0,18}{0,40}\right)\sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma = 1,1413 = 114,13\%$$

Alto risco!

Capital market line

Exemplo – Análise de investimento

Investimento com retorno esperado anual $\mu = 20\%$ e $\sigma = 30\%$

Taxa livre de risco $r_f = 18\%$

Carteira de mercado

Retorno esperado $r_m = 25\%$

Risco $\sigma_m = 40\%$

- Se σ = 30% o retorno esperado deveria ser

$$\mu = 0{,}18 + \left(\frac{0{,}25 - 0{,}18}{0{,}40}\right)0{,}30 = 23{,}5\%$$

Ou seja, o retorno está abaixo do esperado!

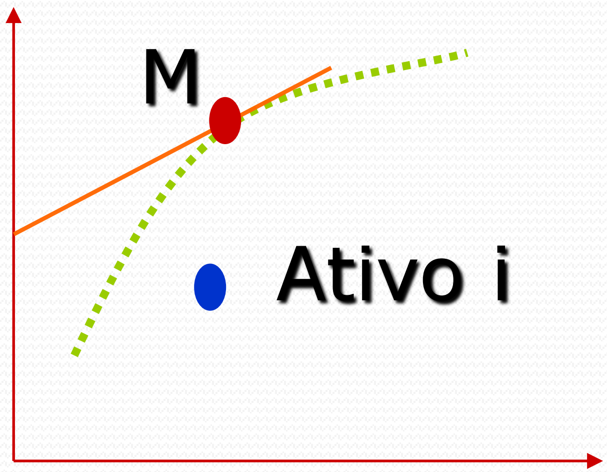
- Capital Market Line (CML) relaciona o excesso de retorno esperado de um portfolio eficiente com o seu risco (aplica-se a portfolios eficientes)

- Security Market Line (SML) relaciona o excesso de retorno de um ativo à inclinação da sua regressão com portfolio de mercado (aplica-se a todos os ativos)

CAPM – Capital Asset Pricing Model

Objetivo: Análise do retorno do ativo i

Carteira: ativo i e carteira de mercado



$$\begin{bmatrix} \alpha \\ (1-\alpha) \end{bmatrix}$$

Ativo i

Carteira de mercado

CAPM – Capital Asset Pricing Model

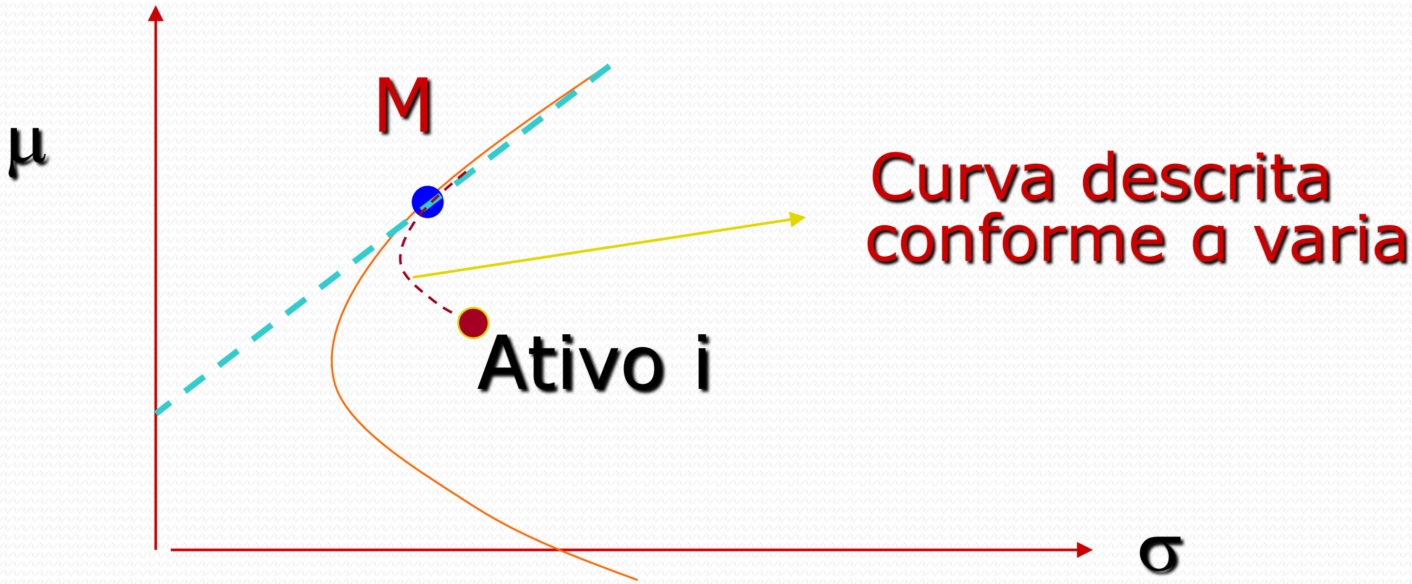
Se o portfolio de mercado M é eficiente, o retorno esperado de qualquer ativo (i) satisfaz:

onde

$$R_i = R_f + \beta_i \sigma_{im}$$

$$\beta_i = \frac{R_m - R_F}{\sigma_m^2}$$

CAPM – Capital Asset Pricing Model



Retorno $$R_\alpha = \alpha \overline{R}_i + (1-\alpha) R_m$$

Risco $$\sigma_\alpha = \left(\alpha^2 \sigma_i^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{im} + (1-\alpha)^2 \sigma_m^2\right)^{1/2}$$

α=0 ➡ curva tangencia a linha de mercado

CAPM – Capital Asset Pricing Model

Derivadas

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial \alpha} = \overline{R}_i - R_m \qquad \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} = \frac{\alpha\sigma_i^2 + (1-2\alpha)\sigma_{im} + (\alpha-1)\sigma_m^2}{\sigma_\alpha}$$

Do cálculo

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial \sigma_\alpha} = \frac{\partial R_\alpha / \partial \alpha}{\partial \sigma_\alpha / \partial \alpha}$$

Substituindo e calculando para α = 0

$$\left.\frac{\partial R_\alpha}{\partial \sigma_\alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{(R_i - R_m)\sigma_m}{\sigma_{im} - \sigma_m^2}$$

CAPM – Capital Asset Pricing Model

Para α = o este valor coincide com a inclinação da linha de mercado

$$\frac{(R_i - R_m)\sigma_m}{\sigma_{im} - \sigma_m^2} = \frac{R_m - R_f}{\sigma_m}$$

Segue que

$$R_i = R_f + \left(\frac{R_m - R_F}{\sigma_m^2} \right) \sigma_{im}$$

CAPM – Capital Asset Pricing Model

Ou seja,

$$R_i = R_f + \beta_i (R_m - R_f)$$

Com

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \longrightarrow \text{Beta do ativo}$$

CAPM – Capital Asset Pricing Model

Assim provamos: $$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$$

Se a carteira de mercado é eficiente então o retorno esperado do ativo satisfaz:

$$R_i = R_f + \beta_i \underbrace{(R_m - R_f)}_{\text{Taxa de excesso de retorno esperado}}$$

CAPM – Capital Asset Pricing Model

Exemplo

Investimento com $\mu_m = 25\%$ $\sigma_m = 40\%$ $\sigma_{im} = 0{,}8$
Taxa livre de risco $r_f = 18\%$

Beta do ativo $\beta_i = \frac{0.3}{0.4^2} 1.87$

Valor esperado

$$\mu = 0{,}18 + 1{,}87(0{,}25 - 0{,}18) = 31{,}09\%$$

CAPM – Capital Asset Pricing Model

Beta de uma carteira

Carteira $\begin{bmatrix} \omega_1 & \cdots & \omega_n \end{bmatrix}^T$

Retorno da carteira $R_C = \sum \omega_i R_i$

Logo $\text{cov}(R_C, R_m) = \text{cov}(\sum \omega_i R_i, R_m) = \sum \omega_i \text{ cov}(R_i, R_m)$

Portanto

$$\boxed{\beta_C = \frac{\text{cov}(R_C, R_m)}{\sigma_m^2} = \frac{\sum \omega_i \text{ cov}(R_i, R_m)}{\sigma_m^2} = \sum \omega_i \beta_i}$$