Teste 2-
SME0800-Probabilidade I

Aluno:

N^0 USP:

1. Um míssil encomendado à firma Tiro&Queda Ltda acerta e destrói determinado alvo inimigo com uma probabilidade de 0,9. Num ataque surpresa, quantos mísseis deverão ser disparados simultaneamente para que a probabilidade de destruir aquele tipo de alvo seja, pelo menos, de 90%

2. Considere o experimento aleatório, escolher, ao acaso, um ponto do circulo de raio 1 cm centrado na origem. Seja X a variável aleatório que representa a distância do ponto escolhido e a origem. Determine:
   (a) o domínio e contradomínio da variável aleatória X.
   (b) $F_X(x)$, $f_X(x)$ e sua respectiva representação gráfica.
   (c) a probabilidade que a distância ente o ponto escolhido e a origem esteja entre 0,5 cm e 1,5 cm.

3. A variável aleatória X tem a seguinte função de distribuição acumulada

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/4, & 1 \leq x < 2 \\ 3/4, & 2 \leq x < 3 \\ 1 < & x \geq 3. \end{cases}$$

   (a) Determinar: $P[X < 2]$, $P[X > 1,5|X \leq 2]$
   (b) Obtenha $f_X(x)$.

4. Considere a seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} kx, & 0 \leq x < 2, \\ k(4-x), & 2 \leq x \leq 4, . \\ 0, \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

   (a) Ache o valor de k para o qual $f_X(.)$ seja, de fato, uma função de densidade de probabilidade.
   (b) Ache a função de distribuição acumulada de X.

Solução:

1. Supor que tem-se n mísseis e seja o evento A_i : "o i-ésimo míssil acerta e destrói o alvo"e $\bar{A}_i$: "o i-ésimo míssil não acerta nem destrói o alvo". Do enunciado tem-se Os eventos são independentes e $P[A_i] = 0.9$ e $P[\bar{A}] = 0.1$ $(i = 1, \ldots, n)$. Para destruir o alvo, pelo menos uns dos mísseis tem que acertar o alvo e esse evento é denotado por $D = \cup_{i=1}^n A_i$. Daí tem-se

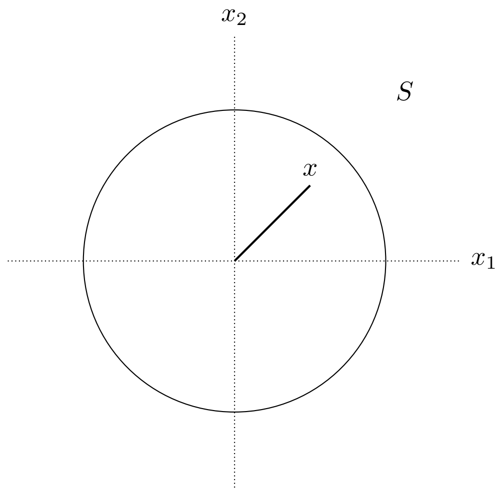
$$P[D] = 1 - P[\bar{D}] = 1 - P[\cap_{i=1}^n \bar{A}_i] \overset{*}{=\!=} 1 - \prod_{i=1}^n P[\bar{A}_i] = 1 - (0,1)^n$$

$*$ os eventos A_is são eventos independentes então os complementares ($\bar{A}_i$s) são independentes. Do enunciado $P[D] \geq 0,9$. Dai tem-se $(0,1)^n \leq 0,1$, então $n = 1$.

(2a) O experimento aleatório consiste em escolher um ponto no circulo de raio 1 centrado na origem. Então o espaço amostral é

$$S = \{(x_1, x_2) \in R : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

Seja a v.a. X : distância do ponto escolhido a origem.



Note que o ponto amostral nesse experimente são pares ordenados, ou,seja, $w = (x_1, x_2)$. Daí $X(w) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = x \in [0, 1]$ representa distância do ponto escolhido a origem (veja a Figura). Portanto, o contradomínio da v.a. X é $R_X = \{x \in R^+ : 0 \leq x \leq 1\}$

(2b) Por definição a função de distribuição acumulada (FDA) da v.a X

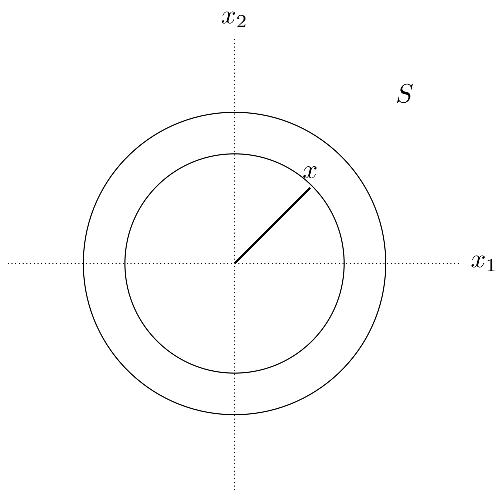
$$F_X(x) = P[X \leq x], \forall x \in R.$$

A probabilidade do evento $[X \leq x]$, será calculado considerando a definição geométrica de probabilidades visto en sala de aula.

(i) Se $x < 0$, então $F_x(x) = P[X \leq x] = P[\phi] = 0$

(ii) Se $0 \leq x < 1$ então

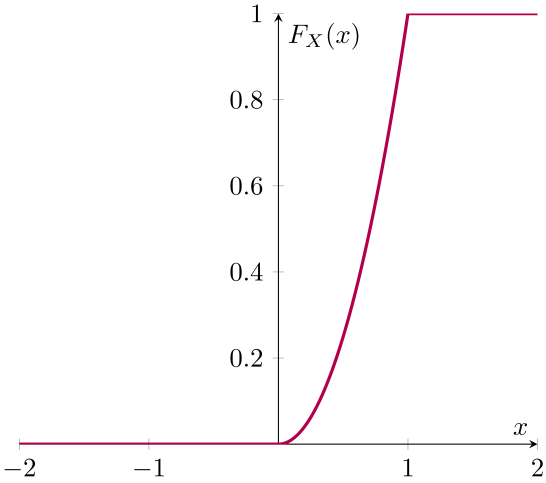
$$F_x(x) = P[X \leq x] = \frac{\text{Área do circulo de raio } x}{\text{Área do circulo de raio } 1} = \frac{\pi x^2}{\pi \times 1} = x^2$$



(iii) Se $x \geq 1$ então $F_X(x) = P[X \leq x] = \frac{\pi \times 1^2}{\pi \times 1^2} = 1$.

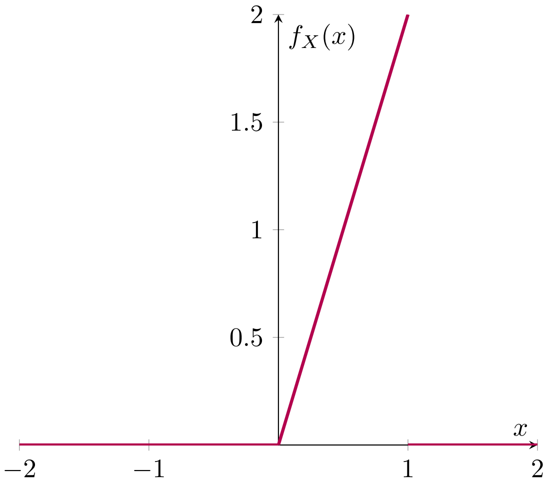
De (i)-(iii) tem-se

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & , x \geq 1 \end{cases}$$



A função de densidade de probabilidade é $f_x(x) = F'_X(x)$,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & , c.c \end{cases}$$



(2c) O evento $A = [0,5 \leq X \leq 1,5]$,

$$P[A] = [0,5 \leq X \leq 1,5] = P[X \leq 1,5] - P[X \leq 0,5] = F_X(1,5) - F_X(0,5) = 1 = 0,5^2 = 0,75.$$

(3a) Note que o evento $[X \leq 2] = [X < 2] \cup [X = 2]$ (união de eventos disjuntos), pelo axioma de Kolgomorov tem-se

$$P[X \leq 2] = P[X < 2] - P[X = 2], \Longrightarrow P[X < 2] = F_X(2) - P[X = 2] = F_X(2) - (F_X(2) - F_X(1)) = F_X(1) = 1/4.$$

Sejam os eventos $A = [X > 1,5]$, $B = [X \leq 2]$, $A \cap B = [1,5 < X \leq 2]$ com $P[B] = F_X(2) = 3/4$, $P[A \cap B] = P[X \leq 2] - P[X < 1.5] = F_X(2) - F_X(1.5) = 3/4 - 1/4 = 1/2$.

$$P[X > 1,5 | X \leq 2] = P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{1/2}{3/4} = 2/3.$$

(3b) Note que o suporte de X, $R_X = \{1, 2, 3\}$, daí tem-se $P[X = x] = F_X(x) - \lim_{h \longrightarrow 0} F_X(x - h)$, para $h > 0$.

Dai

$$f_X(x) = P[X = x] = \begin{cases} 1/4, & x = 1 \\ 1/2, & x = 2 \\ 1/4, & x = 3 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

(4a) Deve-se verificar as 2 condições (i) $f_X(x) > 0$ para $x \in R_X$ e zero caso contrário e (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$. De (i) $k > 0$ e de (ii) tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_0^2 kxdx + \int_2^4 k(4-k)dx = 1, \Longrightarrow k = 1/4$$

Portanto,

$$f_X(x) = \begin{cases} x/4, & 0 \leq x < 2, \\ (4-x)/4, & 2 \leq x \leq 4, \\ 0, \quad \text{caso contrário} & \end{cases}.$$

(4b) Da definição da FDA de uma v.a. X com f.d.p. $f_X(x)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du, \forall x \in R,$$

tem-se

(i) Para $x < 0$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \int_{-\infty}^{x} 0du = 0$

(ii) Para $0 \leq x < 2$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_0^x \frac{u}{4}du = \frac{x^2}{8}$

(iii) Para $2 \leq x < 4$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_0^2 \frac{u}{4}du + \int_2^x \frac{4-x}{4} = x - \frac{x^2}{8} - 1$

(iv) Para $x \geq 4$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_0^2 \frac{u}{4}du + \int_2^4 \frac{4-x}{4} + \int_4^x 0du = 1.$

De (i)-(iv) tem-se

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{8}, & 0 \leq x < 2, \\ x - \frac{x^2}{8} - 1, & 2 \leq x \leq 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}.$$