## PQI-5884 - Programação Inteira Mista aplicada à Otimização de Processos
## 3º Período 2023

| Data | Atividade | Conteúdo |
|---|---|---|
| 14/set | Aula 1 | Introdução, formulação, classes, representação |
| 21/set | Aula 2 | Condições de otimalidade |
| **28/set** | **Aula 3** | **Condições KKT, multiplicadores** |
| 06/out* | Aula 4 | Otimização irrestrita |
| 19/out | Aula 5 | LP |
| 26/out | Aula 6 | NLP |
| 09/out | Aula 7 | MILP |
| 16/nov | Aula 8 | MILP, problemas clássicos |
| 23/nov | Aula 9 | MILP, problema de scheduling |
| 30/nov | Aula 10 | MINLP, problema de síntese |
| 07/dez | - | Apresentações |

## Exemplo LP

São disponíveis $j$ = 1, 2, ... $m$ tipos de alimentos, cada um com um conteúdo especifico $q_{i,j}$ do nutriente $i$ = 1, 2, ... $n$ (unidade-$i$/unidade-$j$) e um custo específico $c_j$ (R$/unidade-$j$).

Variáveis: $X_j$ = quantidade diária a ser ingerida do alimento $j$ (unidade-$j$/dia)

Restrições: quantidade diária ingerida do nutriente $i$ deve ser superior ao limite $b_i^{low}$ e inferior ao limite $b_i^{up}$ (unidade-$i$/dia)

Como formular uma dieta que atenda os requisitos diários de nutrientes com mínimo custo?

Formulação:

min $\quad Custo = \sum_{j=1}^{m} c_j . X_j$

s.a.:

$$\sum_{j=1}^{m} q_{i,j} . X_j \geq b_i^{low} \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

$$\sum_{j=1}^{m} q_{i,j} . X_j \leq b_i^{up} \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

$$X_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots m$$

$$X_j \in \Re^1 \qquad j = 1, 2, \ldots m$$

OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE E DESIGUALDADE

Seja o problema de otimização:

| | |
|---|---|
| min | $f(\underline{x})$ |
| sujeito a: | $\underline{h}_{m\times 1}(\underline{x}) = 0$ |
| | $\underline{g}_{r\times 1}(\underline{x}) \leq 0$ |
| | $\underline{x} \in \Re^n$ |

Condições KKT (Karush-Kuhn-Tucker)

1- Dependência linear dos gradientes

$$\nabla f(\underline{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j . \nabla h_j(\underline{x}) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j . \nabla g_j(\underline{x}) = 0$$

$\lambda_j$ : multiplicadores de Lagrange
$\mu_j$ : multiplicadores de Kuhn-Tucker

2 - Viabilidade das restrições

$h_j(\underline{x}) = 0 \qquad 1 \leq j \leq m$
$g_j(\underline{x}) \leq 0 \qquad 1 \leq j \leq r$

3 - Condições de complementaridade

$\mu_j . g_j(\underline{x}) = 0 \qquad 1 \leq j \leq r$
$\mu_j \geq 0$

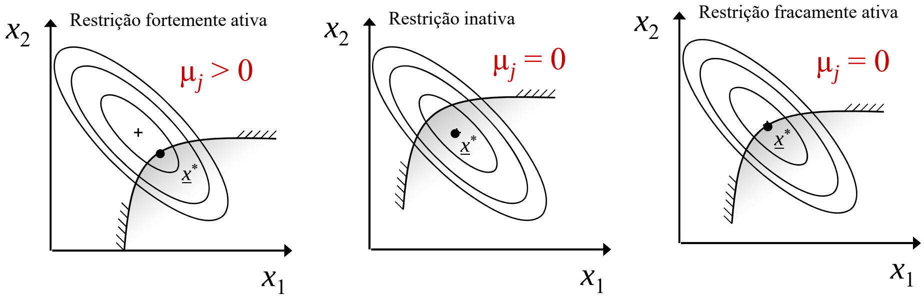
sistema não-linear de
$n + m + r$ equações e variáveis

Solução:
ponto KKT (mínimo local)

verificar convexidade

4

Significado de multiplicadores de Kuhn-Tucker




$$\nabla f\left(\underline{x}^*\right) + \mu.\nabla g\left(\underline{x}^*\right) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\partial f^* + \mu.\partial g = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_j = -\left(\frac{\partial f^*}{\partial g_j}\right)_{\partial g_k = 0, k \neq j}$$

OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE E DESIGUALDADE

EXEMPLO

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\underline{x}) = -4.x_1 - x_2 + 50 \\ \text{s.a.:} \quad & g_1:\ 2.x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ & g_2:\ -x_1^2 + x_2 - 20 \leq 0 \\ & \underline{x} \in \Re^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \min \quad & f(\underline{x}) \\ \text{s.a.:} \quad & \underline{g}(\underline{x}) \leq \underline{0} \\ & \underline{x} \in \Re^n \end{aligned}}$$

formato padrão

$$f(\underline{x}) = -4.x_1 - x_2 + 50 \qquad \underline{g}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2.x_1^2 - x_2 \\ -x_1^2 + x_2 - 20 \end{bmatrix}$$

## Análise de convexidade

Para o problema ser convexo:

1) $f(\underline{x})$ é função convexa

2) $\underline{h}(\underline{x})$ são funções lineares

3) $\underline{g}(\underline{x})$ são funções convexas

$h = 0 \rightarrow \begin{array}{l} h \leq 0 \rightarrow h \leq 0 \\ h \geq 0 \rightarrow -h \leq 0 \end{array}$

($h$) e ($-h$) são convexas se $h$ for linear

## Análise de convexidade

1) Função objetivo

$f(\underline{x}) = -4.x_1 - x_2 + 50$ é linear, portanto é convexa $\forall \ \underline{x}$

OU

$$\underline{\underline{H}}(f(\underline{x})) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall \ \underline{x}$$

Análise de convexidade

2) Região viável

$g_1(\underline{x}) = 2.\, x_1^2 - x_2 \leq 0$
$g_2(\underline{x}) = -x_1^2 + x_2 - 20 \leq 0$

$$\underline{\underline{H}}(g_1) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \alpha = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall\, \underline{x} \Longrightarrow g_1 \text{ é convexa } \forall\, \underline{x}$$

$$\underline{\underline{H}}(g_2) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \alpha = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall\, \underline{x} \Longrightarrow g_2 \text{ não é convexa } \forall\, \underline{x}$$

Análise de convexidade

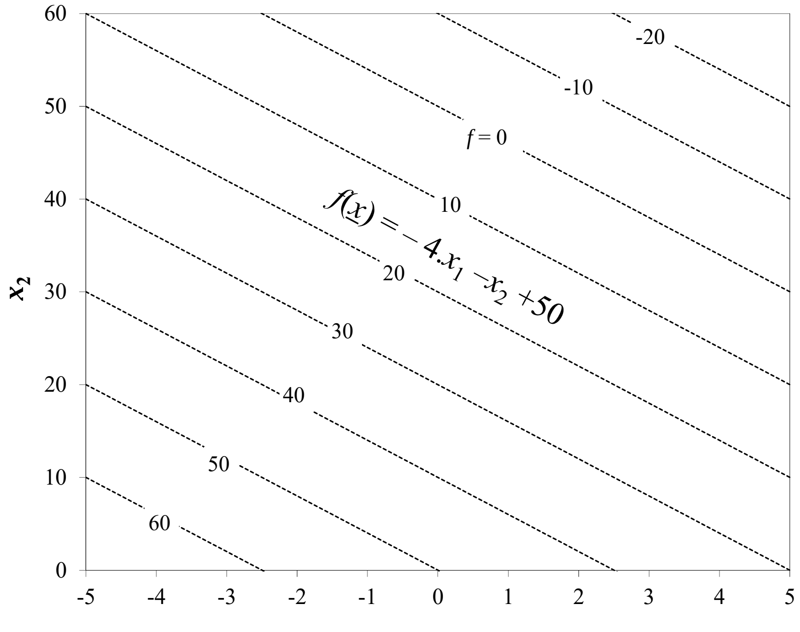
Para o problema ser convexo:

1) $f(\underline{x})$ é função convexa ✓

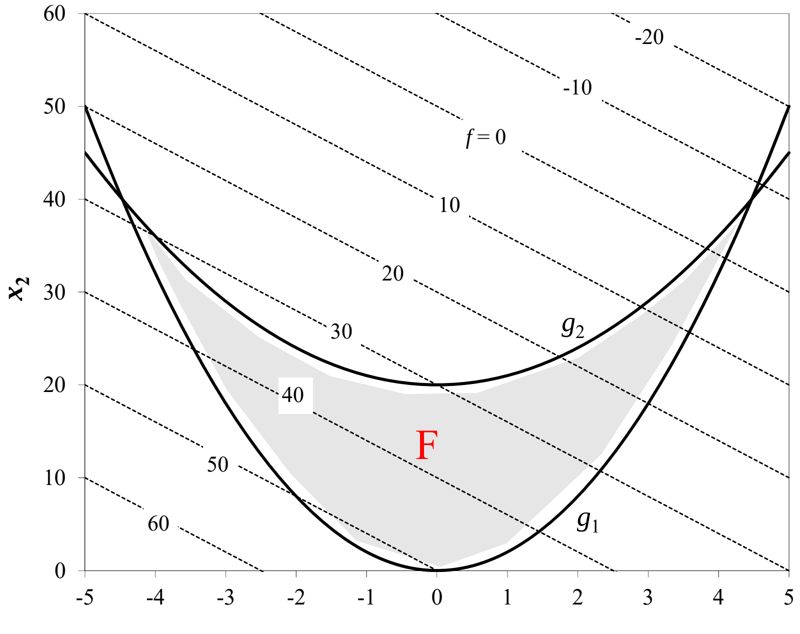
2) $\underline{h}(\underline{x})$ são funções lineares ✓

3) $\underline{g}(\underline{x})$ são funções convexas ✗

Problema não convexo.
Podem existir mínimos locais.

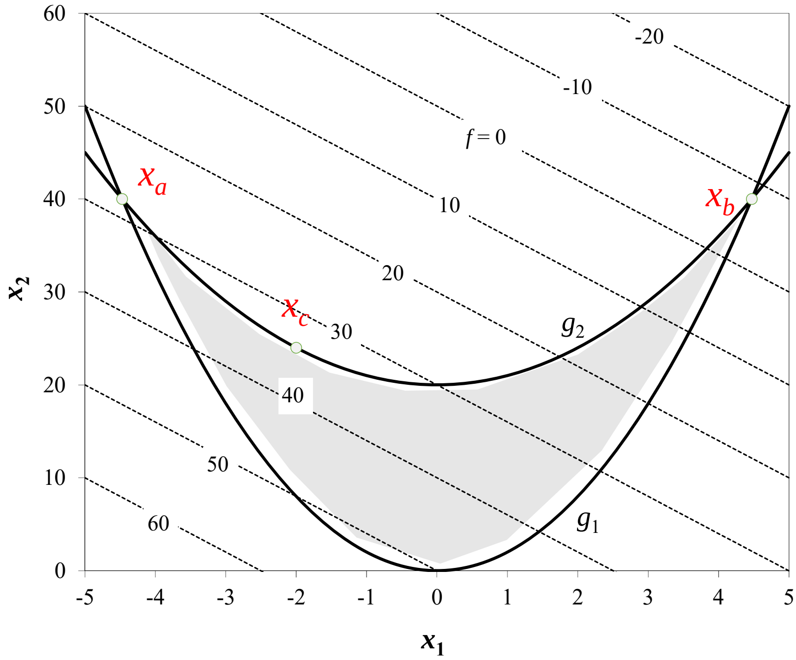


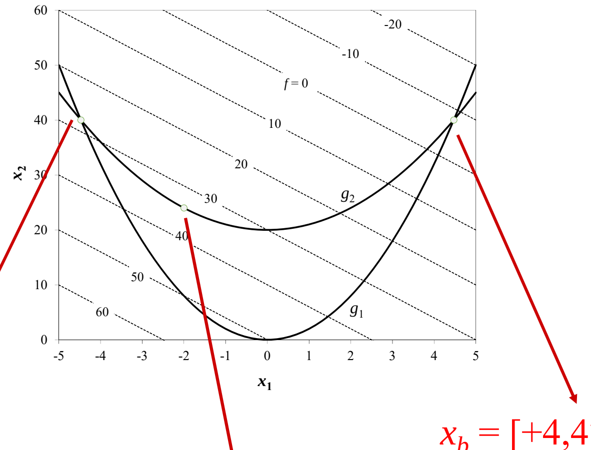

Solução por inspeção gráfica




$g_1$: $2.\,x_1^2 - x_2 = 0$

$g_2$: $-x_1^2 + x_2 - 20 = 0$




$x_a = [-4{,}47\ 40{,}0]^T$
$f(\underline{x}_a) = 29{,}7$
Mínimo local

$x_c = [-2{,}00\ 24{,}0]^T$
$f(\underline{x}_c) = 34{,}0$
Estacionário, KKT

$x_b = [+4{,}47\ 24{,}0]^T$
$f(\underline{x}_b) = -7{,}9$
Mínimo local e global

$\underline{x}_b = [+4{,}47\ 24{,}0]^T$

Condições de Kuhn-Tucker no ponto $\underline{x}_b$:

$\nabla f(\underline{x}_b) + \mu_1.\nabla g_1(\underline{x}_b) + \mu_2.\nabla g_2(\underline{x}_b) = 0$

$\mu_1.g_1(\underline{x}_b) = 0$ com $\mu_1 > 0$ (restrição ativa)

$\mu_2.g_2(\underline{x}_b) = 0$ com $\mu_2 > 0$ (restrição ativa)

$$\begin{cases} -4 + 4.x_1.\mu_1 - 2.x_1.\mu_2 = 0 \\ -1 - \mu_1 + \mu_2 = 0 \\ 2.x_1^{\ 2}.\mu_1 - x_2.\mu_1 = 0 \\ -x_1^{\ 2}.\mu_2 + x_2.\mu_2 - 20.\mu_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\underline{x}=\underline{x}_b} \begin{cases} -4 + 17{,}89.\mu_1 - 8{,}94.\mu_2 = 0 \\ -1 - \mu_1 + \mu_2 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Solução: $\mu_1 = 1{,}45$ e $\mu_2 = 2{,}45$.

Verificação de convexidade do problema em $\underline{x}_b$ analisando o Hessiano do Lagrangeano:

$$L(\underline{x},\underline{\mu}) = f(\underline{x}) + \mu_1.g_1(\underline{x}) + \mu_2.g_2(\underline{x})$$

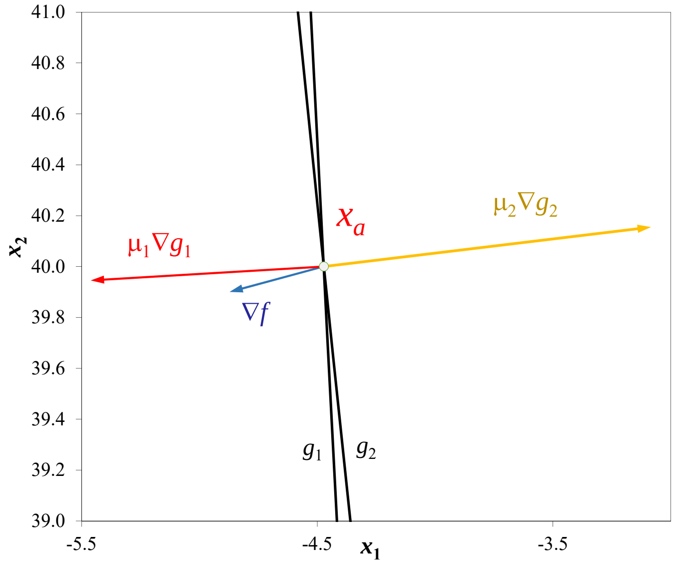
$$= (-4.x_1 - x_2 + 50) + \mu_1.(2.x_1^2 - x_2) + \mu_2.(-x_1^2 + x_2 - 20)$$

$$\nabla_x L = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} & \dfrac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -4 + 4.x_1.\mu_1 - 2.x_1.\mu_2 \\ -1 - \mu_1 + \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{H}}(L) = \begin{bmatrix} 4.\mu_1 - 2.\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\underline{x}=\underline{x}_b} \underline{\underline{H}}(L) = \begin{bmatrix} 0{,}89 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\lambda}' = \begin{bmatrix} 0{,}89 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz positiva

Dependência linear dos gradientes em $x_a$




Solução em $\underline{x}_a$: $\mu_1 = 0{,}55$ e $\mu_2 = 1{,}45$.

## Obtenção de pontos KKT por Enumeração exaustiva

| $g_1$ | $g_2$ | Resultado KKT |
|---|---|---|
| Inativa | Inativa | ? |
| Ativa | Inativa | ? |
| Inativa | Ativa | ? |
| Ativa | Ativa | ? |

Resolver sistema de equações em $x_1$, $x_2$, $\mu_1$, $\mu_2$

Ativa: $g = 0$ e existe $\mu$

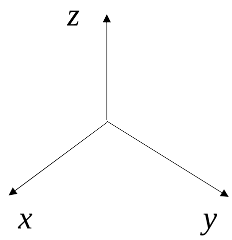
Fazer para estudo

## Visualização de problemas em $\Re^2$ com software

Converter $f(x_1, x_2)$ e $g_j(x_1, x_2)$ em expressões $y$ função de $x$

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(\underline{x}) = -4.x_1 - x_2 + 50 \\
\text{s.a.:} \quad & g_1: \; 2.\, x_1^2 - x_2 \leq 0 \\
& g_2: \; -x_1^2 + x_2 - 20 \leq 0 \\
& \underline{x} \in \Re^2
\end{aligned}
$$

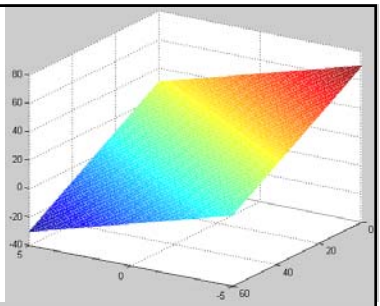
$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & z = \; -4.x - y + 50 \\
\text{s.a.:} \quad & g_1 = \; 2.\, x^2 - y \qquad = 0 \\
& g_2 = \; -x^2 + y - 20 \quad = 0
\end{aligned}
$$

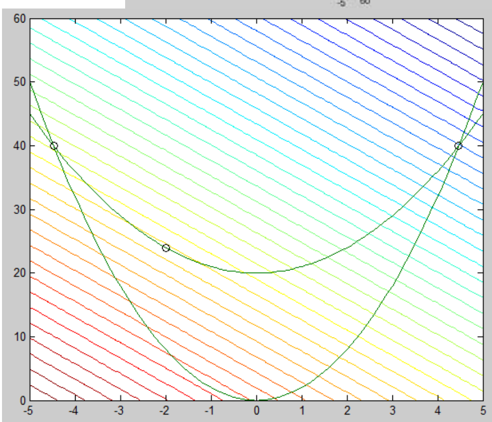



$z = \; -4.x - y + 50$
$y = \; 2.\, x^2$
$y = \; x^2 + 20$

MATLAB

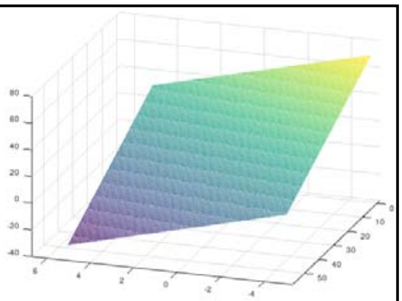
```
[X,Y] = meshgrid(-5:0.1:5,0:0.5:60);
Z = -4*X -Y +50;
mesh(X,Y,Z);

figure;
contour(X,Y,Z,40)
hold on;

XX = -5:0.1:5;
Yg1 = 2*(XX.^2);
plot(XX,Yg1);
Yg2 = XX.^2 +20;
plot(XX,Yg2);

plot(-4.47,40,'ko-');
plot( 4.47,40,'ko-');
plot(-2,24,'ko-');
hold off;
```



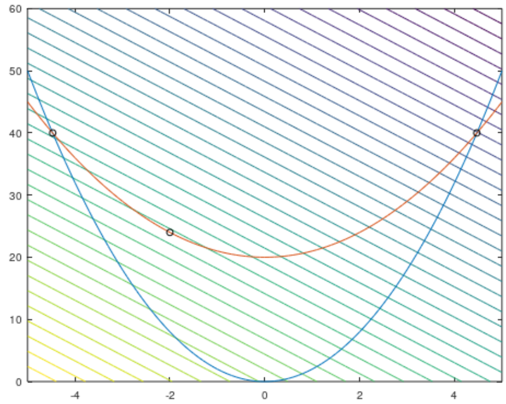


$$z = -4.x - y + 50$$
$$y = 2.\,x^2$$
$$y = x^2 + 20$$

GNU Octave

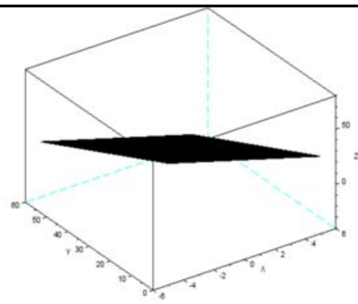


```
[X,Y] = meshgrid(-5:0.1:5,0:0.5:60);
Z = -4*X -Y +50;
mesh(X,Y,Z);

figure;
contour(X,Y,Z,40)
hold on;

XX = -5:0.1:5;
Yg1 = 2*(XX.^2);
plot(XX,Yg1);
Yg2 = XX.^2 +20;
plot(XX,Yg2);

plot(-4.47,40,'ko-');
plot( 4.47,40,'ko-');
plot(-2,24,'ko-');
hold off;
```

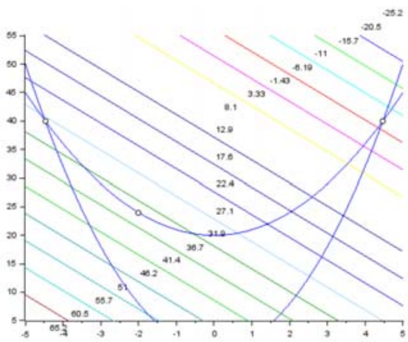


$$z = -4.x - y + 50$$
$$y = 2.\,x^2$$
$$y = x^2 + 20$$

Scilab



```
[X,Y] = meshgrid(-5:0.1:5,0:0.6:60);
Z = -4*X -Y +50;
mesh(X,Y,Z);

clear
function Z=my_surface1(X,Y),Z=-4*X-Y+50,
endfunction

X = -5:0.1:5;
Y= 0:0.5:60;

contour(X,Y,my_surface1,20)
set(gca(),"auto_clear","off");

XX = -5:0.1:5;
Yg1 = 2*(XX.^2);
plot(XX,Yg1);
Yg2 = XX.^2 +20;
plot(XX,Yg2);

plot(-4.47,40,'ko-');
plot( 4.47,40,'ko-');
plot(-2,24,'ko-');
```



## MÉTODO DAS RESTRIÇÕES ATIVAS

Fornece um ponto KKT (mínimo local)

**Passo 1**: Admita que não há restrições $g_i$ ativas ou escolha um conjunto de restrições consideradas ativas.

**Passo 2**: Formule as condições de KKT e resolva para $\underline{x}$, $\lambda_j$ e $\mu_i$.

**Passo 3**: Verifique se $g_i(\underline{x}) \leq 0$ e se $\mu_i \geq 0 \rightarrow$ Pare

**Passo 4**: Ajustes:
a) Se $g_i(\underline{x}) > 0$, torne restrição violada ativa.
b) Se $\mu_i < 0$, escolha o menor $\mu_i$ e torne inativa.
Volte para o passo 2.

## MÉTODO DAS RESTRIÇÕES ATIVAS

EXEMPLO

min $f(\underline{x}) = ½.(x_1^2 + x_2^2) - 3.x_1 - x_2$

sujeito a: $g_1(\underline{x}) = -x_1 + x_2 \leq 0$

$g_2(\underline{x}) = x_1 - ½.x_2 - 2 \leq 0$

$g_3(\underline{x}) = -x_2 \leq 0$

$\underline{x} \in \Re^2$

Gradientes:

$$\nabla f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla g_1(\underline{x}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \nabla g_2(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} \qquad \nabla g_3(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

24

## Iteração 1:

Passo 1: J = ∅, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 0$

Passo 2: Condições de Kuhn-Tucker

$$\nabla f(\underline{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j . \nabla h_j(\underline{x}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \in J}}^{r} \mu_j . \nabla g_j(\underline{x}) = \nabla f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Verificação das restrições

$g_1(\underline{x}) = -2 \le 0$ $\quad\quad \mu_1 = 0$
$g_2(\underline{x}) = ½ > 0$ $\quad\quad \mu_2 = 0$ $\quad\quad$ restrição $g_2$ violada!
$g_3(\underline{x}) = -1 \le 0$ $\quad\quad \mu_3 = 0$

Passo 4: Tornar $g_2$ uma restrição ativa: J = {2}.
$g_2(\underline{x}) = x_1 - ½.x_2 - 2 = 0$

25

## Iteração 2:

Passo 2: Condições de Kuhn-Tucker

$$\begin{cases} \nabla f(\underline{x}) + \mu_2 . \nabla g_2(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - 3 + \mu_2 \\ x_2 - 1 - 1/2 . \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ g_2 = x_1 - 1/2 . x_2 - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} 2{,}6 \\ 1{,}2 \end{bmatrix} \quad \text{e } \mu_2 = 0{,}4$$

Passo 3: Verificação das restrições

$g_1(\underline{x}) = -1{,}4 \le 0$ $\quad \mu_1 = 0$
$g_2(\underline{x}) = 0{,}0 \le 0$ $\quad \mu_2 = 0{,}4$
$g_3(\underline{x}) = -1{,}2 \le 0$ $\quad \mu_3 = 0$

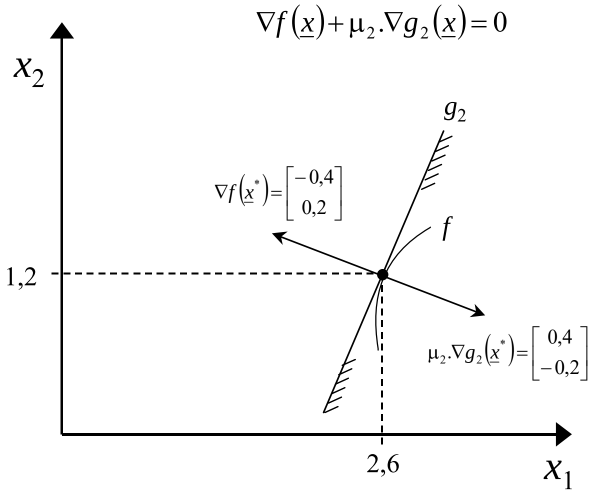
PARE, ponto de Kuhn-Tucker obtido:

$$\underline{x}^* = \begin{bmatrix} 2{,}6 \\ 1{,}2 \end{bmatrix} \quad\quad \text{com } f(\underline{x}^*) = -4{,}90$$

26

Dependência linear dos gradientes no ponto ótimo

$$\nabla f(\underline{x}) + \mu_2 . \nabla g_2(\underline{x}) = 0$$




27

Verificação de convexidade

Função objetivo: $f(\underline{x}) = ½.(x_1^2 + x_2^2) - 3.x_1 - x_2$

$$\underline{\underline{H}}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovalores

$$\lambda' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall\ \underline{x}$$

$f(\underline{x})$ convexa

Região viável:

$$g_1(\underline{x}) = -x_1 + x_2 \leq 0$$
$$g_2(\underline{x}) = x_1 - ½.x_2 - 2 \leq 0$$
$$g_3(\underline{x}) = -x_2 \leq 0$$

$g_i(\underline{x})$ são convexas, por serem lineares

F é espaço convexo

Portanto o ótimo obtido é global

Interpretação de $\mu_2 = 0,4$:

Perturbando $g_2$ com $\delta g_2 = 0,1$ temos:
$g_2(\underline{x}) = x_1 - ½.x_2 - 2 \leq 0,1$

Resolvendo novamente obtém-se
$f(\underline{x}^*) = -4,936$
$f$ otimizado sofreu uma variação $\delta f^* = -0,036$

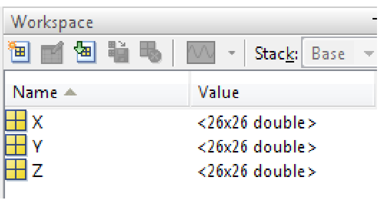
$$\mu_j = -\left(\frac{\partial f^*}{\partial g_j}\right)_{\partial g_k = 0, k \neq j}$$

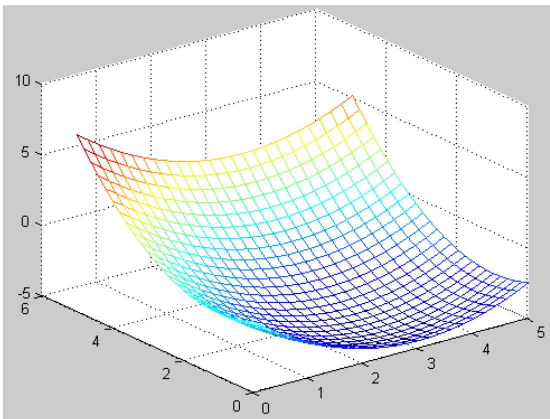
$$\delta f^* = -\mu_2.\delta g_2 = -(0,4).(0,1) = -0,040$$

Visualizaçao em Matlab, $f(x_1,x_2)$

Função objetivo
$f(\underline{x}) = ½.(x_1^2 + x_2^2) - 3.x_1 - x_2$
$\underline{x} \in \Re^2$

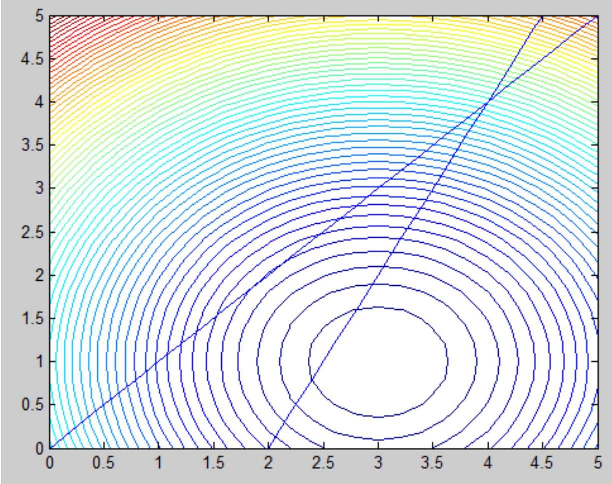
```
[X,Y] = meshgrid(0:.2:5,0:.2:5);
Z = (X.^2 + Y.^2)/2 -3*X -Y;
mesh(X,Y,Z)
```



Contornos de *f*, incluindo restrições

```
contour(X,Y,Z,60)
hold on;

XX = 0:0.2:5;
Yg1 = XX;
plot(XX,Yg1)
Yg2 = 2*XX -4;
plot(XX,Yg2)
hold off;
```




**MÉTODO DAS RESTRIÇÕES ATIVAS**
**Outra opção – Enumeração exaustiva**

$2^3 = 8$ combinações

| $g_1$ | $g_2$ | $g_3$ | Resultado KKT |
|---|---|---|---|
| Ativa | Ativa | Ativa | ? |
| Ativa | Ativa | Inativa | ? |
| Ativa | Inativa | Ativa | ? |
| Ativa | Inativa | Inativa | ? |
| Inativa | Ativa | Ativa | ? |
| Inativa | Ativa | Inativa | ? |
| Inativa | Inativa | Ativa | ? |
| Inativa | Inativa | Inativa | ? |

Fazer para estudo