Aula 7

Subespaços

Seja V $\mathbb{K}$-espaço vetorial

Def. $W \subset V$ é subespaço de V se a restrição das operações de V em W o tornam um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

Exemplos:

1) $W = \{0\}$ ou V são subespaços triviais de V.

2) $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{Q}$. Então $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ é uma cadeia de subespaços de $\mathbb{C}$.

3) $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ é subespaço mas $\mathbb{Q}$ não.

4) $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ é subespaço de $\mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})$.

5) $W = \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{K}\} = [v]$ para algum $v \neq 0$ em V.
   ↳ reta passando pela origem.

6) $W = [(1,1,0,0),(1,0,1,0)] \subset \mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$

é subespaço de $\mathbb{R}^4$.

Proposição: Seja $W \subset V$. W é subespaço de V se somente se satisfaz:

(a) $0 \in W$

(b) se $v_1, v_2 \in W$ então $v_1 + v_2 \in W$.

(c) se $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in W$ então $\alpha v \in W$.

Observações:

(i) Seja $W \subsetneq V$ subespaço. Então

$$\dim W < \dim V.$$

(ii) Se W_1 e W_2 são subespaços de V, então

$W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 : w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2 \}$

são subespaços de V.

Proposição: Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de V de dimensão finita. Então

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

dem. Suponha $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$. Seja $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ base de $W_1 \cap W_2$. Agora considere $\mathcal{B}_1 = \{w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_r\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n, u_1, \dots, u_s\}$ bases estendidas de $\mathcal{B}$ para W_1 e W_2. Basta mostrar que

$\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s\}$ é base de $W_1 + W_2$.

Para tanto, seja $v = x_1 + x_2$ com $x_i \in W_i$ $i = 1, 2$.

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i + \sum_{j=1}^{r} \gamma_j v_j \quad e \quad x_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \sum_{l=1}^{s} \beta_l u_l$$

com $\lambda_i, \gamma_j, \alpha_i$ e $\beta_l \in \mathbb{K}$.

$$v = x_1 + x_2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \alpha_i) w_i + \sum_{j=1}^{r} \gamma_j v_j + \sum_{l=1}^{s} \beta_l u_l$$

$\therefore$ ξ gera W_1+W_2. Resta verificar que é l.i.

Considere

$$\lambda_1 w_1+\dots+\lambda_n w_n+\gamma_1 v_1+\dots+\gamma_r v_r+\beta_1 u_1+\dots+\beta_s u_s=0.$$

Assim $\sum \lambda_i w_i+\sum \gamma_j v_j=-\sum \beta_\ell u_\ell$. Mas isso é possível se somente se $\lambda_i=\gamma_j=\beta_\ell=0$ já que

$\sum \beta_\ell u_\ell \in (W_2/W_1\cap W_2)\cup\{0\}$, $\sum \gamma_j v_j \in (W_1/W_1\cap W_2)\cup\{0\}$

e $\sum \lambda_i w_i \in W_1\cap W_2$.

O caso $W_1\cap W_2=\{0\}$ é mais simples e deixado para o leitor interessado. $\blacksquare$

Exemplo (conjunto solução de um sistema linear homogêneo de uma EDO)

Seja $X:(a,b)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ um campo vetorial e $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz. Considere o problema de Cauchy para o sistema $X'=AX$:

$X' = AX$ com $X(0) = X_0$.

* Sabemos que $\mathrm{Exp}(At)x_0$ é a única solução deste problema definida $\forall t \in \mathbb{R}$.

Afirmação: (i) $S = \{X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n : X \text{ satisfaz } X' = AX\}$ é subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

(ii) Seja $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Então se $X \in S$ então $\exists!\ \alpha_i \in \mathbb{R}$ tal que

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{Exp}(At) e_i.$$

Exercícios: Seção 2.4.7. 1, 2, 6