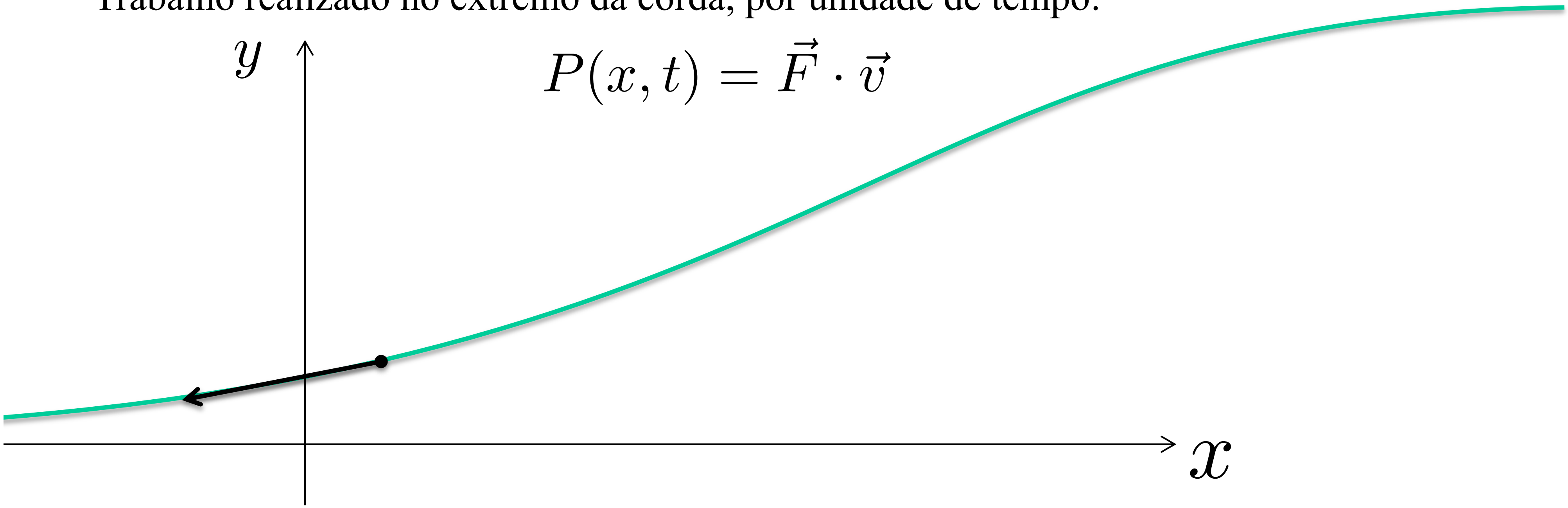
<u>Propagação de Energia</u>

Trabalho realizado no extremo da corda, por unidade de tempo:

$$P(x,t) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$



Velocidade: apenas componente transversal: $\vec{v} = \dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}\hat{j}$

Portanto $$P(x,t) = F_y \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$

$$P(x,t) = -T\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$ onde o sinal pode ser deduzido a partir do gráfico.

Pensando no pulso se propagando, temos uma quantidade finita de energia, colocada na corda em um certo intervalo de tempo.

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -v\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$P(x,t) = -T\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$

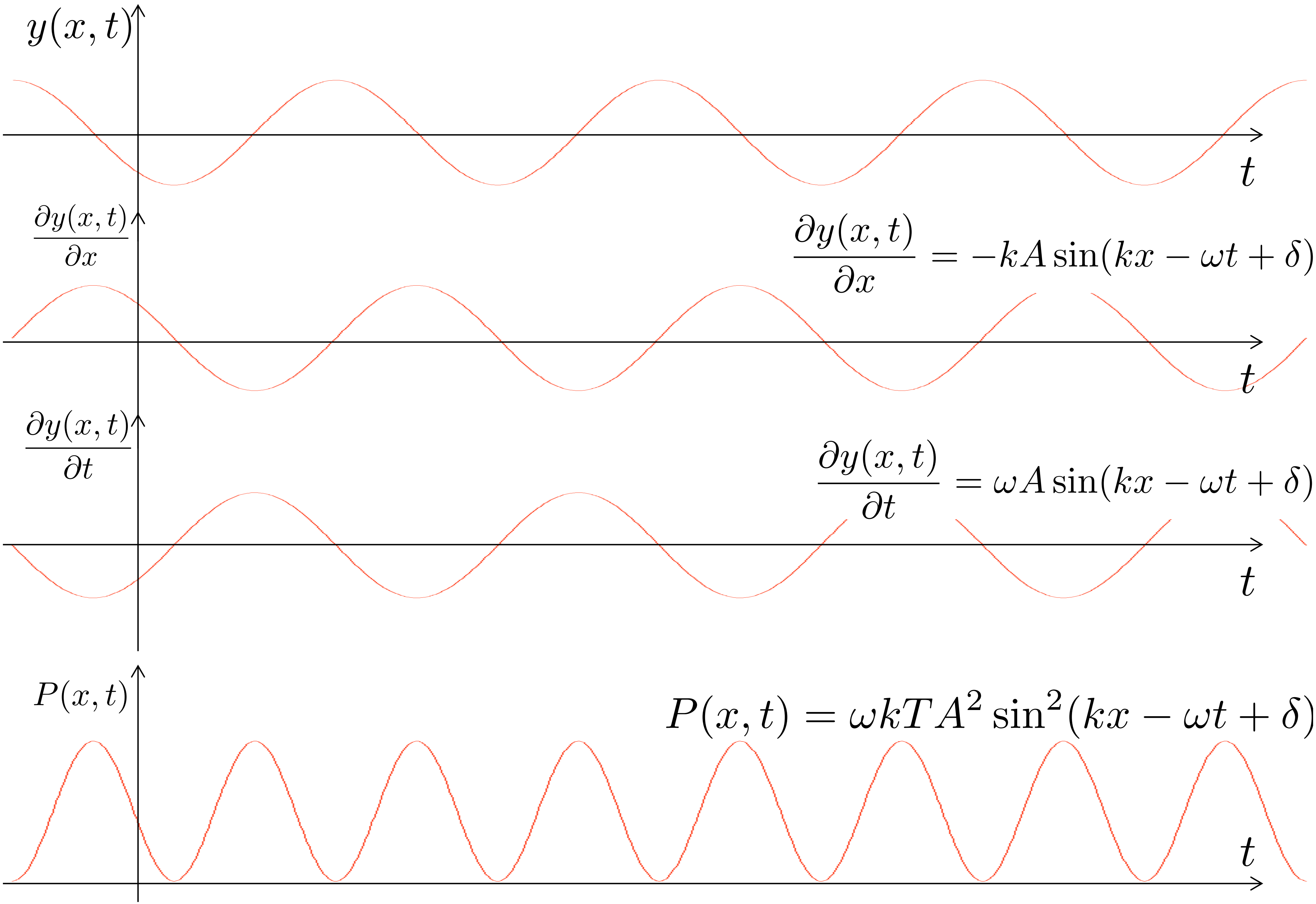
Pensando no pulso se propagando, temos uma quantidade finita de energia, colocada na corda em um certo intervalo de tempo.

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -v\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$P(x,t) = -T\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$

Intensidade, ondas harmônicas

Se: $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)$



$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = -kA\sin(kx - \omega t + \delta)$$

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \omega A\sin(kx - \omega t + \delta)$$

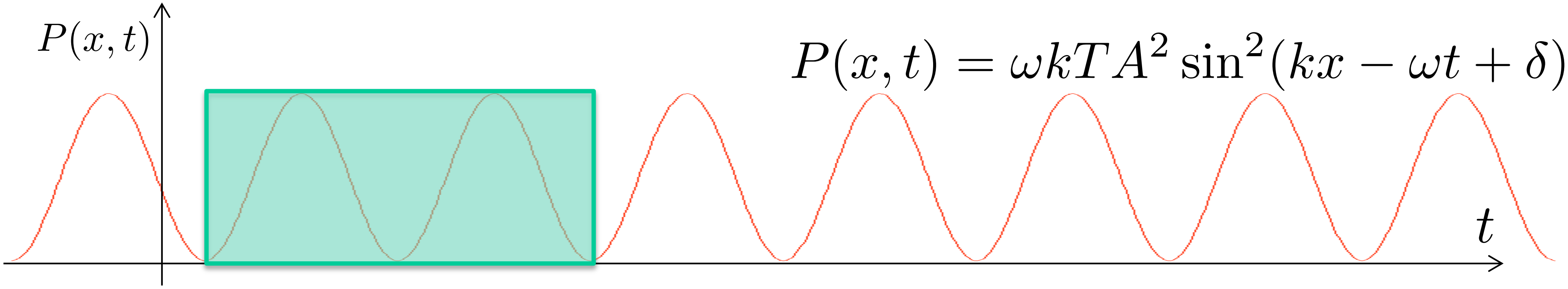
$$P(x,t) = \omega k T A^2 \sin^2(kx - \omega t + \delta)$$

Intensidade, ondas harmônicas

Ao invés de analisarmos a potência injetada, podemos estudar

o <u>trabalho médio</u> realizado por ciclo: a **<u>Intensidade</u>** da onda periódica.

$$P(x,t) = \omega k T A^2 \sin^2(kx - \omega t + \delta)$$



Um ciclo

$$I(x) = \overline{P(x,t)} \equiv \frac{\int_t^{t+\Delta T} P(x,t)\,dt}{\Delta T}$$

Valor médio de $\sin^2 = 1/2$

$$I = \frac{\mu v \omega^2 A^2}{2} \qquad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

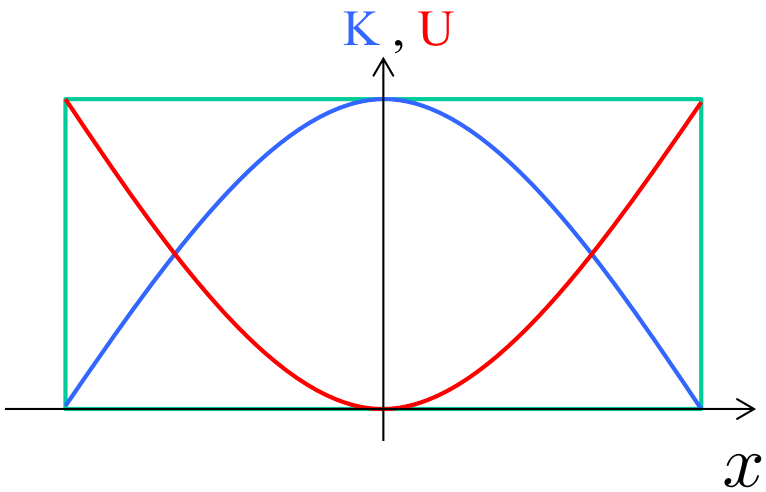
Densidade de energia (ondas harmônicas)

Um elemento de corda *dx* tem energia cinética instantânea $$dK = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx$$

O que corresponde a uma densidade linear de energia cinética $$\frac{dK}{dx} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)^2$$

Ou, olhando para o valor médio no tempo $$\overline{\frac{dK}{dx}} = \frac{\mu\omega^2 A^2}{4}$$

Cada elemento de corda executa um movimento harmônico: lembrando do oscilador visto nas etapas anteriores, a média periódica da energia cinética (K) e potencial (U) são iguais.



Densidade de energia (ondas harmônicas)

Podemos calcular então a densidade de energia total da onda

$$\overline{\frac{dE}{dx}} = \overline{\frac{dK}{dx}} + \overline{\frac{dU}{dx}} = \frac{\mu\omega^2 A^2}{2}$$

Lembrando da intensidade calculada: $$I = \frac{\mu v \omega^2 A^2}{2}$$

Vemos que a intensidade corresponde ao produto entre a velocidade v e a densidade linear média de energia.

$$I = v\overline{\frac{dE}{dx}}$$

Fluxo de energia é constante em uma onda periódica.

7. (Poli 2006) Uma corda uniforme, de $20\,\mathrm{m}$ de comprimento e massa de $2\,\mathrm{kg}$, está esticada sob uma tensão de $10\,\mathrm{N}$. Faz-se oscilar transversalmente uma extremidade da corda, com amplitude de $3\,\mathrm{cm}$ e frequência de 5 oscilações por segundo. O deslocamento inicial da extremidade é de $1,5\,\mathrm{cm}$ para cima.

(a) Ache a velocidade de propagação v e o comprimento de onda λ da onda progressiva gerada na corda.

(b) Escreva, como função do tempo, o deslocamento transversal y de um ponto da corda situado à distância x da extremidade que se faz oscilar, após ser atingido pela onda e antes que ela chegue à outra extremidade.

(c) Calcule a intensidade I da onda progressiva gerada.

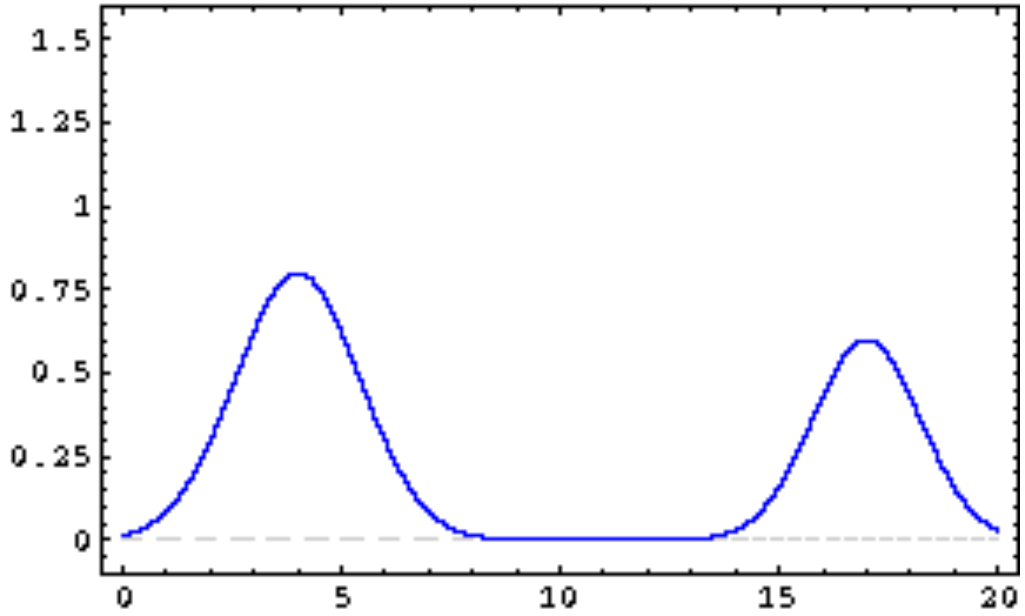
[redacted]

Interferência de Ondas

A equação de onda

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

admite múltiplas soluções.



Por exemplo:

$$y(x,t) = f(x - v \cdot t)$$

$$y(x,t) = g(x + v \cdot t)$$

Fica claro na equação de onda que qualquer combinação linear de soluções

$$y(x,t) = a\, f(x - vt) + b\, g(x + vt)$$

também é solução!

Lembrando que a intensidade é proporcional ao quadrado da amplitude, a interferência pode levar a picos grandes de energia!

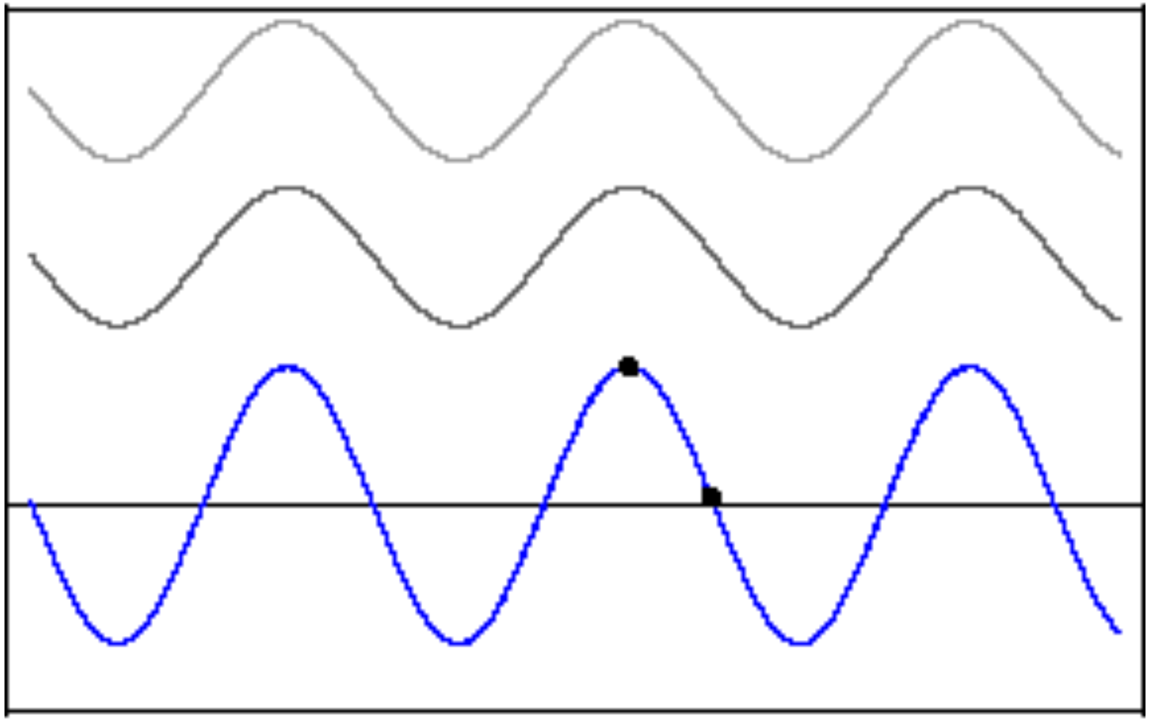
Interferência de Ondas

Ondas harmônicas copropagantes,

por exemplo, ondas de mesma frequência:

$$y_1(x,t) = A_1 \cos(kx - \omega t + \delta_1)$$

$$y_2(x,t) = A_2 \cos(kx - \omega t + \delta_2)$$



Variando a fase podemos ter um máximo ou um mínimo de interferência

$$y(x,t) = A \cos(kx - \omega t + \delta)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\delta_2 - \delta_1)$$

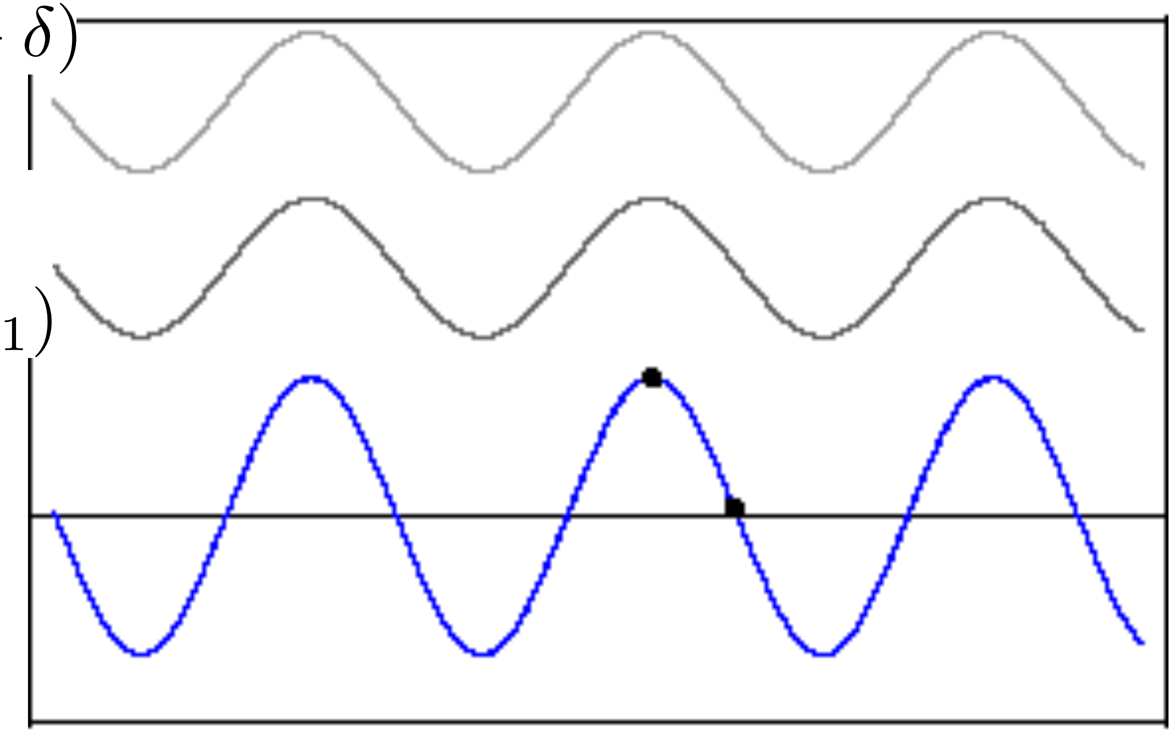
$$\delta = \delta_1 + \beta$$

$$\sin\beta = \frac{A_2}{A}\sin(\delta_2 - \delta_1)$$

Interferência de Ondas

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2$$
$$+2A_1A_2\cos(\delta_2 - \delta_1)$$



Interferência Construtiva

$$\delta_1 - \delta_2 = 2m\pi$$

$$A_{max} = A_1 + A_2$$

$$I_{max} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2$$

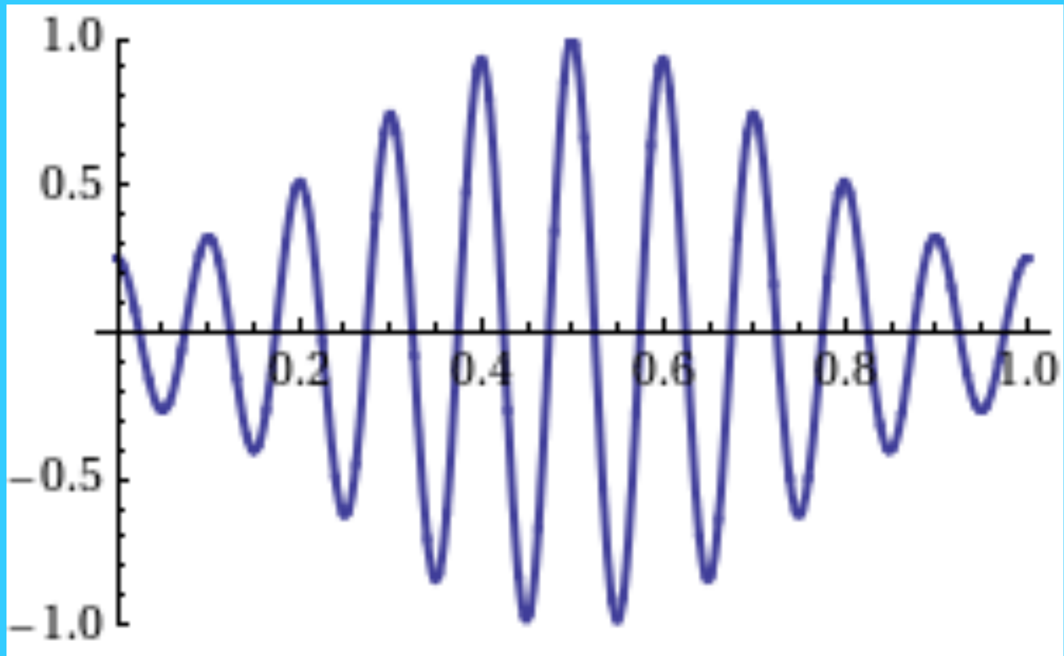
Interferência destrutiva

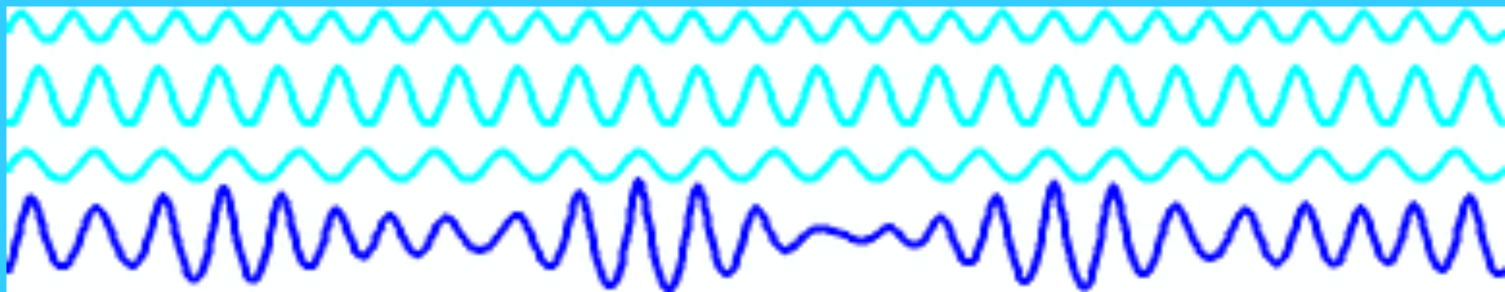
$$\delta_1 - \delta_2 = (2m+1)\pi$$

$$A_{min} = |A_1 - A_2|$$

$$I_{min} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2$$

Velocidade de Grupo X velocidade de fase





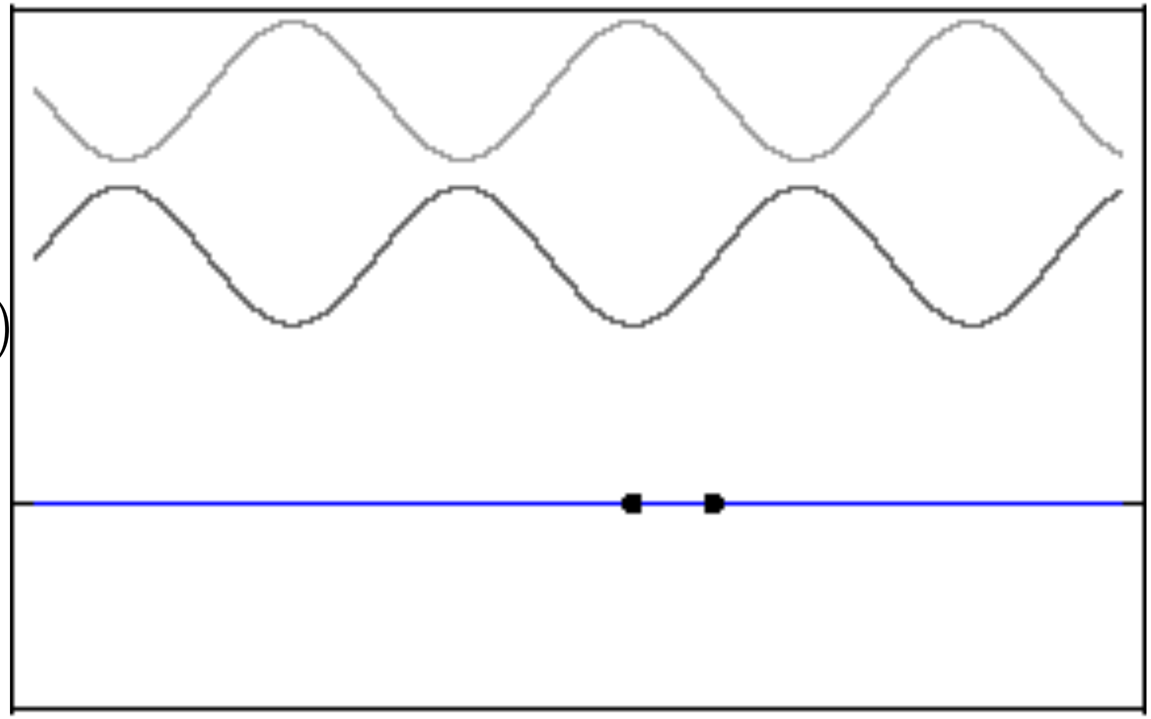
Interferência de Ondas

Ondas harmônicas contrapropagantes,

ondas de mesma frequência:

$$y_1(x,t) = A_1 \cos(kx - \omega t + \delta_1)$$

$$y_2(x,t) = A_2 \cos(kx + \omega t + \delta_2)$$



No caso mais simples, $A_1 = A_2$,

podemos escolher o tempo inicial

arbitrariamente para as fases

iniciais serem 0. A soma das ondas

resulta então em:

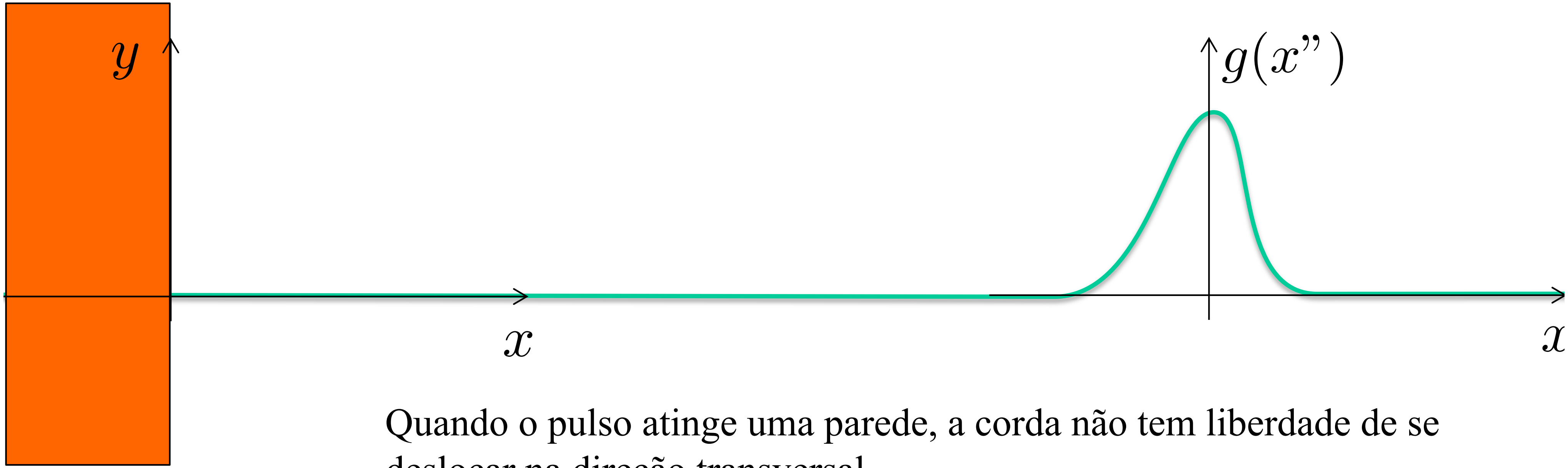
$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos(kx)\cos(wt)$$

Propagação de energia = 0 !

<u>Onda estacionária</u>

[redacted]

Reflexão de ondas



Quando o pulso atinge uma parede, a corda não tem liberdade de se deslocar na direção transversal.

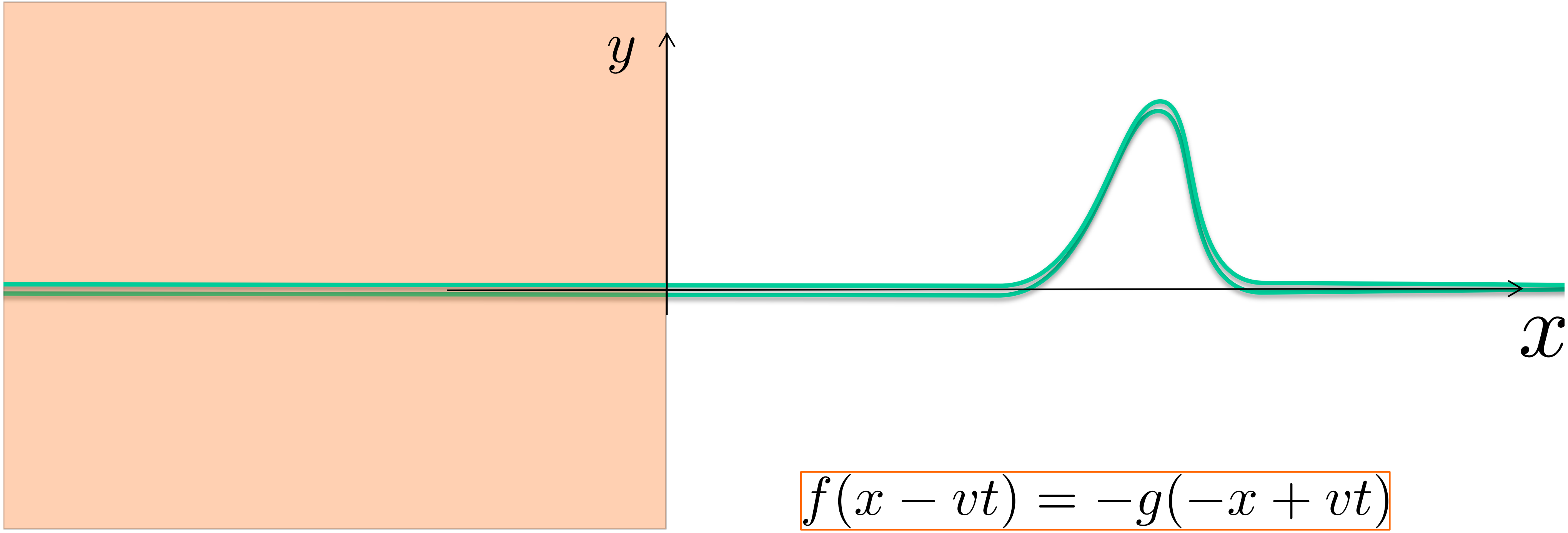
A solução da equação de onda deve levar isto em conta:

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt) \qquad\qquad y(0,t) = 0$$

$$f(-vt) = -g(vt) \qquad\qquad f(-x') = -g(x')$$

$$\boxed{f(x - vt) = -g(-x + vt)}$$

Reflexão de ondas



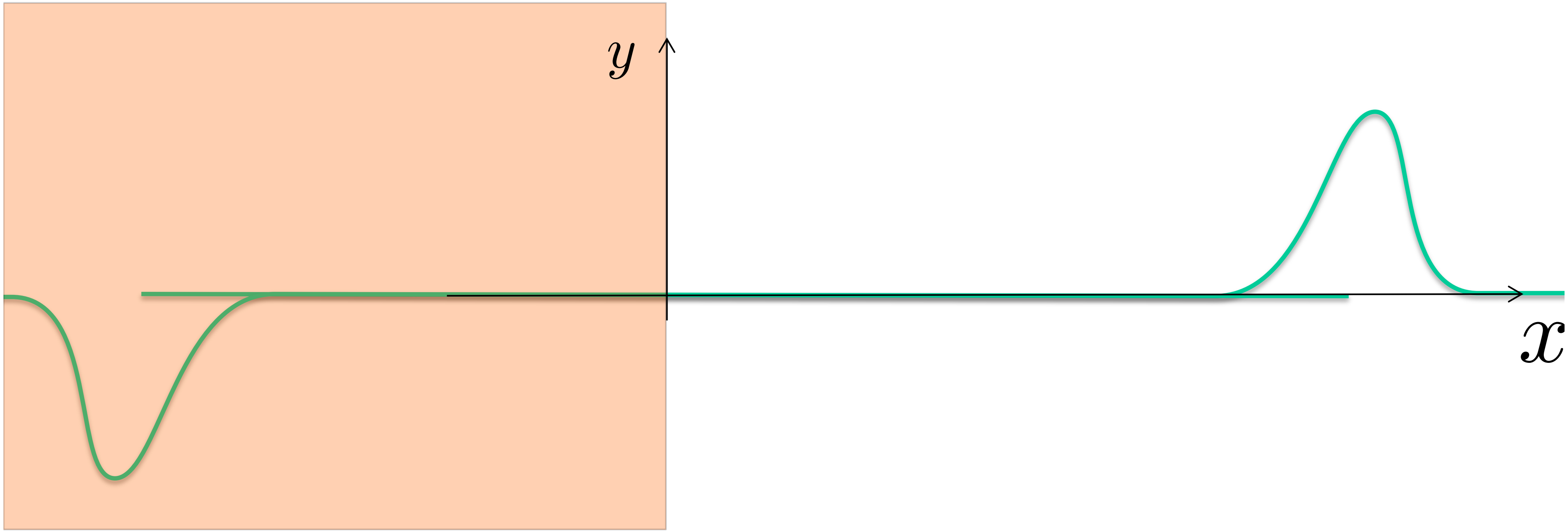
$$\boxed{f(x - vt) = -g(-x + vt)}$$

$$y(x,t) = g(vt + x) - g(vt - x)$$

A função complementar (propagante) é o espelho da função incidente após duas reflexões: uma no eixo x, outra no eixo y. Ou ainda, ao giro desta em 180º em torno da origem.

A solução é uma função ímpar em x.

Reflexão de ondas



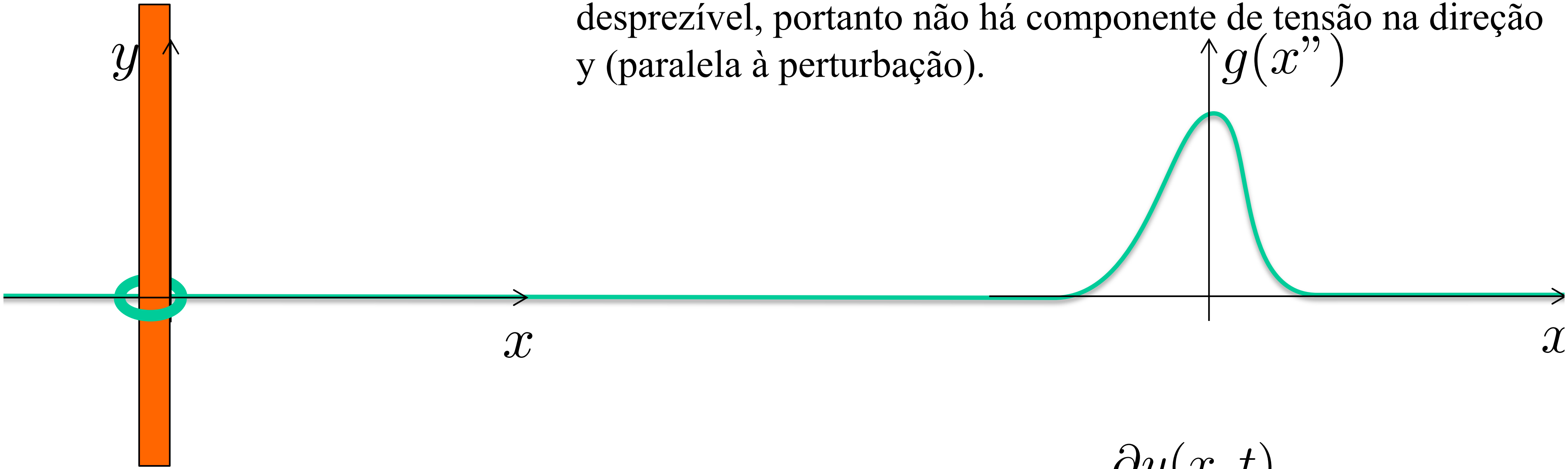
$$y(x,t) = g(vt + x) - g(vt - x)$$

Na reflexão, a onda retorna com a mesma amplitude, mas com uma inversão de sinal.

Inversão de fase

Reflexão de ondas

Quando o pulso atinge uma extremidade livre, a tensão é apenas normal: não há atrito no anel, que tem massa desprezível, portanto não há componente de tensão na direção y (paralela à perturbação).

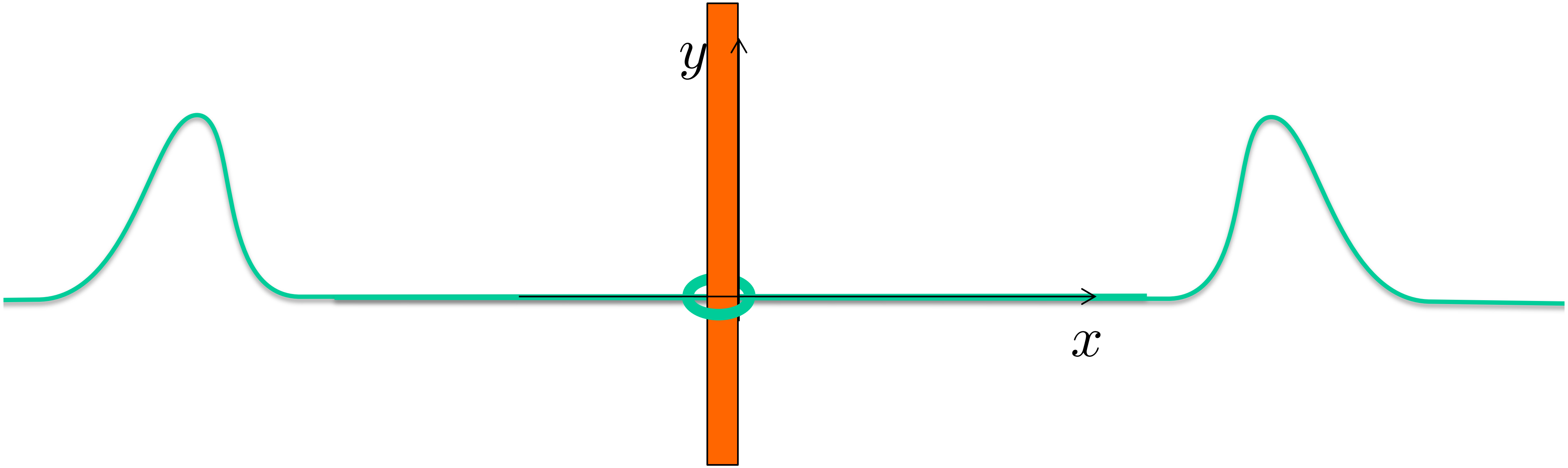


$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt) \qquad F_y(0,t) = -T\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$$

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \qquad \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = f'(-vt) + g'(vt) = 0$$

$$\frac{\partial x'(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial x"(x,t)}{\partial x} = 1 \qquad f'(x) = -g'(-x)$$

Reflexão de ondas



$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

$$f'(x) = -g'(-x)$$

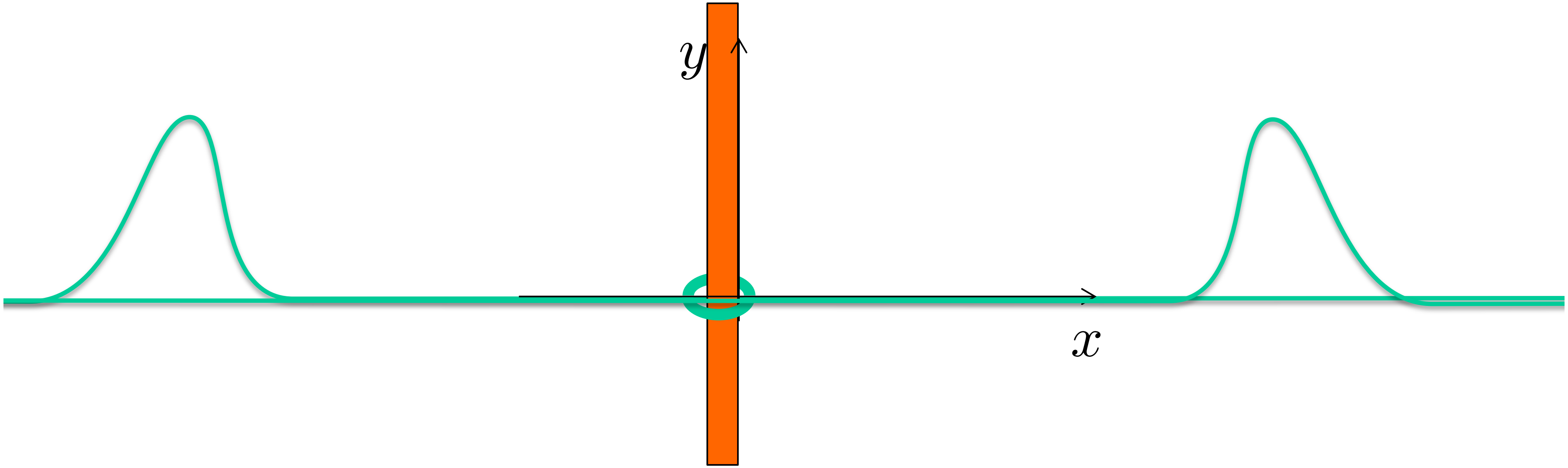
Se a derivada é uma função ímpar, a função primitiva é par em x!

$$f(x) = g(-x)$$

A solução corresponde a uma única reflexão em torno do eixo y.

$$y(x,t) = g(vt + x) + g(vt - x)$$

Reflexão de ondas



$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

$$f'(x) = -g'(-x)$$

Se a derivada é uma função ímpar, a função primitiva é par em x!

$$f(x) = g(-x)$$

A solução corresponde a uma única reflexão em torno do eixo y.

$$y(x,t) = g(vt + x) + g(vt - x)$$

Modos Normais