Primeira avaliação presencial
Cálculo II
EAD

Prof. Juan López Linares

20 de setembro de 2023

1 A01-Funções Linearmente Independentes

Exercício 1. *Determinar para que valores dos parâmetros reais* α *e* β *as funções* $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ *e* $y_2(x) = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ *são linearmente independentes.*

1.1 Resolução do Exercício 1

O Wronskiano é definido como:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Utilizando a regra da cadeia para derivar tem-se:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos(\beta x) & e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) & \alpha e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x) \end{vmatrix},$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos(\beta x) & e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \\ e^{\alpha x}\left[\alpha\cos(\beta x) - \beta\operatorname{sen}(\beta x)\right] & e^{\alpha x}\left[\alpha\operatorname{sen}(\beta x) + \beta\cos(\beta x)\right] \end{vmatrix}.$$

Pelas propriedades dos determinantes pode ser escrito:

$$W(x) = e^{2\alpha x}\begin{vmatrix} \cos(\beta x) & \operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha\cos(\beta x) - \beta\operatorname{sen}(\beta x) & \alpha\operatorname{sen}(\beta x) + \beta\cos(\beta x) \end{vmatrix}.$$

Calculando o determinante encontra-se:

$$W(x) = e^{2\alpha x}\left[\cancel{\alpha\cos(\beta x)\operatorname{sen}(\beta x)} + \beta\cos^2(\beta x) - \cancel{\alpha\cos(\beta x)\operatorname{sen}(\beta x)} + \beta\operatorname{sen}^2(\beta x)\right],$$

$$W(x) = e^{2\alpha x}\beta\left[\cos^2(\beta x) + \operatorname{sen}^2(\beta x)\right],$$

$$W(x) = e^{2\alpha x}\beta.$$

As exponenciais nunca anulam-se. Por isso basta tomar $\beta \neq 0$ para que $W(x) \neq 0$. Logo, as funções $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $y_2(x) = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ são linearmente independentes quando $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\beta \neq 0$.

2 A05-Curvas paramétricas

Exercício 2. *Eliminar o parâmetro para encontrar a equação cartesiana da curva:*

$$\begin{cases} x(\theta) = \sec^2(\theta) \\ y(\theta) = \tan^2(\theta) \\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

2.1 Resolução do Exercício 2

Como

$$\begin{cases} x = \sec^2(\theta) = \left(\frac{1}{\cos(\theta)}\right)^2 \\ y = \tan^2(\theta) = \left(\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}\right)^2 \\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

então

$$x - y = \frac{1}{\cos^2(\theta)} - \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\cos^2(\theta)},$$

$$x - y = \frac{1 - \operatorname{sen}^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}.$$

Pela identidade trigonométrica fundamental:

$$x - y = \frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = 1,$$

$$y(x) = x - 1.$$

A equação anterior representa uma reta infinita que forma um ângulo de 45° com o eixo x e passa pelo ponto $(1, 0)$. Porém, quando $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ tem-se:

$$0 < \cos(\theta) \leq 1,$$

$$x = \left(\frac{1}{\cos(\theta)}\right)^2 \geq 1.$$

Adicionalmente,

$$y = \tan^2(\theta) \geq 0.$$

Quando $\theta = 0$ é descrito o ponto:

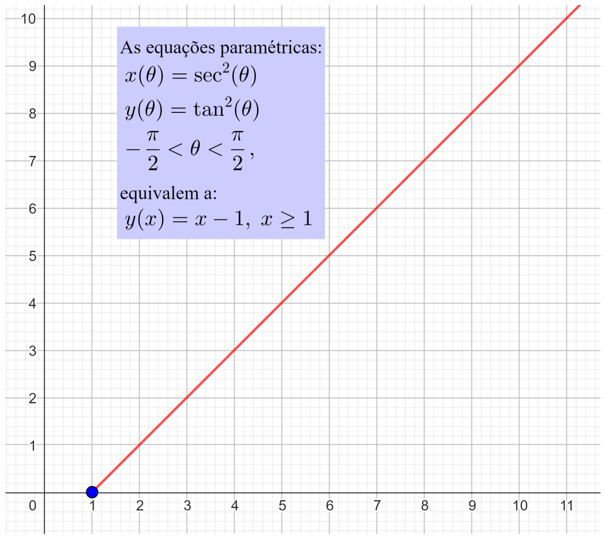
$$(1, 0).$$

Ou seja, as equações paramétricas dadas descrevem a semirreta:

$$y(x) = x - 1, \; x \geq 1.$$

A Figura 1 mostra um gráfico interativo feito no GeoGebra.

Figura 1: A curva paramétrica é uma semirreta. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.