Capítulo 4

Limites de sequências

Uma *sequência* em um conjunto X é uma função de $\mathbb{N}$ em X. Quando $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ é uma função, é usual denotar $f(n)$ por x_n (podendo utilizar outra letra no lugar de x) e a função f por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4.1 Sequências convergentes

Vimos como o módulo da diferença de dois números reais (ou de dois elementos de um corpo ordenado qualquer) representa a distância entre esses dois números. Agora discutiremos a definição de convergência de sequência. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x se x_n *se aproxima arbitrariamente de x quando n tende ao infinito.* Isso significa que, dada qualquer margem de erro $\varepsilon > 0$, a partir de um momento, todos os elementos da sequência estão a uma distância inferior a ε de x.

Definição 4.1. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um corpo ordenado $(X, +, \cdot, <)$ *converge* para $x \in X$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \geq n_0$ então

$$|x - x_n| < \varepsilon.$$

Nesse caso, também dizemos que x é o *limite* da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e usamos as seguintes notações:

$$x_n \to x$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Proposição 4.2. *Uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* x *se, e somente se, para todo* $\varepsilon > 0$ *o conjunto*

$$\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \geq \varepsilon\}$$

é finito.

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência que converge para x. Seja $\varepsilon > 0$. Tome n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon$. Pela contrapositiva, se $|x_n - x| \geq \varepsilon$, temos que $n < n_0$. Logo, $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \geq \varepsilon\} \subset \{0, \ldots, n_0 - 1\}$ e, portanto, é um conjunto finito (pois está contido em um conjunto finito).

Reciprocamente, suponha que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência e x um elemento do corpo tal que, para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \geq \varepsilon\}$ é finito. Vamos mostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x.

Seja $\varepsilon > 0$. Por hipótese, o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \geq \varepsilon\}$ é finito e, portanto, possui um máximo. Seja m o máximo desse conjunto e $n_0 = m + 1$. Isso significa que, para todo $n > m$, não vale $|x_n - x| \geq \varepsilon$, o que, pela tricotomia implica que $|x_n - x| < \varepsilon$. Logo, para todo $n \geq n_0$, temos $|x_n - x| < \varepsilon$. ■

Teorema 4.3. *O limite de uma sequência, quando existe, é único.*

Demonstração: Suponha que x e y são ambos limites de uma mesma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e suponha que $x \neq y$. Tome $\varepsilon = \dfrac{|x-y|}{2}$. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$ temos

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Tome, agora, $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_1$ temos

$$|x_n - y| < \varepsilon.$$

Fixe um natural n maior que o máximo entre n_0 e n_1. Temos $|x_n - x| < \varepsilon$ e $|x_n - y| < \varepsilon$. Logo, pelo Corolário 3.49 temos

$$|x - y| < 2\varepsilon,$$

absurdo, pois pela definição de ε temos $|x - y| = 2\varepsilon$. ■

Definição 4.4. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um corpo ordenado $(X, +, \cdot, <)$ é:

(a) *crescente* se $n > m$ implica que $x_n \geq x_m$;

(b) *decrescente* se $n > m$ implica que $x_n \leq x_m$;

(c) *estritamente crescente* se $n > m$ implica que $x_n > x_m$;

(d) *estritamente decrescente* se $n > m$ implica que $x_n < x_m$;

(e) *monótona* se é crescente ou decrescente;

(f) *limitada* se o conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente e limitado inferiormente;

(g) *constante* se existe $x \in X$ tal que $x_n = x$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(h) *eventualmente constante* se existem $x \in X$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $x_n = x$, para todo $n \geq n_0$.

Chamamos a atenção para o fato de que algumas das expressões acima não são uniformes na literatura. Alguns livros chama de *crescente* o que aqui chamamos de *estritamente crescente*, e de *não-crescente* o que chamamos de *crescente*, o mesmo acontecendo com as definições de decrescente.

Teorema 4.5. Em um corpo ordenado completo, toda sequência monótona e limitada converge.

Demonstração: Suponha que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja crescente. Por ser uma sequência limitada, o conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ é limitado. Seja $s = \sup A$. Vamos mostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para s. Tome $\varepsilon > 0$. Pela definição de supremo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s - \varepsilon < x_{n_0} \leq s$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, se $n > n_0$ temos que

$$s - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq s < s + \varepsilon.$$

ou seja, $|x_n - s| < \varepsilon$, mostrando que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para s.

Analogamente, mostramos que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for decrescente, convergirá para o ínfimo do conjunto de seus termos. ■

Teorema 4.6. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência que converge a x. Tomando $\varepsilon = 1$ na definição de convergência, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$ temos $|x_n - x| < 1$. Pelo Exercício 3.45 isso implica que, para todo $n \geq n_0$,

$$x - 1 < x_n < x + 1.$$

Tome M o máximo de $\{x_0, \ldots, x_{n_0-1}, x - 1, x + 1\}$ (lembrando que, pela tricotomia, todo conjunto finito possui máximo) e N o mínimo de $\{x_0, \ldots, x_{n_0-1}, x - 1\}$. Está claro que, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$N \leq x_n \leq M.$$

■

Teorema 4.7. *Suponha que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências que convergem para x e y, respectivamente. Então*

(a) $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $x + y$;

(b) $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para xy;

(c) se $x \neq 0$ e $x_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $(\frac{1}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\frac{1}{x}$.

Demonstração: Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como na hipótese. Mostremos, primeiro, que $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x + y$.

Seja $\varepsilon > 0$. Tome n_1 tal que para todo $n \geq n_1$ temos

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tal n_1 existe porque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x. Da mesma forma tomemos $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_2$ temos

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja n_0 o máximo entre n_1 e n_2. Usando a desigualdade triangular, para todo $n \geq n_0$ temos

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

concluindo a parte (a) do teorema.

Agora vamos mostrar que $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para xy.

Considere M o máximo entre $|x|+1$ e $|y|+1$. Temos que $M > 0$, $|x| < M$ e $|y| < M$.

Seja $\varepsilon > 0$. Precisamos mostrar que existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ temos

$$|x_n y_n - xy| < \varepsilon. \tag{1}$$

Podemos supor que $\varepsilon \leq 1$. De fato, se $\varepsilon > 1$, se conseguirmos provar que $|x_n y_n - xy| < 1$ em particular provamos que $|x_n y_n - xy| < \varepsilon$.

Usando que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x e que $M > 0$, existe n_1 tal que, para todo $n \geq n_1$ temos

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{2}$$

Agora, usando que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para y, existe n_2 tal que, para todo $n \geq n_1$ temos

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{3}$$

Tome n_0 o maior entre n_1 e n_2. Note que, como $\varepsilon < 1$ e $M \geq 1$, temos que, para todo $n \geq n_0$,

$$|x_n - x| \cdot |y_n - y| < \frac{\varepsilon^2}{16M^2} \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4}$$

Observe que vale a seguinte igualdade [1]:

$$x_n y_n - xy = (y_n - y)x + (x_n - x)y + (x_n - x)(y_n - y).$$

Aplicando a desigualdade triangular (duas vezes) na expressão acima, e aplicando o Teorema 3.44, obtemos

$$|x_n y_n - xy| \leq |y_n - y| \cdot |x| + |x_n - x| \cdot |y| + |x_n - x| \cdot |y_n - y|.$$

[1] Para conferir essa igualdade basta aplicar a distributividade e cancelar os termos opostos. Para saber como encontramos essa fórmula, suponha $x < x_n$ e $y < y_n$ e utilize a seguinte figura: um retângulo de base x e altura y dentro – na região inferior esquerda – de um retângulo de base x_0 e altura y_0. Calcule, geometricamente, a diferença das áreas dos dois retângulos.

Aplicando, então, as desigualdades (2), (3) e (4), além de $|x| < M$ e $|y| < M$, na expresão acima, obtemos

$$|x_n y_n - xy| < \frac{\varepsilon}{4M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{4M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon,$$

provando o item (b).

Para o item (c), suponha que $x_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e que $x \neq 0$. Mostremos que $(\frac{1}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\frac{1}{x}$.

Primeiro observemos o seguinte: existe n_1 tal que, para todo $n \geq n_1$ temos

$$|x_n| \geq \frac{|x|}{2}$$

Para provarmos isso, tome $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$. Tome n_1 tal que, para todo $n \geq n_1$, temos $|x_n - x| < \varepsilon$. Pelo Exercício 3.45 isso significa que

$$x_n \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[.$$

Se $x > 0$, temos $|x| = x$ e

$$x_n \geq x - \varepsilon = x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}.$$

Como $\frac{x}{2} > 0$, isso implica que $x_n > 0$ e, portanto, $|x_n| = x_n$, provando que $|x_n| \geq \frac{|x|}{2}$.

Se $x < 0$, temos $|x| = -x$ e

$$x_n \leq x + \varepsilon = x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}.$$

Logo, $x_n < 0$ e $-x_n \geq -\frac{x}{2} = \frac{|x|}{2}$. Como $x_n < 0$, temos $|x_n| = -x_n$, provando novamente que $|x_n| \geq \frac{|x|}{2}$.

Em particular, temos, para todo $n \geq n_1$,

$$|xx_n| = |x| \cdot |x_n| \geq \frac{|x|^2}{2}$$

e, portanto,

$$\frac{1}{|xx_n|} \leq \frac{2}{|x|^2}. \tag{5}$$

Fixe n_1 satisfazendo (5), para todo $n \geq n_1$, e seja $\varepsilon > 0$ qualquer. Tome $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_2$ temos

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon |x|^2}{2}. \tag{6}$$

Usando (5) e (6) e tomando n_0 o maior entre n_1 e n_2, temos, para todo $n \geq n_0$,

$$|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_n}| = \frac{|x_n - x|}{|x x_n|} < \frac{\varepsilon |x|^2}{2} \cdot \frac{2}{|x|^2} = \varepsilon,$$

provando (c). ■

Corolário 4.8. *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência que converge a x e λ é um número real, então $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência que converge a λx.*

Demonstração: Aplique o teorema anterior tomando $y_n = \lambda$, para todo n. Obviamente a sequência y_n converge a λ. ■

Exercício 4.9. Verifique quais das sequências abaixo são convergentes em $\mathbb{R}$, e calcule o limite, quando existir. Justifique sua resposta.

(a) $x_n = \dfrac{1}{n}$;

(b) $x_n = \dfrac{1}{10^n}$;

(c) $x_n = (-1)^n$;

(d) $x_n = n$;

(e) $x_n = 2 + \dfrac{3}{2^n}$;

(f) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

(g) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$;

(h) $x_n = \dfrac{n}{2^n}$;

(i) $x_n = \dfrac{n^2 - 1}{3n^2 + 2n + 1}$;

(j) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ é definida recursivamente da seguinte forma: $x_0 = 1$ e, definido x_n, definimos x_{n+1} como:

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + \frac{1}{2^n} & \text{se } x_n^2 < 2 \\ x_n - \frac{1}{2^n}, & \text{se } x_n^2 \geq 2 \end{cases}$$

Exercício 4.10. Tome $\varepsilon = 0,1$. Para cada sequência convergente do exercício 4.9, encontre um n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon$, onde x é o limite da sequência. Justifique sua resposta.

Teorema 4.11 (do Confronto)**.** *Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ três sequências tais que $x_n \leq y_n \leq z_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = p$, então $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = p$.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p - \varepsilon < x_n < p + \varepsilon, \text{ para todo } n \geq n_1.$$

Analogamente, pela convergência de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, obtemos $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p - \varepsilon < z_n < p + \varepsilon, \text{para todo } n \geq n_2.$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então, se $n \geq n_0$ obtemos

$$p - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < p + \varepsilon,$$

mostrando que $p - \varepsilon < x_n < p + \varepsilon$, como queríamos. ∎

Exercício 4.12. Use o Teorema do Confronto para mostrar que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge à zero e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, então o produto $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge à zero (mesmo se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não for convergente).

4.2 Sequências de Cauchy

Vimos que uma sequência converge se seus elementos se aproximam arbitrariamente de um certo número, à medida que n cresce. Já em uma sequência de Cauchy, os elementos da sequência vão ficando arbitrariamente próximos *entre si*, à medida que n cresce. Toda sequência convergente é de Cauchy (se os elementos da sequência vão se aproximando de um determinado número, então eles também estarão próximos entre si. Mostraremos formalmente mais adiante). Mas será que vale a recíproca? Isto é, toda sequência de Cauchy converge? Veremos que essa é mais uma caracterização dos corpos ordenados completos.

Definição 4.13. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um corpo ordenado $(X, +, \cdot, <)$ é uma *sequência de Cauchy* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $m, n > n_0$,

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Teorema 4.14. *Toda sequência de Cauchy em um corpo ordenado é limitada.*

Demonstração: Semelhante à demonstração do Teorema 4.6. ■

Teorema 4.15. *Toda sequência convergente em um corpo ordenado é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente a x. Seja $\varepsilon > 0$. Como x_n converge a x, existe n_0 tal que $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n \geq n_0$. Pelo Corolário 3.48, temos, para todos $n, m \geq n_0$,

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Vejamos agora que a recíproca do teorema acima é verdadeiro quando o corpo ordenado é completo.

Teorema 4.16. *Toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente.*

Ideia intuitiva da prova: Como toda sequência de Cauchy é limitada, para cada n natural tomamos a_n o ínfimo dos pontos da sequência *a partir de n*, e b_n o supremo dos pontos da sequência *a partir de n*. Como o conjunto dos pontos da sequência a partir de n vai ficando "menor", à medida que n aumenta, os intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ são encaixantes (isto é, satisfazem a hipótese da propriedade dos intervalos encaixantes). Usamos a propriedade dos intervalos encaixantes para encontrar x pertencente simultaneamente a todos esses intervalos.

Precisamos mostrar duas coisas. Primeiro: o tamanho desses intervalos tende a 0. Segundo: x é o limite da sequência (x_n). Do fato da sequência ser de Cauchy e, portanto, seus elementos ficarem arbitrariamente próximos, quando n tende a infinito, segue que esses intervalos têm tamanho convergindo a 0. E disso segue que x_n converge a x, visto que, a partir de n grande, todos os pontos da sequência pertencem a um pequeno intervalo I_n, que contém x. Portanto, para n grande todos os pontos estão próximos de x.

Nisso usaremos o Exercício 3.46, que afirma que a distância entre dois pontos dentro de um intervalo não pode ser maior que a distância das extremidades do intervalo.

Agora formalizaremos os argumentos acima usando as definições, axiomas e teoremas.

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy. Pelo Teorema 4.14 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Ou seja, o conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superior e inferiormente.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina

$$a_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$$

e

$$b_n = \sup\{x_k : k \geq n\}.$$

Como o supremo é sempre maior ou igual ao ínfimo, está claro que $a_n \leq b_n$.

Lembramos que, se $A \subset B$, então inf $A \geq$ inf B e sup $A \leq$ sup B. Logo, se $m > n$ então $a_m \geq a_n$ e $b_m \leq b_n$.

Portanto, se tomarmos os intervalos $I_n = [a_n, b_n]$, a sequência de intervalos $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.39. Portanto, podemos tomar $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Vamos mostrar que x é o limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Observe que $x_k \in [a_n, b_n]$, para todo $k \geq n$.

Vamos provar que $b_n - a_n$ converge a 0. Como todos os x_k's, para $k \geq n$, bem como o próprio x, pertencem ao intervalo $[a_n, b_n]$, se mostrarmos que esses intervalos tendem ao tamanho 0, não resta outra possibilidade senão todos os x_k's também ficarem próximos de x.

Seja $\varepsilon > 0$. Tome n_0 tal que, para todos $n, m \geq n_0$,

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1}$$

Como $a_{n_0} = \inf\{x_k : k \geq n_0\}$, existe $n_1 \geq n_0$ tal que

$$a_{n_0} \leq x_{n_1} \leq a_{n_0} + \frac{\varepsilon}{3},$$

o que implica que

$$(2) \qquad |a_{n_0} - x_{n_1}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Analogamente, existe $n_2 \geq n_0$ tal que

$$(3) \qquad |b_{n_0} - x_{n_2}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Aplicando o Corolário 3.48 às desigualdades (1), (2) e (3) obtemos

$$|a_{n_0} - b_{n_0}| < \varepsilon.$$

Note que $|a_{n_0} - b_{n_0}| = b_{n_0} - a_{n_0}$, e que, como os intervalos são encaixantes, temos que $b_n - a_n \leq b_{n_0} - a_{n_0}$, para todo $n \geq n_0$, provando que $b_n - a_n$ converge a 0.

Agora vamos concluir o teorema, isto é, mostraremos que (x_n) converge a x. Seja $\varepsilon > 0$. Como acabamos de mostrar, existe n_0 tal que $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$. Mas vimos que $x_n \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$, para todo $n \geq n_0$, e também $x \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$. Pelo Exercício 3.46 temos, para todo $n \geq n_0$,

$$|x_n - x| \leq |b_{n_0} - a_{n_0}| < \varepsilon$$

■

Exercício 4.17. Dê um exemplo de sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que não é convergente. Justifique.

Exercício 4.18. Tome $\varepsilon = 0,1$. Para cada sequência do exercício 4.9, encontre, quando existir, um n_0 tal que, para todos $n, m \geq n_0$, $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Justifique sua resposta, inclusive no caso em que não existir n_0.

4.3 Subsequências

Definição 4.19. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências em um corpo ordenado. Dizemos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *subsequência* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se existe uma sequência estritamente crescente [2] $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{N}$ tal que $y_n = x_{k_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.20. *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em um corpo ordenado, então todas as suas subsequências também são convergentes, e convergem para o limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência que converge a x. Seja $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência estritamente crescente em $\mathbb{N}$. Vamos mostrar que $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ também converge a x.

Observe que, como $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente, temos $k_n \geq n$, para todo n. De fato, podemos provar isso por indução. Temos $k_0 \geq 0$. Suponha, por hipótese indutiva, que $k_n \geq n$. Temos $k_{n+1} > k_n$ e, portanto, como estamos no conjunto dos números naturais, $k_{n+1} \geq k_n + 1 \geq n + 1$.

Seja $\varepsilon > 0$. Tome n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon$. Logo, para todo $n \geq n_0$, temos $k_n \geq n_0$ e, portanto

$$|x_{k_n} - x| < \varepsilon,$$

como queríamos. ■

Teorema 4.21 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada em $\mathbb{R}$ possui uma subsequência convergente.*

Ideia intuitiva da prova: Usaremos uma técnica chamada "bissecção". Se a sequência é limitada, podemos tomar $I_0 = [a_0, b_0]$ um intervalo fechado que contém todos os pontos da sequência. Basta, para isso, tomar a_0 um limitante inferior da sequência e b_0 um limitante superior. Pegamos o primeiro elemento da sequência como o primeiro elemento da seubsequência que queremos encontrar. Ou seja, $x_{k_0} = x_0$.

Seja c o ponto médio de I_0. Como a sequência é infinita, ou existem infinitos pontos abaixo de c (incluindo c) ou existem infinitos acima de c. Suponha que seja o primeiro caso. Então "apagamos" da sequência os pontos acima de c e consideramos só os que ficam abaixo dele. Encontramos, assim, um intervalo I_1 que possui metade do tamanho de I_0 e contém todos os pontos da nossa "nova sequência". Tomamos x_{k_1} o primeiro ponto da sequência que pertence ao intervalo I_1 e vem depois de x_{k_0} (isto é, $k_1 > k_0$).

[2]Vale aqui a mesma definição anterior que consideramos quando o contra-domínio é um corpo ordenado. Isto é, $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente se $m > n$ implica $k_m > k_n$.

Prosseguindo essa construção, os pontos da subsequência que vamos obtendo vão ficando cada vez mais "espremidos" nesses intervalos I_n, que vão ficando cada vez menores à medida que n tende ao infinito. Desse modo, os pontos da subsequência vão ficando muito próximos um dos outros, para n grande, e, portanto, formam uma sequência de Cauchy, que provamos ser convergente.

Para uma demonstração rigorosa, precisamos formalizar esse argumento "e assim por diante" através de uma definição recursiva desses intervalos I_n e da subsequência x_{k_n}. Precisamos, também, determinar em cada momento, um conjunto X_n dos índices da remanescentes da sequência (isto é, aqueles que ainda não "apagamos").

Vamos agora à demonstração rigorosa.

Demonstração: Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada de números reais. Sejam a_0 um limitante inferior de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e b_0 um limitante superior. Tomando $I_0 = [a_0, b_0]$ e $X_0 = \mathbb{N}$, vamos definir recursivamente uma sequência $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos e uma sequência $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de números reais satisfazendo:

1. $I_n \subset I_{n-1}$, quando $n > 0$;
2. $X_n \subset X_{n-1}$, quando $n > 0$;
3. X_n é infinito;
4. $\{x_k : k \in X_n\} \subset I_n$;
5. $I_n = [a_n, b_n]$ e $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$.

Está claro que I_0 e X_0 satisfazem todos os itens acima, lembrando que 1 e 2 só são considerados quando $n > 0$. Suponha que temos definidos X_i e I_i para i entre 0 e n. Vamos definir X_{n+1} e I_{n+1}.

Considere c o ponto médio de I_n. Isto é, $c = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Por hipótese X_n é infinito e $x_k \in I_n$, para todo $k \in X_n$. Como $I_n = [a_n, c] \cup [c, b_n]$, temos:

$$X_n = \{k \in X_n : x_k \in [a_n, c]\} \cup \{k \in X_n : x_k \in [c, b_n]\}.$$

Como a união de dois conjuntos finitos é um conjunto finito, pelo fato de X_n ser infinito é necessário que pelo menos um dos conjuntos que formam a união acima é infinito.

Se $\{k \in X_n : x_k \in [a_n, c]\}$ é infinito, tome $I_{n+1} = [a_n, c]$ e $X_{n+1} = \{k \in X_n : x_k \in [a_n, c]\}$.

Caso contrário, temos que $\{k \in X_n : x_k \in [c, b_n]\}$ é infinito. Tome $I_{n+1} = [c, b_n]$ e $X_{n+1} = \{k \in X_n : x_k \in [c, b_n]\}$.

As propriedades 1, 2, 3 e 4 da construção recursiva claramente valem para X_{n+1} e I_{n+1}, pela forma como foram definidos. A propriedade 5 segue do fato que c é o ponto médio de I_n e, portanto, I_{n+1} tem metade do tamanho de I_n.

Agora vamos construir recursivamente uma sequência $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{N}$ tal que x_{k_n} é convergente. Defina k_0 como 0 e, uma vez definido k_n definimos k_{n+1} como o menor elemento de X_{n+1} maior do que k_n (existe, pois X_{n+1} é infinito). Fica claro, pela construção, que $k_n \in X_n$, para todo n, e, consequentemente, $x_{k_n} \in I_n$.

Vamos mostrar que $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Pelo Teorema 4.16, é suficiente mostrar que x_{k_n} é uma sequência de Cauchy.

Seja $\varepsilon > 0$. Usando a propriedade arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{b_0 - a_0}.$$

Podemos provar por indução que $2^n > n$. Portanto

$$\frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\varepsilon}{b_0 - a_0}.$$

Logo,

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{n_0}} < \varepsilon.$$

Tomando a, b tais que $I_{n_0} = [a, b]$, pela condição 5 da construção de I_n, temos

$$b - a < \varepsilon.$$

Note que, para todos $n, m \geq n_0$, temos que x_{k_n} e x_{k_m} pertencem a I_{n_0}. Logo, pelo Exercício 3.46, temos, para todos $n, m \geq n_0$,

$$|x_{k_n} - x_{k_m}| < \varepsilon.$$

■

Exercício 4.22. Para cada uma das sequências em $\mathbb{R}$ abaixo, encontre uma subsequência convergente, se houver. Verifique, também, se a sequência é limitada e se é convergente.

(a) $x_n = n$;

(b) $x_n = (-1)^n$;

(c) $x_n = (-1)^n n$;

(d) $x_n = \frac{a}{b}$, se $n = 2^a(2b-1)$, ou $x_n = 0$, se $n = 0$ (mostre também que x_n está bem definido).

Exercício 4.23. Mostre que se uma sequência de Cauchy possui uma subsequência convergente, então ela própria é convergente.

Exercício 4.24. Use o exercício anterior e o Teorema de Bolzano-Weierstrass para dar outra demonstração de que toda sequência de Cauchy converge em $\mathbb{R}$.

4.4 Limite infinito

Definição 4.25. Dizemos que uma sequência real $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tende a infinito* ou que *o limite da sequência é infinito* se, para todo $A \in \mathbb{R}$ existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ temos $x_n > A$. Quando isso acontece escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tende a menos infinito* ou que *o limite da sequência é menos infinito* se, para todo $A \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$ temos $x_n < A$. Quando isso acontece escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

Atenção: Uma sequência que tende ao infinito **não** é convergente. Está errado falar que a sequência *converge ao infinito.* A notação $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ é um abuso de notação, pois ∞ e $-\infty$ **não** são números reais. Na verdade, sequer definimos individualmente os símbolos ∞ e $-\infty$, de modo que devemos ler a expressão $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ apenas como uma abreviatura da expressão "a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende a infinito", sem interpretar o símbolo de igualdade da maneira usual, como uma igualdade entre dois termos previamente definidos.

Teorema 4.26. *Suponha que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ tende a infinito (ou a menos infinito) e que $x_n \neq 0$, para todo n. Então a sequência $(\frac{1}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$. Tome $A = \frac{1}{\varepsilon}$. Pela definição de limite infinito, existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ temos $x_n > A$. Mas isso implica que, para todo $n \geq n_0$,

$$|\frac{1}{x_n} - 0| = \frac{1}{x_n} < \frac{1}{A} = \varepsilon,$$

provando que a sequência $(\frac{1}{x_n})$ converge a 0.

No caso em que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende a menos infinito, procedemos de forma análoga, tomando $A = -\frac{1}{\varepsilon}$ e n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ temos $x_n < A$. Disso segue que, para todo $n \geq n_0$,

$$|\frac{1}{x_n} - 0| = -\frac{1}{x_n} < -\frac{1}{A} = \varepsilon,$$

■

4.5 As sequências a^n e $a^{\frac{1}{n}}$

Iniciaremos essa seção mostrando que, para todo número real a entre 0 e 1 a sequência $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Lema 4.27 (Desigualdade de Bernoulli)**.** *Sejam $x > -1$ um número real e n um número inteiro não negativo. Então*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Demonstração: Provaremos a desigualdade acima por indução em n. Primeiro observamos que a desigualdade é verdadeira para $n = 0$, pois $(1 + x)^0$ e $1 + 0x$ são ambos iguais a 1. Suponha válido que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Mostraremos que a desigualdade vale também para $n + 1$ no lugar de n. Como $1 + x > 0$, temos que

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+x^2 \geq 1+(n+1)x.$$

■

Teorema 4.28. *Se $a > 1$, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n = a^n$ tende a infinito.*

Demonstração: Defina $x = a - 1 > 0$ e seja $A > 0$. Usando a propriedade arquimediana dos números reais, tome n_0 um número natural tal que $n_0 > \frac{A}{x}$. Para todo $n \geq n_0$, usando o Lema 4.27 temos

$$a^n = (1+x)^n \geq 1 + nx \geq 1 + n_0 x > 1 + \frac{A}{x}x = A.$$

■

Corolário 4.29. *Se $a \in [0,1[$, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n = a^n$ converge a 0.*

Demonstração: Se $a = 0$, o resultado é trivial. Suponha então $a \in]0,1[$. Note que, se $x_n = a^n$, então $\dfrac{1}{x_n} = (\dfrac{1}{a})^n$, sendo que $\dfrac{1}{a} > 1$. Logo, pelo Teorema 4.28 a sequência $\dfrac{1}{x_n}$ tende a infinito. Como $\dfrac{1}{\frac{1}{x_n}} = x_n$, segue do Teorema 4.26 que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. ■

Vamos mostrar agora que para todo $a > 0$ a sequência $(a^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 1.

Teorema 4.30. *Se $a > 0$, a sequência $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.*

Demonstração: Se $a = 1$ o resultado é trivial. Suponha $a > 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever $a^{\frac{1}{n}} = 1 + r_n$, sendo $r_n > 0$. Pelo Lema 4.27, temos

$$a = (1 + r_n)^n \geq 1 + nr_n > nr_n.$$

Vemos então que $0 < r_n < \dfrac{a}{n}$. Pelo Teorema do Confronto $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, de onde segue que $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Agora, se $0 < a < 1$, fazendo $b = \dfrac{1}{a}$, podemos escrever $a = \dfrac{1}{b}$ com $b > 1$. Pelo caso anterior, $\lim\limits_{n\to\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$. Logo $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b^{\frac{1}{n}}} = 1$. ■

Exercício 4.31. Calcule o limite de cada uma das sequências abaixo, inclusive nos casos em que o limite é infinito ou menos infinito.

(a) $x_n = \dfrac{1+2^n}{3^n}$;

(b) $x_n = 1 + \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$;

(c) $x_n = \dfrac{3^n}{1+2^n}$;

(d) $x_n = \dfrac{2^n+1}{n^2}$;

(e) $x_n = 2 - \dfrac{n^2}{n+5}$.

Exercício 4.32. *Nos casos do Exercício 4.31 em que o limite é infinito ou menos infinito, encontre* n_0 *tal que, para todo* $n \geq n_0$, $|x_n| > 100$.