$\theta \in \mathcal{L}(V_1,V_2)$ é positiva $\Leftrightarrow$ preserva ordem

lembre que $C_0(X,\mathbb{R}) = \{f \in C(X,\mathbb{R}) \mid \forall \varepsilon>0, \exists K_\varepsilon \subset X$ compacto tq $\sup_{x\in K_\varepsilon} |f(x)| < \varepsilon\}$

<u>Ex. 122</u> i) Note que, em $\mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$, $f \geq g \Leftrightarrow \forall p\in\Omega: f(p)\geq g(p)$. Seja $\tilde\Omega\subset\Omega$, é claro que $\mathcal{F}_{\tilde\Omega}(\Omega,\mathbb{R})$ é um subespaço (vetorial) de $\mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$. Sejam $f,g\in\mathcal{F}_{\tilde\Omega}(\Omega;\mathbb{R})$, seja $h\in[f,g]$, é claro que $f(\tilde\Omega)=g(\tilde\Omega)=h(\tilde\Omega)=\{0\}$, logo $h\in \mathcal{F}_{\tilde\Omega}(\Omega,\mathbb{R})$. Assim, $\mathcal{F}_{\tilde\Omega}(\Omega,\mathbb{R})$ é totalmente ordenado.

ii) Considere em $C(M,\mathbb{R})$ a mesma ordem que em $\mathcal{F}(M,\mathbb{R})$. Sejam $f,g\in C_0(M,\mathbb{R})$ e $a,b\in\mathbb{R}$, seja $\varepsilon>0$, existem $K_\varepsilon, L_\varepsilon\subset M$ compactos tais que $\sup_{x\in K_\varepsilon}|f(x)|, \sup_{x\in L_\varepsilon}|g(x)| < \frac{\varepsilon}{|a|+|b|} \Rightarrow$ Seja $N_\varepsilon = K_\varepsilon\cap L_\varepsilon$, é compacto pois $M$ é Hausdorff. Temos $\sup_{x\in N_\varepsilon}|af(x)+bg(x)|<\varepsilon$, logo $af+bg\in C_0(M;\mathbb{R})$. Agora, seja $h\in[f,g]$, $\forall p\in M$, temos que $|h(p)|\leq \max\{|f(p)|, |g(p)|\}$, usando um método similar ao anterior, é fácil mostrar que $h\in C_0(M,\mathbb{R})$. Portanto $C_0(M,\mathbb{R})$ é um ideal ordenado.

<u>Ex. 125</u> ($\Rightarrow$) Se span $V^+=V$ então, $\forall v\in V$: $v=\sum_{i=1}^n a_i v_i^+ = \underbrace{\sum_{a_i\geq0} a_i v_i^+}_{=p} - \underbrace{\sum_{a_i<0}(-a_i)v_i^+}_{=q}$, com $v_i^+\in V^+$. Como $V^+$ é um cone convexo: $p,q\in V^+$. Sejam $x,y\in V^+$, com $x=p_1-q_1$, $y=p_2-q_2$, com $p_i,q_i\in V^+$. Seja $z=p_1+p_2$, temos que $z-x, z-y\in V^+$, logo $z\geq x,y$, portanto $V$ é dirigido. ($\Leftarrow$) Seja $x\in V$, temos que $\exists z\in V$ tq $x, -x\leq z \Rightarrow z-x=:v_1^+\in V^+$ e $z+x=:v_2^+\in V^+ \Rightarrow x=\frac{v_2^+}{2}-\frac{v_1^+}{2}$, logo $x\in$ span $V^+$.

Agora, se $u$ é uma unidade de ordem de $V$, sejam $x,y\in V$. Existem $\alpha_1,\alpha_2\geq0$ tais que $\alpha_1 u\geq x$, $\alpha_2 u\geq y$. Seja $\alpha=\max\{\alpha_1,\alpha_2\}$: $\alpha u\geq\alpha_1 u\geq x$ e $\alpha u\geq \alpha_2 u\geq y$ (em geral se $\alpha\geq\beta\geq0 \Rightarrow \alpha u\geq\beta u$, fácil de verificar pelas propriedades de $V^+$).

<u>Ex. 127.</u> Por definição, $V^+\subset \mathrm{Re}\{v\}$, (ordem restrita) que é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Pelo Ex. 125, $\mathrm{Re}\{V\} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} V^+$ se e somente se $\mathrm{Re}\{V\}$ é dirigido. Para finalizar, note que $\mathrm{span}_{\mathbb{C}} V^+ = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\mathrm{Re}\{V\} = V$.

<u>Ex. 129.</u> Seja $f\in\mathcal{L}^+(V_1,V_2)$, seja $v\in\mathrm{Re}\{V_1\}$, é suficiente mostrar que $f(v)\in\mathrm{Re}\{V_2\}$. Como no Ex. 125, escreva $v=\sum a_i v_i^+ - \sum b_j v_j^+$, com $v_i^+, v_j^+\in V_1^+$, $a_i,b_j\geq0$. Temos que $f(v)=\sum a_i f(v_i^+)-\sum b_j f(v_j^+)$, por definição: $f(v_i^+), f(v_j^+)\in V_2^+\subset\mathrm{Re}\{V_2\}$, logo $f(v)\in\mathrm{Re}\{V_2\}$

VEJA PAG 40, parágrafos iniciais

<u>Ex. 131.</u> Sejam $f,g\in\mathcal{L}_{ob}(V_1,V_2)$, seja $h\in[f,g]$. Seja $T\subset V_1$ limitado, do parágrafo embaixo da Definição 128, $\forall t\in T$: $f(t)\leq h(t)\leq g(t)$. Temos que $f(T)$ e $g(T)$ são limitados, em particular existem $a,b\in V_2$ tais que, $\forall t\in T$: $a\leq f(t)\leq h(t)\leq g(t)\leq b$, logo $h(T)$ é limitado. Segue que $h\in\mathcal{L}_{ob}(V_1,V_2)$, logo $\mathcal{L}_{ob}(V_1,V_2)$ é um subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{L}(V_1,V_2)$. Por outro lado, existem $c,d\in V_2$ tais que $\forall t\in T$: $f(t)\leq c$ e $g(t)\geq d$. Sejam $m,n\in\mathbb{R}$, se $m,n\geq0$ então $md+nd\leq mf(t)+ng(t)\leq mc+nb$, se $m\geq0$ e $n<0$ então: $ma+nb\leq mf(t)+ng(t)\leq mc+nd$, os outros casos são análogos, o que mostra que $(mf+ng)(T)$ é limitado. Isso vai implicar, no final, que $\mathcal{L}_{ob}(V_1,V_2)$ é um ideal ordenado de $\mathcal{L}(V_1,V_2)$.

Agora, suponha que $V_1, V_2$ são $*$-espaços preordenados. Sejam $p, q \in V_1$ tais que $\forall t \in T: p \leq t \leq q$, temos que $q - t \in V_1 \subset Re\{V_1\} \Rightarrow (q-t)^* = q - t \in V_1 \Rightarrow t^* \leq q^*$. Podemos concluir que $T^*$ é limitado, logo existem $\tilde{a}, \tilde{c} \in V_2$ tais que $\tilde{a} \leq f(t^*) \leq \tilde{c}, \forall t \in T \Rightarrow \tilde{a}^* \leq f(t^*)^* = f^*(t) \leq \tilde{c}^*$, segue que $f^*(T)$ é limitado, logo $f^*$ preserva conjuntos limitados. Segue que $\mathcal{L}_{ob}(V_1, V_2)$ é autoconjugado.

Ex. 133 É suficiente mostrar que $\mathcal{L}^+(V, \mathbb{C})$ é autoconjugado. Seja $f \in \mathcal{L}^+(V, \mathbb{C})$, seja $v \in V^+$ $\subset Re\{V\}$, temos que $f^*(v) = \overline{f(v^*)} = \overline{f(v)} = f(v) \geq 0$, logo $f^* \in \mathcal{L}^+(V, \mathbb{K})$, como queríamos mostrar. Assim, $V^{od}$ é autoconjugado. Pelo Ex. 39 iv), existe uma correspondência bijetiva entre $Re\{\mathcal{L}(V, \mathbb{C})\}$ e $\mathcal{L}(Re\{V\}, \mathbb{R})$, dada pela restrição sob $Re\{V\}$. Note que $Re\{V^{od}\} = V^{od} \subset Re\{\mathcal{L}(V, \mathbb{C})\}$. Seja $w \in Re\{V\}^+ = V^+$, temos que $f(w) \geq 0$, logo $f \in \mathcal{L}^+(Re\{V\}, \mathbb{R})$, o que implica que todo elemento de $V^{od}$ corresponde-se um elemento do $Re\{V\}^{od}$. Em particular $Re\{V\}^{od} \subset \mathcal{L}(Re\{V\}, \mathbb{R})$, o que termina a prova, pela correspondência mencionada.

Ex. 135 Definição, note que a propriedade reflexiva implica que a inversa é positiva.

nem sempre $P$ é pontilhado, ex. se $P$ é um subespaço próprio

Ex. 138 Sejam $x, y \in Ker(\theta)$, seja $z \in [x, y]$. Temos $\theta(z) \in [\theta(x), \theta(y)] = \{0\} \Rightarrow z \in Ker\,\theta$. Pronto!

$V_2$ é ordenado

Ex. 139. Seja $f \in [0, 0]$ em $\mathcal{L}(V_1, V_2)$. Pelo ex. 125, $V_1$ é dirigido. Seja $v \in V_1$, existe $w \in V$ tal que $w \geq v, 0$. Como $f, -f \geq 0$, então $f(w) \in [f(0), f(0)] = \{0\} \Rightarrow f(w) = 0$, similarmente $f(w) \in [f(v), f(v)] = \{f(v)\} \Rightarrow f(v) = 0$, logo $f = 0$, como desejado.

Ex. 140. ($\Rightarrow$) Segue do ex. 135. ($\Leftarrow$) Pelo ex. 135 só falta mostrar que $\theta$ é injetivo. Temos que, se $f(v) = 0 \Rightarrow f(0) \leq f(v) \leq f(0) \Rightarrow 0 \leq v \leq 0 \Rightarrow v = 0$. Pronto!

não foi necessário usar que $V_2$ é ordenado.

Ex. 141 Dado $v \in V^+$, defina $M_v = \{\alpha v : \alpha > 0\}$. $0$ é uma cota inferior de $M_v$. $w$ é uma cota inferior de $M_v$ se e somente se $\forall \alpha > 0: \frac{1}{\alpha} v \geq w \Leftrightarrow \forall \alpha > 0: v \geq \alpha w$. Logo $\inf M_v = 0$, $\forall v \in V^+$ é equivalente à propriedade arquimediana.

↳ maior cota inferior, única pois $V$ é ordenado!

Ex. 143. Suponha que $V$ não é arquimediano $\Rightarrow \exists v \in V, \tilde{v} \notin V^+$ tais que $\forall n \in \mathbb{N}: v \geq n\tilde{v}$ $\Rightarrow \tilde{v} - \frac{v}{n} \in -V^+$, e essa sequência tende para $\tilde{v}$, o que não é possível pois $V^+$ é fechado.

**Ex. 148.** É suficiente que todo intervalo é norma-limitado. Sejam $[a,b]$ e $R>0$ tq $a,b\in B_R(0)$, existem $\Omega$ totalmente ordenado e $r>0$ tq $B_r(0)\subset\Omega\subset B_R(0)$. Seja $\lambda>0$ tq $\lambda a,\lambda b\in B_r(0)\Rightarrow$ $[\lambda a,\lambda b]=\lambda[a,b]\subset\Omega\subset B_R(0)$, logo $[a,b]\subset B_{R/\lambda}$

**Ex. 150.** i) ($\Rightarrow$) Trivial. ($\Leftarrow$) Se $\bar{B}_1(0)$ é ordem-completo, seja $x\leq y\leq z$. $y\in[x,z]$ Seja $K=\text{máx}\{\|x\|,\|z\|\}$, se $K=0$ $\Rightarrow x=z=0$, note que $\lambda y\in[0,0]\subset\bar{B}_1(0)$, $\forall\lambda>0$. Se $y\neq0$, tomando $\lambda>\|y\|$, chegamos numa contradição, logo $y=0$ e $\|0\|\leq\text{máx}\{0,0\}$. Agora, se $K>0\Rightarrow\frac{y}{K}\in[\frac{x}{K},\frac{z}{K}]\subset\bar{B}_1(0)\Rightarrow\|y\|\leq K$. Portanto a norma é fortemente monótona. A prova no caso $B_1(0)$ é similar.

ii) Seja $\|\cdot\|_2$ uma norma totalmente monótona tal que existe $C>0$ tal que $C^{-1}\|x\|\leq\|x\|_2\leq C\|x\|$ $\forall x\in X$. Seja $R>0$, por i), $B_1^{\|\cdot\|_2}(0)$ é ordem-completo, logo é claro que $B_R(0)$ é ordem-completa $\Rightarrow X$ é localmente ordem-completa.

**Ex. 152.** Sejam $x\leq y\leq z$. Note sempre existe $\alpha>0$ tq $x\in[-\alpha u,\alpha u]$ (ou $y$ ou $z$). Suponha que $\|x\|_u\leq\|z\|_u$, seja $\beta>0$ tal que $z\in[-\beta u,\beta u]$, $\beta\geq\|z\|_u$ e $-\beta u\leq x\leq y\leq z\leq\beta u\Rightarrow\|y\|_u\leq\beta$, logo $\|y\|\leq\|z\|_u$. Analogamente, se $\|z\|_u\leq\|x\|_u$ então $\|y\|_u\leq\|x\|_u$, logo $\|y\|_u\leq\text{máx}\{\|x\|_u,\|z\|_u\}$

**Ex. 154.** Sejam $u,u'$ duas unidades de ordem. Sejam $\alpha,\beta>0$ tais que $\alpha u\geq u'$ e $\beta u'\geq u$. Pela Proposição 153, $[-u',u']=\bar{B}_1^{u'}(0)\subset[-\alpha u,\alpha u]=\alpha[-u,u]=\alpha\bar{B}_1^{u}(0)$, similarmente $\bar{B}_1^{u}(0)\subset\beta\bar{B}_1^{u'}(0)$, logo $\|\cdot\|_u$ e $\|\cdot\|_{u'}$ são equivalentes.

**COR. 155.** Uma transformação linear é contínua se e somente se leva subconjuntos norma-limitada em subconjuntos norma-limitados. Logo, o corolário segue da Proposição 153 e do Ex. 148.

**COR. 158.** Segue da Proposição 157 e do COR. 30, pois $V^{ud}=\text{span}(\mathcal{L}(V,\mathbb{R}))$.