MAC0239 (2023) AULA durante GREVE

Flavio S Correa da Silva

22 de Setembro de 2023

1 Notação clausal

Em nosso estudo inicial a respeito de sistemas dedutivos, consideramos a *Lógica Proposicional Clássica* e uma formulação de regras dedutivas baseadas em expressões denominadas *sequentes*, que são as expressões no formato $\Gamma \vdash \alpha$. As regras têm o formato:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \alpha_1; ...; \Gamma_N \vdash \alpha_N}{\Gamma \vdash \beta}$$

Cada regra indica, em seu "numerador", as premissas para seu uso e, em seu "denominador", o resultado de sua aplicação.

O conjunto de 12 regras do *Cálculo de Sequentes* que estudamos até aqui pode ser resumido conforme apresentado na tabela abaixo:

$\frac{\Gamma \vdash \alpha; \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}$	$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta}$
$\frac{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Gamma \vdash \alpha}$	$\frac{\Gamma \vdash \alpha; \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta}{\Gamma \vdash \beta}$
$\frac{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}{\Gamma \vdash \beta}$	$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\alpha}$
$\frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}$	$\frac{\Gamma \vdash \alpha; \Gamma \vdash \neg\alpha}{\Gamma \vdash \bot}$
$\frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}$	$\frac{\Gamma_1, \alpha_1, \alpha_2, \Gamma_2 \vdash \beta}{\Gamma_1, \alpha_2, \alpha_1, \Gamma_2 \vdash \beta}$
$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \delta; \Gamma, \beta \vdash \delta; \Gamma \vdash \alpha \vee \beta}{\Gamma \vdash \delta}$	$\frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma, \alpha \vdash \beta}$

Algumas destas regras são mais “mecânicas”, ou seja, exigem escolhas simples (ou nenhuma escolha) – por exemplo, as regras relativas ao conectivo $\wedge$ apresentam esta característica – mas outras regras exigem escolhas e, portanto, um pouco de criatividade e habilidade para serem bem utilizadas. Para automatizar um sistema dedutivo, seria interessante reduzir as possibilidades de construção de sentenças lógicas, de forma a impedir a ocorrência das regras “criativas”sem, efetivamente, alterar a lógica em si.

Diversas possibilidades têm sido desenvolvidas neste sentido. Uma das primeiras possibilidades exploradas, que é um tanto restritiva mas funciona bastante bem, é a restrição das sentenças lógicas ao formato de *cláusulas*.

As *cláusulas* são sentenças lógicas restritas a um dos formatos a seguir:

1. Proposições básicas $p_i, q_j \in P$;

2. Expressões que lembram um pouco “regras”e têm o formato

$$(p_1 \wedge ... \wedge p_n) \to q.$$

Os sequentes considerados para serem deduzidos, seguindo a formatação de cláusulas, terão sempre o mesmo formato (portanto, continuamos com a lógica proposicional clássica completa, apenas nos restringimos a resolver exercícios que estejam ajustados à formatação de cláusulas). O formato é o seguinte:

$$C_1, ..., C_n \vdash q.$$

Neste sequente, C_i são *cláusulas* e $q \in P$ é, em geral, denominada uma “consulta”ao conjunto $\{C_1, ..., C_n\}$.

Para um problema com este formato, a única regra que pode ser produtiva é a regra de eliminação do conectivo $\to$:

$$\frac{C_1, ..., C_n \vdash \alpha; C_1, ..., C_n \vdash \alpha \to q}{C_1, ..., C_n \vdash q}$$

Se existir uma cláusula $C_i, i = 1, ..., n$ tal que $C_i = \alpha \to q$, o ramo da dedução contendo $C_1, ..., C_n \vdash \alpha \to q$ poderá ser concluído. Neste caso, $\alpha = p_1 \wedge ... \wedge p_m$ ou $\alpha = p$ obrigatoriamente.

Considerando estas únicas possibilidades de formatação para α, e assumindo que a regra de inclusão do conectivo $\wedge$ seja utilizada repetidamente, o sequente no formato

$$C_1, ..., C_n \vdash \alpha$$

pode ser “reduzido”a m sequentes com formatação idêntica à do problema inicial. Caso todos os ramos levem a axiomas básicos no formato $p \vdash p$, a consulta será considerada “bem sucedida”.

Um brevíssimo exemplo ilustrativo pode ser apresentado para facilitar o entendimento:

- Vamos demonstrar que $p_1, p_2, (p_1 \wedge p_2) \to q \vdash q$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$p_1 \vdash p_1$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$p_1, p_2, (p_1 \wedge p_2) \to q \vdash p_1$}
\AxiomC{$p_2 \vdash p_2$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$p_1, p_2, (p_1 \wedge p_2) \to q \vdash p_2$}
\BinaryInfC{$p_1, p_2, (p_1 \wedge p_2) \to q \vdash p_1 \wedge p_2$}
\AxiomC{$(p_1 \wedge p_2) \to q \vdash (p_1 \wedge p_2) \vdash q$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$p_1, p_2, (p_1 \wedge p_2) \to q \vdash (p_1 \wedge p_2) \to q$}
\BinaryInfC{$p_1, p_2, (p_1 \wedge p_2) \to q \vdash q$}
\end{prooftree}
$$