Primeira avaliação presencial
Cálculo II
EAN

Prof. Juan López Linares

19 de setembro de 2023

# 1 A04-Equações Não Homogêneas

**Exercício 1.** *Considera-se:*

$$y''(x) - 9y(x) = e^x \operatorname{sen}(x).$$

*Resolver a equação diferencial homogênea correspondente e propor (sem resolver) uma solução particular para a equação diferencial não homogênea.*

## 1.1 Resolução do Exercício 1

i) Tem-se a equação diferencial homogênea correspondente:

$$y''(x) - 9y(x) = 0.$$

Procuram-se soluções da forma $y(x) = e^{rx}$, onde $r$ é um parâmetro a ser determinado. Isso leva na equação caraterística:

$$r^2 - 9 = 0,$$

$$r^2 = 9,$$

$$r_1 = -3,\ r_2 = 3.$$

As soluções são do tipo I:

$$y_{g.h.}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_1 x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$y_{g.h.}(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Alternativamente, pode ser escrito:

$$y_{g.h.}(x) = D_1 \cosh(3x) + D_2 \sinh(3x),\ D_1, D_2 \in \mathbb{R}.$$

ii) A seguir analisa-se a equação não homogênea:

$$y''(x) - 9y(x) = e^x \operatorname{sen}(x).$$

Seguindo o método dos coeficientes indeterminados a proposta de solução particular deve ser da forma:

$$y_p(x) = e^x \left[E_1 \cos(x) + E_2 \operatorname{sen}(x)\right], \; E_1, E_2 \in \mathbb{R}.$$

# 2 A06-Cálculos com Equações Paramétricas

**Exercício 2.** *Para a curva*

$$x(\theta) = \sinh(\theta), \; y(\theta) = 5\cosh(\theta),$$

*encontrar: a)* $\frac{dy}{dx}$ *no ponto* $(0, 5)$, *b)* $\frac{d^2y}{dx^2}$.

## 2.1 Resolução do Exercício 2

a) O ponto $(0, 5)$ pertence a curva dada pois, para algum $\theta_0$, vale que:

$$0 = \sinh(\theta_0), \; 5 = 5\cosh(\theta_0).$$

Como

$$\cosh(0) = 1, \; \sinh(0) = 0,$$

o valor procurado de $\theta_0 = 0$. Nota-se ainda que:

$$x'(\theta) = \frac{dx}{d\theta} = \cosh(\theta), \; y'(\theta) = \frac{dy}{d\theta} = 5\sinh(\theta).$$

Calcula-se a derivada paramétrica como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}.$$

Isto é,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5\sinh(\theta)}{\cosh(\theta)}.$$

Segue que:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\theta_0=0} = \frac{5 \cdot \sinh(0)}{\cosh(0)} = 0.$$

b) Para o cálculo da segunda derivada relativa a $x$ encontra-se primeiro:

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{d\theta} = \frac{d\left(\frac{5\sinh(\theta)}{\cosh(\theta)}\right)}{d\theta} = 5\left(\frac{\cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta)}{\cosh^2(\theta)}\right),$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{d\theta} = \frac{5}{\cosh^2(\theta)}.$$

A segunda derivada relativa a $x$ escreve-se como:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}.$$

Substituindo os resultados encontrados anteriormente finaliza-se o cálculo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{5}{\cosh^2(\theta)}}{\cosh(\theta)} = \frac{5}{\cosh^3(\theta)}.$$