# Primeira avaliação presencial
# Cálculo II
# Biossistemas

Prof. Juan López Linares

21 de setembro de 2023

## 1 A03-Problemas de Valor Inicial (PVI) e Problemas de Valor de Contorno (PVC)

**Exercício 1.** *Resolver, se possível, o problema de valor de fronteira*

$$y''(x) + 25y(x) = 0,\ y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0.$$

### 1.1 Resolução do Exercício 1

Tem-se a equação diferencial:

$$y''(x) + 25y(x) = 0.$$

Procuram-se soluções da forma $y(x) = e^{rx}$, onde $r$ é um parâmetro a ser determinado. Isso leva na equação caraterística:

$$r^2 + 25 = 0,$$

$$r^2 = -25 = 25i^2,$$

$$r = \pm 5i = 0 \pm 5i = \alpha \pm \beta i.$$

Ou seja, $\alpha = 0$ e $\beta = 5$. As soluções são do tipo III:

$$y_{g.h.}(x) = e^{\alpha x}\left[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta x)\right],$$

$$y_{g.h.}(x) = C_1 \cos(5x) + C_2 \operatorname{sen}(5x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pela primeira restrição $y(0) = 0$ segue:

$$0 = C_1 \cancelto{1}{\cos(0)} + C_2 \cancelto{0}{\operatorname{sen}(0)} = C_1,$$

$$C_1 = 0.$$

Isto é, as soluções, até o momento, devem ser da forma:

$$y(x) = C_2 \operatorname{sen}(5x).$$

Pela segunda restrição $y\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0$ segue:

$$0 = C_2 \operatorname{sen}\left(5 \cdot \frac{\pi}{5}\right) = C_2 \cancelto{0}{\operatorname{sen}(\pi)} = 0.$$

O anterior é verdadeiro para todo $C_2$. Isto é, segunda restrição não determina $C_2$. Ou seja, existem infinitas soluções da forma:

$$y_{PVC}(x) = C_2 \operatorname{sen}(5x),\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

# 2 A08-Tangentes, Áreas e Comprimentos em Coordenadas Polares

**Exercício 2.** *Calcular o comprimento da cardioide, curva polar dada pela equação:*

$$r(\theta) = 1 + \cos(\theta).$$

## 2.1 Resolução do Exercício 2

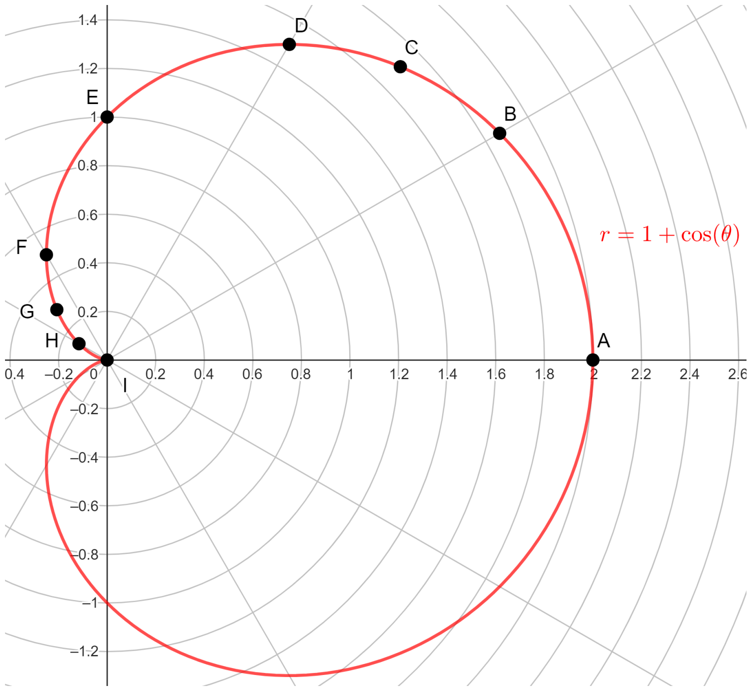
Nota-se que a cardioide dada apresenta simetria relativa ao eixo polar (eixo x) devido a que:

$$r(-\theta) = 1 + \cos(-\theta) = 1 + \cos(\theta) = r(\theta).$$

Ou seja, bastará estudar a mesma no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$. Alguns pontos representativos da curva aparecem na tabela a seguir:

| $\theta$ | $r(\theta)$ | *Ponto* |
|---|---|---|
| $0$ | $2$ | $A$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $B$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $C$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $1+\frac{1}{2}$ | $D$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $E$ |
| $\frac{2\pi}{3}$ | $1-\frac{1}{2}$ | $F$ |
| $\frac{3\pi}{4}$ | $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $G$ |
| $\frac{5\pi}{6}$ | $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $H$ |
| $\pi$ | $0$ | $I$ |

Figura 1: Gráficos da curva polar $r(\theta) = 1 + \cos(\theta)$. Versão interativa aqui.




Fonte: O autor.

Para o cálculo do comprimento de uma curva polar utiliza-se a expressão:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta.$$

A fórmula anterior é válida se nenhum segmento da curva polar $r(\theta)$ for traçado mais de uma vez à medida que $\theta$ cresce de $\alpha$ até $\beta$. A demonstração está disponível em vídeo.

Nota-se que:

$$r'(\theta) = -\operatorname{sen}(\theta).$$

Calcula-se o comprimento da metade superior, e devido a simetria, o comprimento total é duas vezes esse valor:

$$L = 2\int_{0}^{\pi} \sqrt{[1 + \cos(\theta)]^2 + [-\operatorname{sen}(\theta)]^2} d\theta,$$

$$L = 2\int_{0}^{\pi} \sqrt{1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)} d\theta.$$

Pela identidade trigonométrica fundamental:

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos(\theta)}d\theta,$$

$$L = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos(\theta)}d\theta.$$

Neste ponto lembra-se da identidade do ângulo duplo:

$$\cos\left(2\theta\right) = \cos^2\left(\theta\right) - \operatorname{sen}^2\left(\theta\right),$$

$$\cos\left(2\theta\right) = 2\cos^2\left(\theta\right) - 1,$$

$$1 + \cos\left(2\theta\right) = 2\cos^2\left(\theta\right).$$

Dividindo por 2 os argumentos das funções cossenos encontra-se:

$$1 + \cos\left(\theta\right) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Retorna-se na integral:

$$L = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}d\theta,$$

$$L = 4\int_0^{\pi} \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| d\theta.$$

Quando $0 \leq \theta \leq \pi$ tem-se que $0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ e:

$$0 \leq \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq 1.$$

Ou seja, pode-se retirar o módulo:

$$L = 4\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta.$$

Finalmente, calcula-se a integral como:

$$L = 8\ \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 8(1 - 0) = 8.$$