PQI-5884 - Programação Inteira Mista aplicada à Otimização de Processos
3º Período 2023

Data	Atividade	Conteúdo
14/set	Aula 1	Introdução, formulação, classes, representação
21/set	Aula 2	Condições de otimalidade
28/set	Aula 3	Condições KKT, multiplicadores
06/out*	Aula 4	Otimização irrestrita
19/out	Aula 5	LP
26/out	Aula 6	NLP
09/out	Aula 7	MILP
16/nov	Aula 8	MILP, problemas clássicos
23/nov	Aula 9	MILP, problema de scheduling
30/nov	Aula 10	MINLP, problema de síntese
07/dez	-	Apresentações

Conceitos Básicos de Otimalidade

Problema NLP

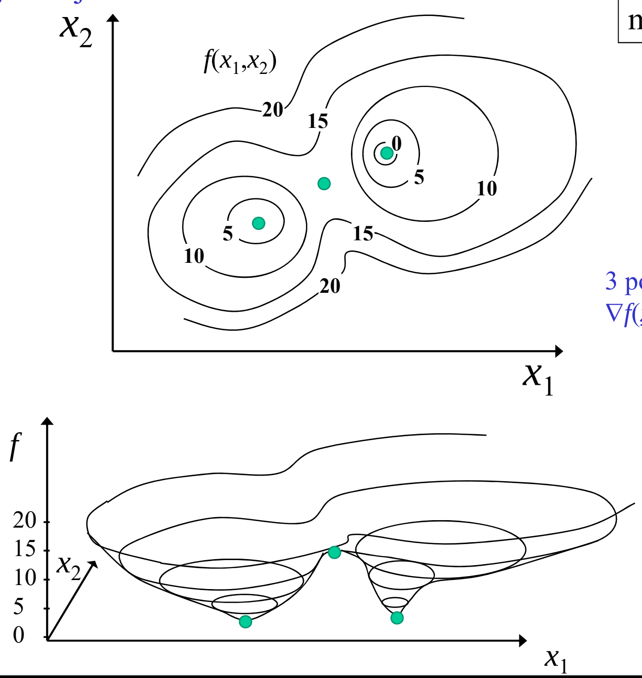
min	$f(\underline{x})$	função objetivo escalar	
s.a.:	$\underline{h}(\underline{x}) = 0$	m equações	restrições
	$\underline{g}(\underline{x}) \leq 0$	r inequações	restrições
	$\underline{x} \in \Re^n$	n variáveis contínuas	restrições

Região viável do problema:
Espaço F = $\{\underline{x} \mid \underline{x} \in \Re^n, \underline{h}(\underline{x}) = 0, \underline{g}(\underline{x}) \leq 0\}$

$f(\underline{x})$ é função convexa?
F é um espaço convexo?

Função objetivo não convexa

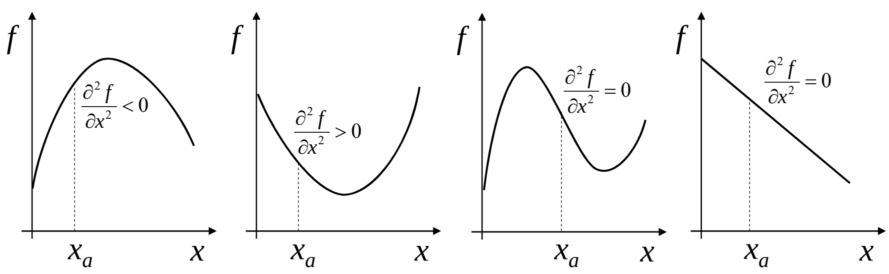
min $f(x_1,x_2)$



3 pontos estacionários

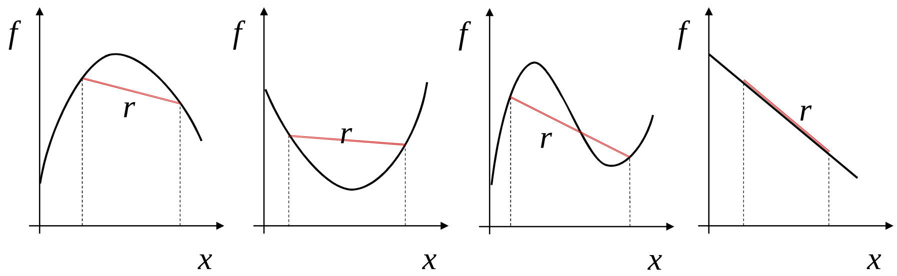
$\nabla f(\underline{x}) = \underline{0}$

Convexidade de função em ponto, exemplos em $\Re^1$



Função côncava em x_a	Função convexa em x_a	x_a é um ponto de inflexão	x_a pertence à função linear
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

Convexidade de função em intervalo, exemplos em $\Re^1$



Estritamente côncava	Estritamente convexa	Concavidade indefinida	Convexa ou côncava
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$		$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$
$f(x) \geq r(x)$	$f(x) \leq r(x)$		$f(x) = r(x)$

Hessiano de $f(\underline{x})$:

$$\underline{\underline{H}}(f) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1 x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_1 x_n} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2 x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2 x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_n x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n x_n} \end{bmatrix}$$

matriz quadrada simétrica

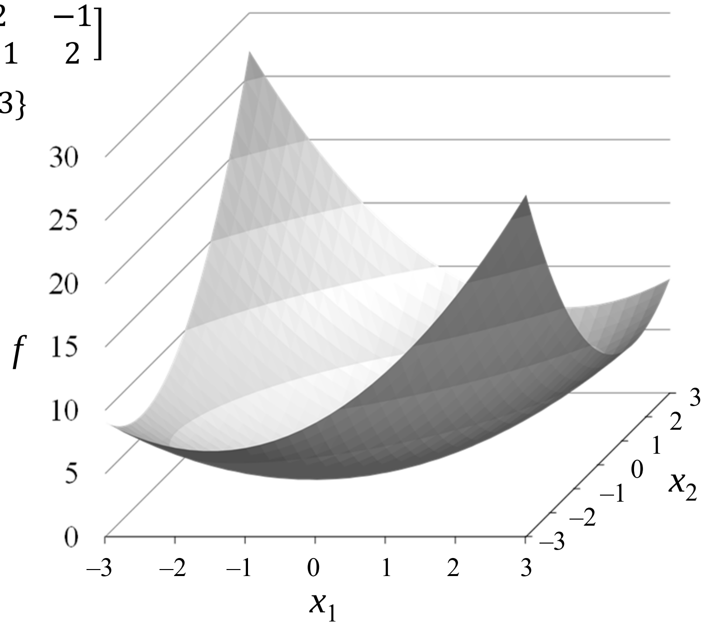
Sinal de uma matriz quadrada

Matriz $\underline{\underline{H}}$	Condição	Autovalores
Positiva definida	$\underline{x}^T.\underline{\underline{H}}.\underline{x} > 0$, para $\forall\ \underline{x} \neq 0$	$\alpha_i > 0$
Positiva semi-definida	$\underline{x}^T.\underline{\underline{H}}.\underline{x} \geq 0$, para $\forall\ \underline{x} \neq 0$	$\alpha_i \geq 0$
Negativa definida	$\underline{x}^T.\underline{\underline{H}}.\underline{x} < 0$, para $\forall\ \underline{x} \neq 0$	$\alpha_i < 0$
Negativa semi-definida	$\underline{x}^T.\underline{\underline{H}}.\underline{x} \leq 0$, para $\forall\ \underline{x} \neq 0$	$\alpha_i \leq 0$
Indefinida		

$f(\underline{x}) = x_1^2 - x_1.x_2 + x_2^2$

$H = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

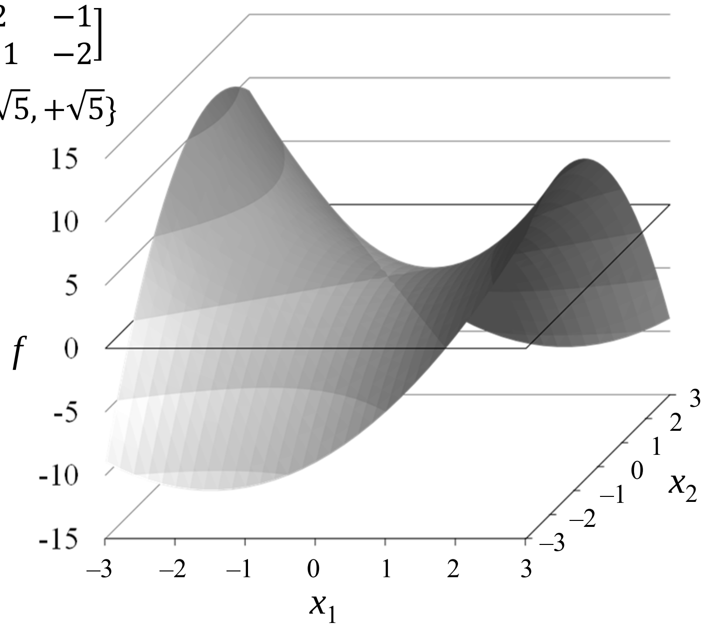
$\alpha = \{1, 3\}$



$f(\underline{x}) = x_1^2 - x_1.x_2 - x_2^2$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

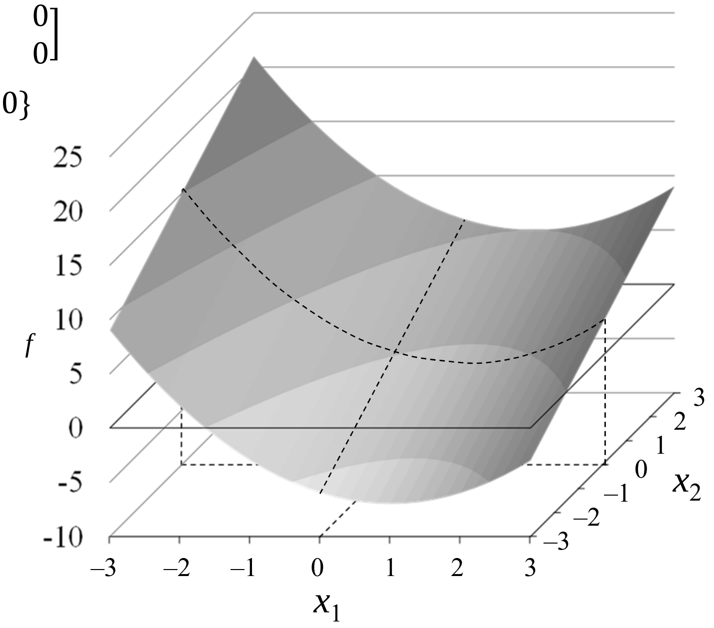
$\alpha = \{-\sqrt{5}, +\sqrt{5}\}$



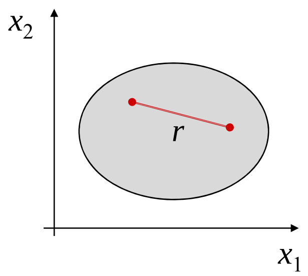
$f(\underline{x}) = x_1^2 - 2.x_1 + 2.x_2$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

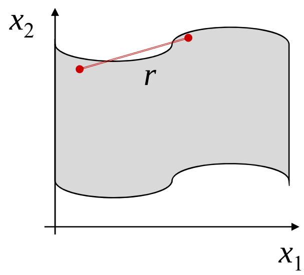
$\alpha = \{2, 0\}$



Convexidade de espaço, exemplos em $\Re^2$



Convexo

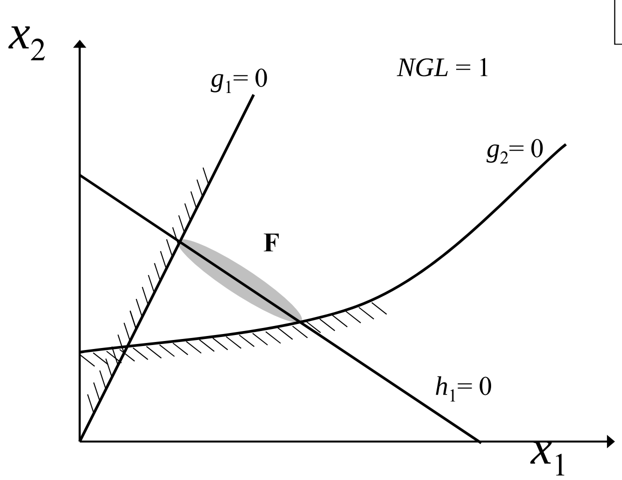


Não convexo

Importante: Se $\underline{h}(\underline{x}) = 0$ é linear e $\underline{g}(\underline{x}) \leq 0$ é convexa (linear ou não linear), então F é uma região viável convexa.

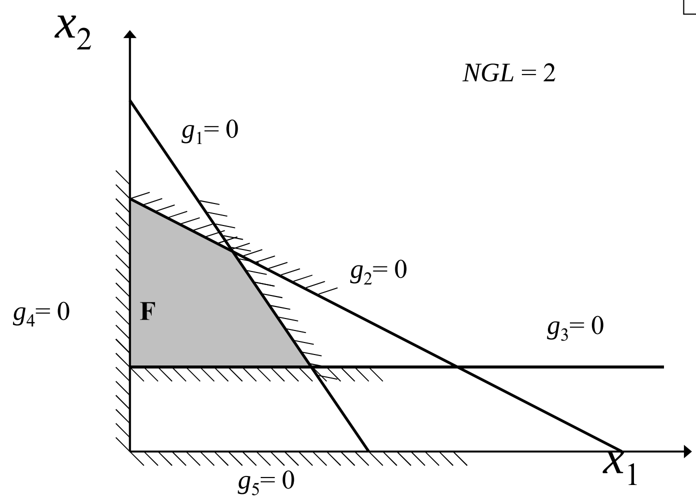
<u>Região Viável (exemplo 1)</u>

$$\begin{aligned} &\min f(x_1,x_2) \\ &\text{s.a.:}\ \ h = 0 \\ &\qquad\ \ g_1 \leq 0 \\ &\qquad\ \ g_2 \leq 0 \end{aligned}$$



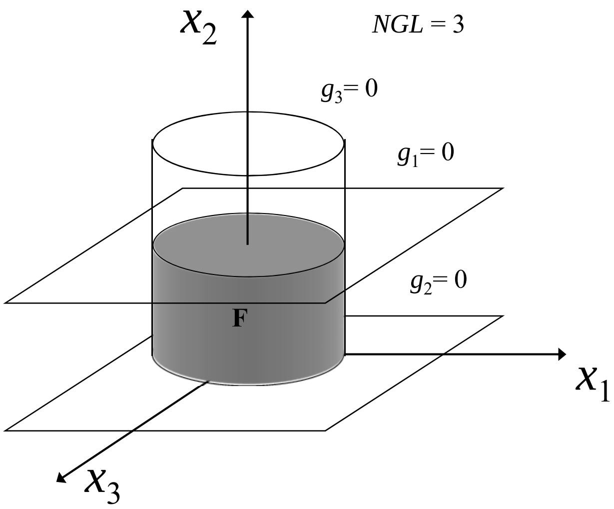
Região Viável (exemplo 2)

min $f(x_1,x_2)$
s.a.: $g_i \leq 0$
$i = 1, 2...5$



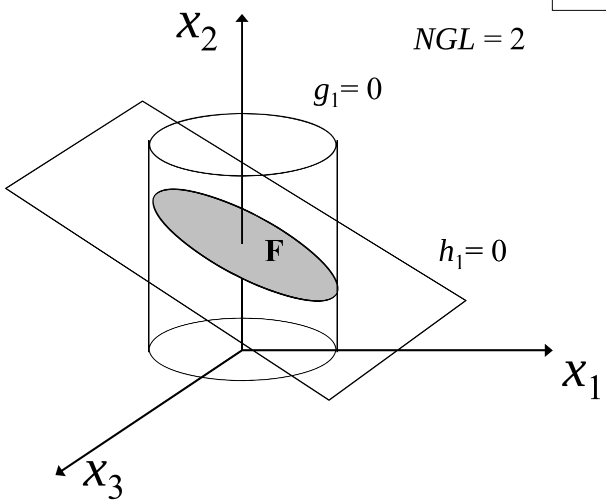
Região Viável (exemplo 3)

min $f(x_1,x_2,x_3)$
s.a.: $g_i \leq 0$
$i = 1, 2, 3$



Região Viável (exemplo 4)

min $f(x_1,x_2,x_3)$
s.a.: $h_1 = 0$
$g_1 \leq 0$



II.3. CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE

II.3.1. PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO SEM RESTRIÇÕES

Seja o problema de otimização:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\underline{x}) \\ \text{sujeito a:} & \underline{x} \in \Re^n \end{array}$$

Condição necessária para um mínimo local $\underline{x}^*$

$$\nabla f(\underline{x}^*) = \underline{0}$$

Condição suficiente para um mínimo local $\underline{x}^*$

$\underline{\underline{H}}(f(\underline{x}^*))$ deve ser positiva definida

II.3.2. PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE

Seja o problema de otimização:

$$\begin{array}{lll} \min & f(\underline{x}) & \\ \text{sujeito a:} & \underline{h}(\underline{x}) = 0 & \qquad m \text{ equações} \\ & \underline{x} \in \Re^n & \end{array}$$

Condições necessárias para um mínimo local $\underline{x}^*$

$$\nabla f\left(\underline{x}^*\right) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j . \nabla h_j\left(\underline{x}^*\right) = 0 \qquad \textit{dependência linear de gradientes}$$

$$\underline{h}\left(\underline{x}^*\right) = 0 \qquad \textit{viabilidade}$$

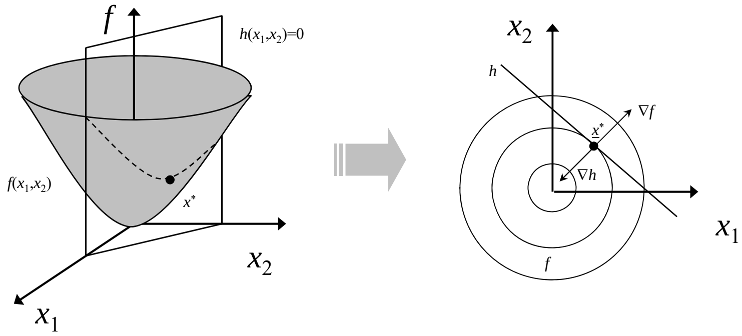
Condição suficiente para um mínimo local $\underline{x}^*$

$\underline{H}_{xx}(L(\underline{x}^*,\underline{\lambda}))$ deve ser positiva definida

sendo $L(\underline{x},\underline{\lambda}) = f(\underline{x}) + \Sigma\, \lambda_j . h_j(\underline{x})$ a função Lagrangeano

Exemplo de dependência linear de gradientes:

min $f(x_1,x_2)$
s.a.: $h = 0$



II.3.3. PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÕES DE DESIGUALDADE

Seja o problema de otimização:

$$\begin{array}{lll} \min & f(\underline{x}) & \\ \text{sujeito a:} & \underline{g}(\underline{x}) \le 0 & r \text{ inequações} \\ & \underline{x} \in \Re^n & \end{array}$$

Condições necessárias para um mínimo local $\underline{x}^*$

$$\nabla f\left(\underline{x}^*\right) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j . \nabla g_j\left(\underline{x}^*\right) = 0 \qquad \textit{dependência linear de gradientes}$$

$$\underline{g}(\underline{x}^*) \le 0 \qquad \textit{viabilidade}$$

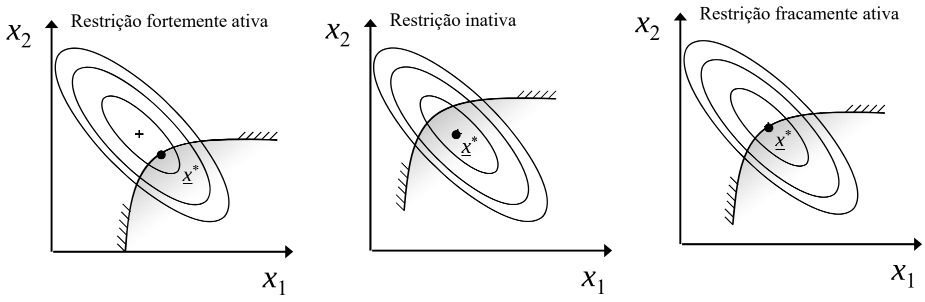
$$\mu_j . g_j\left(\underline{x}^*\right) = 0 \qquad \mu_j \ge 0 \qquad \textit{complementariedade}$$

Condição suficiente para um mínimo local $\underline{x}^*$

$\underline{\underline{H}}_{xx}(L(\underline{x}^*,\underline{\mu}))$ deve ser positiva definida

sendo $L(\underline{x},\underline{\mu}) = f(\underline{x}) + \Sigma\, \mu_j . g_j(\underline{x})$ a função Lagrangeano

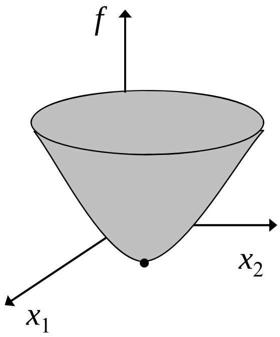
$\min f(x_1,x_2)$
s.a.: $g \le 0$

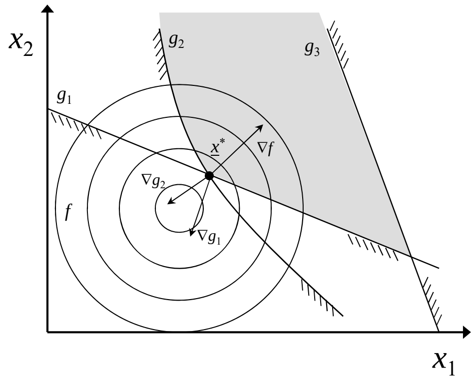


Classificação:

a) $g(\underline{x})$ ativa (fortemente) $\quad g_j(\underline{x}^*) = 0 \quad$ e $\quad \mu_j > 0$
b) $g(\underline{x})$ ativa (fracamente) $\quad g_j(\underline{x}^*) = 0 \quad$ e $\quad \mu_j = 0$
c) $g(\underline{x})$ inativa $\quad g_j(\underline{x}^*) < 0 \quad$ e $\quad \mu_j = 0$

$$\min f(x_1,x_2)$$
$$\text{s.a.: } g_i \le 0 \quad i = 1, 2, 3$$





Condições KKT (Karush-Kuhn-Tucker)

1- Dependência linear dos gradientes

$$\nabla f(\underline{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j . \nabla h_j(\underline{x}) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j . \nabla g_j(\underline{x}) = 0$$

λ_j : multiplicadores de Lagrange
μ_j : multiplicadores de Kuhn-Tucker

2 - Viabilidade das restrições

$h_j(\underline{x}) = 0 \qquad 1 \le j \le m$
$g_j(\underline{x}) \le 0 \qquad 1 \le j \le r$

3 - Condições de complementaridade

$\mu_j . g_j(\underline{x}) = 0 \qquad 1 \le j \le r$
$\mu_j \ge 0$

sistema não-linear de
$n + m + r$ equações e variáveis

Solução:
ponto KKT (mínimo local)

verificar convexidade

22