Simulado 2 (SMA304) - Gabarito

Questão 1. Considere o subespaço V de $\mathbb{R}^4$ formado pelas quádruplas $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ que satisfazem as equações

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \quad \text{e} \quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

É correto afirmar que:

a ( ) $\{(-2, 1, 0, 0), (3, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ é uma base de V;

b ( ) o vetor $(-1, 1, 0, 0)$ pode pertencer a uma base de V.

c ( ) pode ocorrer $\dim V \geq \dim \mathbb{R}^4$

d (x) $\{(-2, 1, 0, 1), (3, 0, 1, -5)\}$ é uma base de V.

e ( ) o vetor $(1, 0, 2, 0)$ pode pertencer a uma base de V.

Solução: Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \qquad \text{ou seja,} \qquad x_1 = 3x_3 - 2x_2. \tag{1}$$

Por outro lado, isolando x_4, digamos, na primeira equação, obtemos

$$x_4 = -x_1 - x_2 - 2x_3 \tag{2}$$

e, substituindo (1) em , chegamos a

$$x_4 = -(3x_3 - 2x_2) - x_2 - 2x_3 = x_2 - 5x_3$$

Então os vetores de V são do tipo

$$(3x_3 - 2x_2, x_2, x_3, x_2 - 5x_3) = x_2(-2, 1, 0, 1) + x_3(3, 0, 1, -5)$$

Logo,

$$V = [(-2, 1, 0, 1), (3, 0, 1, -5)]$$

e, como $\{(-2, 1, 0, 1), (1, 0, 1, -5)\}$ é L.I, então $\{(-2, 1, 0, 1), (3, 0, 1, -5)\}$ é uma base de V e $\dim V = 2$. Logo, a alternativa (d) está correta.

As alternativa (a), (b) e (e) são incorretas, pois os vetores não satisfazem ambas as equações.

A alternativa (c) é incorreta, pois como V é subespaço de $\mathbb{R}^4$, então $\dim V \leq \dim \mathbb{R}^4$. Além disso, como as equações dadas são L.I., segue que $\dim V < \dim \mathbb{R}^4$ necessariamente.

Questão 2. Sejam $v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (4, 3, 2, 1), v_3 = (-5, 0, 5, 10)$ vetores de $\mathbb{R}^4$. É correto afirmar que:

a (x) Não existe uma base de $\mathbb{R}^4$ contendo v_1, v_2 e v_3.

b ( ) $B = \{(1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1), (-5, 0, 5, 10), (1, 0, 0, 0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ contendo v_1, v_2 e v_3.

c ( ) $B = \{(1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1), (-5, 0, 5, 10), (0, 1, 0, 0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ contendo v_1, v_2 e v_3.

d ( ) $B = \{(1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1), (-5, 0, 5, 10), (0, 0, 1, 0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ contendo v_1, v_2 e v_3.

Solução: Notemos que os vetores v_1, v_2 e v_3 são linearmente dependentes. Como qualquer conjunto contendo $\{v_1, v_2, v_3\}$ também é linearmente dependente, temos que não existe uma base de $\mathbb{R}^4$ contendo v_1, v_2 e v_3.

Questão 3. Considere as seguintes afirmações:

(I) Os polinômios $(1-t)^3$, $(1-t)^2$, $1-t$ e 1 geram $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(II) Se $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ são dois polinômios não nulos tais que $\alpha p + \beta q = \lambda p + \mu q$, então $\alpha = \lambda$ e $\beta = \mu$.

(III) Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $W = [\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}]$ e $W \neq V$. Então $m < n$.

Assinale a alternativa correta. Na sua resolução, justifique claramente sua escolha.

a (x) (I) é verdadeira e (II) e (III) são falsas.

b ( ) (II) é verdadeira e (I) e (III) são falsas.

c ( ) (III) é verdadeira e (I) e (II) são falsas.

d ( ) (I) e (II) são verdadeiras e (III) é falsa.

e ( ) (I) e (III) são verdadeiras e (II) é falsa.

f ( ) (II) e (III) são verdadeiras e (I) é falsa.

g ( ) (I), (II) e (III) são verdadeiras.

h ( ) (I), (II) e (III) são falsas.

Solução: Note que

$$
\begin{aligned}
p_1(t) &= (1-t)^3 = 1 - 3t + 3t^2 - t^3 \\
p_2(t) &= (1-t)^2 = 1 - 2t + t^2 \\
p_3(t) &= 1 - t \\
p_4(t) &= 1
\end{aligned}
$$

Como a dimensão de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ é 4 segue que se (p_1, p_2, p_3, p_4) é uma sequência LI, então p_1, p_2, p_3, p_4 geram $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Para mostrar (p_1, p_2, p_3, p_4) é uma sequência LI, o primeiro passo é calcular o determinante da seguinte matriz:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det A = 1 * (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.
$$

Como $\det A \neq 0$, segue que (p_1, p_2, p_3, p_4) é uma sequência LI. Logo, a afirmativa (I) é verdadeira.

Considere $p(t) = t$ e $q(t) = -t$. Temos $p, q \in \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ são dois polinômios não nulos e

$$1 * p + 1 * q = (-2) * p + (-2) * q.$$

Logo, a afirmativa (II) é falsa.

Considere $V = \mathbb{R}^3$ e $W = [(1,0,0), (0,1,0), (1,1,0), (2,1,0)]$. Portanto $n = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Note que $(0,0,1) \notin W$ e portanto $W \neq V$. Porém $m = 4 > n$. Logo, a afirmativa (III) é falsa.

Questão 4. Sejam

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x, 2x+y, 2y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ W_2 &= \{(x+z, 2x+y+2z, 2y+3z, 4z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

subespaços de $\mathbb{R}^4$. Então é correto afirmar que:

a ( ) $\dim(W_1) = 2$, $\dim(W_2) = 2$, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$ e essa soma de subespaços é direta.

b ( ) $\dim(W_1) = 2$, $\dim(W_2) = 3$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ e $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$.

c ( ) $\dim(W_1) = 2$, $\dim(W_2) = 2$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ e $\dim(W_1 + W_2) = 3$.

d (x) $\dim(W_1) = 2$, $\dim(W_2) = 3$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$ e $\dim(W_1 + W_2) = 3$.

Solução: Notemos que

$$W_1 = [(1,2,0,0), (0,1,2,0)]$$

e

$$W_2 = [(1,2,0,0), (0,1,2,0), (1,2,3,4)],$$

em que os conjuntos de vetores descritos acima são linearmente independentes, de modo que

$$\dim(W_1) = 2, \ \dim(W_2) = 3,$$

$W_1 \subseteq W_2$ e $W_1 \cap W_2 = W_1$. Em particular,

$$\dim(W_1 + W_2) = 3.$$

Questão 5. Considere os subespaços U, V de $\mathbb{R}^4$ tais que

$$\begin{aligned} U &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 = x_2 \text{ e } x_3 = -2x_4\} \\ V &= [(1,0,1,0), (0,2,1,1), (1,-2,0,-1)]. \end{aligned}$$

Considere as afirmações:

(I) $\dim V = 3$ e $\{(1,1,0,0), (0,0,-2,1)\}$ é base de U;

(II) $\dim(U \cap V) = 0$ e $\{(1,0,0,0), (0,1,0,1), (0,0,1,0), (0,0,0,\pi)\}$ é base de $U + V$;

(III) $\dim(U + V) = 4$ e $\{(1,1,0,0), (0,0,2,1), (1,0,1,0), (0,2,1,1)\}$ é base de $U + V$;

(IV) $\dim(U \cap V) = 0$ e $U + V$ é soma direta;

(V) $\dim(U \cap V) = 1$ e $\{(1,0,1,0), (0,2,1,1)\}$ é base de V.

Então é correto afirmar que:

a ( ) Somente (I) é verdadeira.

b ( ) Somente (I) e (II) são verdadeiras.

c ( ) Somente (II) e (III) são verdadeiras.

d ( ) Somente (II) é verdadeira.

e ( ) Somente (III) é verdadeira.

f ( ) Somente (III) e (IV) são verdadeiras.

g ( ) Somente (III) e (V) são verdadeiras.

h ( ) Somente (II) e (IV) são verdadeiras.

i (x) Nenhuma das demais alternativas está correta.

j ( ) Somente (IV) é verdadeira.

k ( ) Somente (V) é verdadeira.

Solução: Note que $(1,-2,0,-1) = (1,0,1,0) - (0,2,1,1)$. Portanto $V = [(1,0,1,0),(0,2,1,1)]$. Como $\{(1,0,1,0),(0,2,1,1)\}$ é L.I., então $\{(1,0,1,0),(0,2,1,1)\}$ é vase de V que, por conseguinte, tem dimensão 2.

Note, também, que $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in U$ se, e somente se, $(x_1,x_1,-2x_4,x_4) \in U$ e que

$$(x_1,x_1,-2x_4,x_4) = x_1(1,1,0,0) + x_4(0,0,-2,1).$$

Portanto $U = [(1,1,0,0),(0,0,-2,1)]$ e, como $\{(1,1,0,0),(0,0,-2,1)\}$ é L.I., então $\dim U = 2$.

Para encontrarmos uma base de $U+V$, consideremos os vetores das bases de U e de V e escalonemos estes vetores fazendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Portanto $\dim(U+V) = 4$, já que a última matriz acima está na forma escalonada e nenhuma linha ou coluna se anula. Assim, $\dim(U+V) = \dim \mathbb{R}^4 = 4$ e qualquer 4 vetores não nulos do $\mathbb{R}^4$ que estejam na forma escalonada são bases de $U+V$. Logo, tanto

$$\{(1,1,0,0),(0,0,2,1),(1,0,1,0),(0,2,1,1)\}$$

quanto

$$\{(1,0,0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,0),(0,0,0,\pi)\}$$

são bases de $U+V$.

Pelo Teorema da Dimensão da Soma

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V),$$

ou seja,

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V) = 2 + 2 - 4 = 0.$$

Assim, a soma $U + V$ é direta.

Finalmente, as afirmações verdadeiras são: (II),(III) e (IV). Logo, a alternativa correta é (i).

Questão 6. Sejam U e W dois subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathcal{P}_8(\mathbb{R})$. Suponha que

$$U + W = \mathcal{P}_8(\mathbb{R}) \qquad \text{e} \qquad \dim(U) = \dim(W) + 1.$$

Considere as seguintes afirmações

(I) A soma $U + W$ não é direta.

(II) As possíveis dimensões de $U \cap W$ são 7, 5, 3, 1.

(III) $\dim(U \cap W) \neq 5$.

Assinale a alternativa correta. Na sua resolução, justifique claramente sua escolha.

a ( ) (I) é verdadeira e (II) e (III) são falsas.

b ( ) (II) é verdadeira e (I) e (III) são falsas.

c (x) (III) é verdadeira e (I) e (II) são falsas.

d ( ) (I) e (II) são verdadeiras e (III) é falsa.

e ( ) (I) e (III) são verdadeiras e (II) é falsa.

f ( ) (II) e (III) são verdadeiras e (I) é falsa.

g ( ) (I), (II) e (III) são verdadeiras.

h ( ) (I), (II) e (III) são falsas.

Solução: Segue do Teorema da Dimensão do Subespaço Soma que

$$\begin{aligned} 9 = \dim(U + W) &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \\ &= \dim(W) + 1 + \dim W - \dim(U \cap W) \\ &= 2 \dim W - \dim(U \cap W) + 1. \end{aligned}$$

Logo, $2 \dim W - \dim(U \cap W) = 8$ ou $2 \dim W = 8 + \dim(U \cap W)$.

A soma pode ser direta. Exemplo: $U = [1, t, t^2, t^3, t^4]$ e $W = [t^5, t^6, t^7, t^8]$. Temos $U \cap W = \{0\}$, $\dim U = 5 = 4 + 1 = \dim(W) + 1$. Portanto, a afirmativa (I) é falsa.

Se $\dim(U \cap W) = 5$, segue que $2 \dim W = 13$ o que é uma contradição. Portanto, a afirmativa (III) é verdadeira.

Notemos que se $\dim(U \cap W)$ for 7, 5, 3 ou 1, então $8 + \dim(U \cap W)$ é um número natural ímpar, mas isso contradiz a igualdade $2 \dim W = 8 + \dim(U \cap W)$. Portanto, a afirmativa (II) é falsa.